湖南株洲市第十八中学 2023-2024 学年高三下学期第一次月考（开学考试）数学试题试卷

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．$\left(x^2-2x-3\right)(x+2)^5$ 的展开式中，x^5 项的系数为（　　）

A．－23　　**B．17**　　**C．20**　　**D．63**

2．$\dfrac{(1-2x)^7}{x}$ 的展开式中 x^2 的系数为（　）

A．-84　　B．84　　C．-280　　D．280

3．已知函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 的图像与一条平行于 x 轴的直线有两个交点，其横坐标分别为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=$（　　）

A．$\dfrac{3\pi}{4}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

4．已知命题 $p:\forall x\in R$，$x^2>0$，则 $\neg p$ 是（　　）

A．$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2\le 0$　　B．$\exists x_0\in \mathbf{R}$，$x_0^2\le 0$．

C．$\exists x_0\in \mathbf{R}$，$x_0^2>0$　　D．$\forall x\notin \mathbf{R}$，$x^2\le 0$．

5．已知单位向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，若向量 $\vec{m}=2\vec{a}$，$\vec{n}=4\vec{a}-\lambda\vec{b}$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$，则 $\left|\vec{n}\right|=$（　　）

A．2　　**B．2**　　**C．4**　　**D．6**

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1,x>0\\ g(x),x<0\end{cases}$ 是奇函数，则 $g(f(-1))$ 的值为（　　）

A．－10　　**B．－9**　　**C．－7**　　**D．1**

7．“哥德巴赫猜想”是近代三大数学难题之一，其内容是：一个大于 **2** 的偶数都可以写成两个质数(素数)之和，也就是我们所谓的“1+1”问题.它是 **1742** 年由数学家哥德巴赫提出的，我国数学家潘承洞、王元、陈景润等在哥德巴赫猜想的证明中做出相当好的成绩.若将 **6** 拆成两个正整数的和，则拆成的和式中，加数全部为质数的概率为（　　）

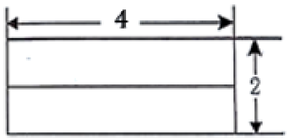
A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．设 **a**，**b** 都是不等于 1 的正数，则“$log_a 2 < log_b 2$”是“$2^a > 2^b > 2$”的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

9．一个空间几何体的正视图是长为 4，宽为 $\sqrt{3}$ 的长方形，侧视图是边长为 2 的等边三角形，俯视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



俯视图

A．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

10．已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \le 0$ 时，$2f(x-2)=f(x)$，且当 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)=|x+1|-1$；当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\ne 1)$.若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(625,+\infty)$　　B．$(4,64)$　　C．$(9,625)$　　D．$(9,64)$

11．在$\vee ABC$中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 $a\cos B-b\cos A=\frac{c}{4}$，则 $\frac{a^2-b^2}{2c^2}=$（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{8}$

12．偶函数 $f\left(x\right)$ 关于点 $\left(1,0\right)$ 对称，当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f\left(x\right)=-x^2+1$，求 $f\left(2020\right)=$（　　）

A．2　　B．0　　C．-1　　D．1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，若顶点到渐近线的距离为 1，则双曲线方程为___________.

14．若关于 x 的不等式 $\frac{mx^2}{1+\ln x}\ge 2e^{n-1}$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上恒成立，则 $\frac{n}{m}$ 的最大值为__________.

15．某校开展“我身边的榜样”评选活动，现对 3 名候选人甲、乙、丙进行不记名投票，投票要求详见选票．这 3 名候选人的得票数（不考虑是否有效）分别为总票数的 88%，75%，46%，则本次投票的有效率（有效票数与总票数的比值）最高可能为百分之________.

<table>
<tr><td colspan="3">“我身边的榜样”评选选票</td></tr>
<tr><td>候选人</td><td>符号</td><td rowspan="4">注：
1．同意画“○”，不同意画“×”．
2．每张选票“○”的个数不超过 2 时才为有效票．</td></tr>
<tr><td>甲</td><td></td></tr>
<tr><td>乙</td><td></td></tr>
<tr><td>丙</td><td></td></tr>
</table>

16．在$\vee ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，若$\vee ABC$外接圆的半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则$\vee ABC$面积的最大值是______．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(12 分）某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律，据统计该地区蜻蜓有 A，B 两种，且这两种的个体数量大致相等，记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长（单位：mm）分别为随机变量 X，Y，其中 X 服从正态分布 $N(45,25)$，Y 服从正态分布 $N(55,25)$．

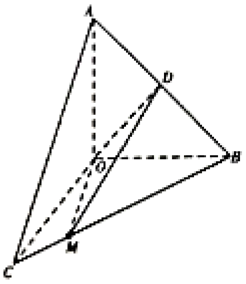
（Ⅰ）从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只，求这只蜻蜓的翼长在区间$[45,55]$的概率；

（Ⅱ）记该地区蜻蜓的翼长为随机变量Z，若用正态分布$N\left(\mu_0,\sigma_0^2\right)$来近似描述$Z$的分布，请你根据（Ⅰ）中的结果，求参数$\mu_0$和$\sigma_0$的值（精确到 **0.1**）；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，从该地区的蜻蜓中随机捕捉 3 只，记这 3 只中翼长在区间$[42.2,57.8]$的个数为W，求W的分布列及数学期望（分布列写出计算表达式即可）．

注:若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-0.64\sigma\le X\le\mu+0.64\sigma)\approx 0.4773$，$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\mu\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0.9546$．

18．(12 分）如图，在直角ΔAOB中，$OA=OB=2$，ΔAOC通过ΔAOB以直线OA为轴顺时针旋转$120°$得到（$\angle BOC=120°$）.点D为斜边AB上一点.点M为线段BC上一点，且$MB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$．



（1）证明：$MO \perp$ 平面 AOB；

（2）当直线 MD 与平面 AOB 所成的角取最大值时，求二面角 $B-CD-O$ 的正弦值.

19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\left|2x-a\right|+\left|x-1\right|\left(a\in R\right)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f\left(x\right)\geq 1$ 的解集；

（Ⅱ）若存在 $x\in \mathbf{R}$ 满足不等式 $f\left(x\right)<4$，求实数 a 的取值范围.

20.（12 分）在三角形 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A=b^2+c^2-a^2$.

（Ⅰ）求角 A；

（Ⅱ）若 $c=5$，$\cos B=\dfrac{1}{7}$，求 b.

21.（12 分）已知 a，b，c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，$a\cos C+\sqrt{3}c\sin A=b+c$.

（1）求 A；

（2）若 $a=\sqrt{3}$，$b+c=3$，求 b，c.

22.（10 分）设 $k\in \mathbf{R}$，函数 $g(x)=k(x-e)$，其中 e 为自然对数的底数.

（1）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-\ln x}$.

①若 $k=-1$，试判断函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上是否有交点；

②求证：对任意的 $k\in \mathbf{R}$，直线 $y=g(x)$ 都不是 $y=f(x)$ 的切线；

（2）设函数 $h(x)=2x-x\ln x+xg(x)-ekx$，试判断函数 $h(x)$ 是否存在极小值，若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

根据二项式展开式的通项公式，结合乘法分配律，求得 x^5 的系数.

【详解】

$(x+2)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\cdot 2^r$.则

①$\left(x^2-2x-3\right)$ 出 (-3)，则 $(x+2)^5$ 出 x^5，该项为：$(-3)\cdot C_5^0\cdot 2^0\cdot x^5=-3x^5$；

②$\left(x^2-2x-3\right)$ 出 $(-2x)$，则 $(x+2)^5$ 出 x^4，该项为：$(-2)\cdot C_5^1\cdot 2^1\cdot x^5=-20x^5$；

③$\left(x^2-2x-3\right)$ 出 x^2，则 $(x+2)^5$ 出 x^3，该项为：$1\cdot C_5^2\cdot 2^2\cdot x^5=40x^5$；

综上所述：合并后的 x^5 项的系数为 17.

故选：B

【点睛】

本小题考查二项式定理及展开式系数的求解方法等基础知识，考查理解能力，计算能力，分类讨论和应用意识.

2、**C**

【解析】

由题意，根据二项式定理展开式的通项公式 $T_{k+1}=\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$，得 $\left(1-2x\right)^7$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=\left(-2\right)^k C_7^k x^k$，则 $\dfrac{\left(1-2x\right)^7}{x}$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=\left(-2\right)^k C_7^k x^{k-1}$，由 $k-1=2$，得 $k=3$，所以所求 x^2 的系数为 $\left(-2\right)^3 C_7^3=-280$.故选 C.

点睛：此题主要考查二项式定理的通项公式的应用，以及组合数、整数幂的运算等有关方面的知识与技能，属于中低档题，也是常考知识点.在二项式定理的应用中，注意区分二项式系数与系数，先求出通项公式 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r a^{n-r}b^r$，再根据所求问题，通过确定未知的次数，求出 r，将 r 的值代入通项公式进行计算，从而问题可得解.

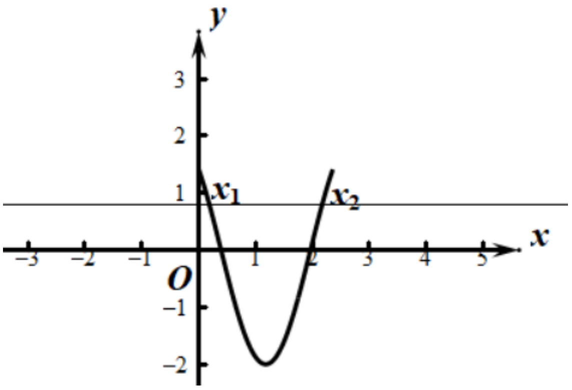
3、**A**

【解析】

画出函数$y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$的图像，函数对称轴方程为$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，由图可得$x_1$与$x_2$关于$x=\frac{3\pi}{8}$对称，即得解.

【详解】

函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图像如图，



对称轴方程为 $2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

又$\because 0<x<\frac{3\pi}{4},\therefore x=\frac{3\pi}{8}$，

由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称，

$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$

故选：**A**

【点睛】

本题考查了正弦型函数的对称性，考查了学生综合分析，数形结合，数学运算的能力，属于中档题.

4、**B**

【解析】

根据全称命题的否定为特称命题，得到结果.

【详解】

根据全称命题的否定为特称命题，可得 $\neg p:\exists x_0\in R$， $x_0^2\leq 0$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查含量词的命题的否定，属于基础题.

5、**C**

【解析】

根据$\vec{m}\perp\vec{n}$列方程，由此求得λ的值，进而求得$|\vec{n}|$.

【详解】

由于$\vec{m}\perp\vec{n}$，所以$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即

$2\vec{a}\cdot\left(4\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)=8\vec{a}^2-2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=8-2\lambda\cdot\cos\frac{3\pi}{4}=8+\sqrt{2}\lambda=0$，

解得$\lambda=-\frac{8}{\sqrt{2}}=-4\sqrt{2}$.

所以$\vec{n}=4\vec{a}+4\sqrt{2}\vec{b}$

所以

$|\vec{n}|=\sqrt{\left(4\vec{a}+4\sqrt{2}\vec{b}\right)^2}=\sqrt{16\vec{a}^2+32\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+32\vec{b}^2}=\sqrt{48+32\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{48-32}=4$.

故选：**C**

【点睛】

本小题主要考查向量垂直的表示，考查向量数量积的运算，考查向量模的求法，属于基础题.

6、**B**

【解析】

根据分段函数表达式，先求得$f\left(-1\right)$的值，然后结合$f\left(x\right)$的奇偶性，求得$g(f(-1))$的值.

【详解】

因为函数$f(x)=\begin{cases}x^3+x,x\geq 0\\g(x),x<0\end{cases}$是奇函数，所以$f(-1)=-f(1)=-2$，

$g(f(-1))=g(-2)=f(-2)=-f(2)=-10$.

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查分段函数的解析式、分段函数求函数值，考查数形结合思想.意在考查学生的运算能力，分析问题、解决问题的能力.

7、**A**

【解析】

列出所有可以表示成和为**6**的正整数式子，找到加数全部为质数的只有$3+3=6$，利用古典概型求解即可.

【详解】

6 拆成两个正整数的和含有的基本事件有:(1,5),(2,4),(3,3), (4,2),(5,1),

而加数全为质数的有(3,3),

根据古典概型知，所求概率为 $P=\frac{1}{5}$.

故选：*A*.

【点睛】

本题主要考查了古典概型，基本事件，属于容易题.

8、C

【解析】

根据对数函数以及指数函数的性质求解 a,b 的范围，再利用充分必要条件的定义判断即可.

【详解】

由“$\log_a 2<\log_b 2$”，得 $\frac{1}{\log_2 a}<\frac{1}{\log_2 b}$，

得 $\begin{cases}\log_2 a<0\\ \log_2 b>0\end{cases}$ 或 $log_2a>log_2b>0$ 或 $0>log_2a>log_2b$，

即 $\begin{cases}0<a<1\\ b>1\end{cases}$ 或 $a>b>1$ 或 $0<b<a<1$，

由 $2^a>2^b>2$，得 $a>b>1$，

故“$\log_a^2<\log_b^2$”是“$2^a>2^b>2$”的必要不充分条件，

故选 C.

【点睛】

本题考查必要条件、充分条件及充分必要条件的判断方法，考查指数，对数不等式的解法，是基础题.

9、B

【解析】

由三视图确定原几何体是正三棱柱，由此可求得体积.

【详解】

由题意原几何体是正三棱柱，$V=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times4=4\sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查三视图，考查棱柱的体积．解题关键是由三视图不愿出原几何体.

10、C

【解析】

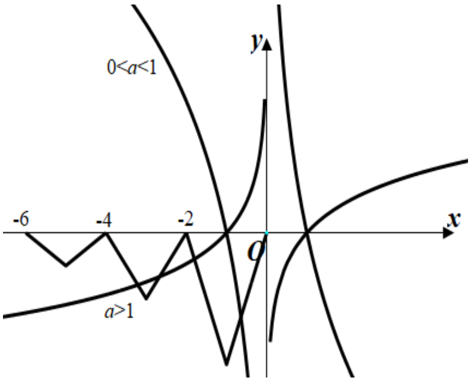
先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x)=\log_a x$ 关于原点对称的图象，分类利用图像列出有 **3** 个交点时满足的条件，解之即可.

【详解】

先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的部分图象，再作出 $f(x)=\log_a x$ 关于原点对称的图象，

如图所示，当 $0<a<1$ 时，对称后的图象不可能与 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 的图象有 **3** 个交点；

当 $a>1$ 时，要使函数 $f(x)$ 关于原点对称后的图象与所作的图象有 **3** 个交点，



则 $\begin{cases} a>1 \\ -\log_a 3>-\dfrac{1}{2} \\ -\log_a 5<-\dfrac{1}{4} \end{cases}$，解得 $9<a<625$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查利用函数图象解决函数的交点个数问题，考查学生数形结合的思想、转化与化归的思想，是一道中档题.

11、**D**

【解析】

利用余弦定理角化边整理可得结果.

【详解】

由余弦定理得：$a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{c}{4}$，

整理可得：$a^2-b^2=\dfrac{c^2}{4}$，$\therefore\dfrac{a^2-b^2}{2c^2}=\dfrac{1}{8}$.

故选：D.