江苏省南通市启东、通州联考2024-2025学年高三上学期11月期中质量监测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．设$z_1=1+2i$，$z_2=\mathrm{i}$，则$\frac{z_1}{z_2}$在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．若集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x}{2-x}\geq 0\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

3．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}+\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$（　　）

A．2　　B．$\sqrt{13}$　　C．4　　D．16

4．已知$f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=-x^2+ax+1$，若$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，则a的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1]$　　D．$[-1,+\infty)$

5．从5名男生和3名女生中选出4人参加一项创新大赛.如果男生中的甲和女生中的乙至少要有1人在内，那么不同的选法种数为（　　）

A．15　　B．40　　C．55　　D．70

6．一个正四棱台油槽可以装汽油190L（$1L=1000cm^3$），若它的上、下底面边长分别为60cm和40cm，则它的深度为（　　）

A．25cm　　B．75cm　　C．100cm　　D．150cm

7．当$x\in[0,2\pi]$时，函数$y=\sin x$与$f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega\in\mathbf{N}_{+})$的图象有4个交点，则$\omega$的值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．已知函数$f\left(x\right)$的定义域为R，且$f\left(x+6\right)=2f\left(x\right)$，当$x\in\left(0,6\right]$时，$f\left(x\right)=x^{2}-4x$，则$\sum_{k=1}^{25}f\left(k\right)=$（　）

A．-7　　B．25　　C．57　　D．102

二、多选题

9．在$\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^{5}$的展开式中，下列说法正确的是（　）

A．x的系数为10　　B．第4项的二项式系数为10

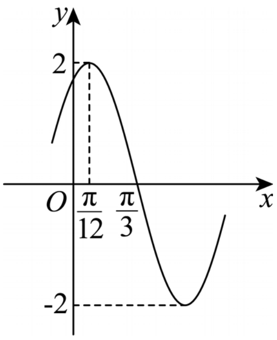
C．没有常数项　　D．各项系数的和为32

10．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2$，$AB=AD=\sqrt{2}$，点P是底面$ABCD$上的一点，且D_1P // 平面A_1C_1B，则（　）

A．$D_1B\perp AC$　　B．$D_1B\perp$平面A_1C_1B

C．D_1P的最小值为$\sqrt{5}$　　D．A_1P+PB的最小值为$\sqrt{10}$

11．如图，函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象，则（　）



A．$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

B．将$f(x)$图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$后得到函数$y=2\sin 2x$的图象

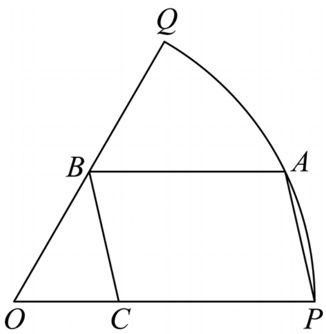
C．$f(x)$在区间$[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}]$上单调递增

D．$f(x)$在区间$[t,t+\frac{\pi}{3}]$上的最大值与最小值之差的取值范围为$[1,2\sqrt{3}]$

三、填空题

12．如果随机变量$X\sim N\left(5,\sigma^{2}\right)$，且$P\left(X\le 3\right)=0.3$，那么$P\left(3\le X\le 7\right)=$____.

13．如图，在半径为2、圆心角为$60°$的扇形的弧PQ上任取一点A，作扇形的内接平行四边形$ABCP$，使点B在OQ上，点C在OP上，则该平行四边形面积的最大值为____.



14．已知函数$f(x)=a\ln x-x^2+b$，若$x\in(0,1)$，$f(x)f(x+1)<0$，则正整数a的最小值为____

.

四、解答题

15．已知函数$f(x)=x^3+ax^2-x-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若$a=-1$，求$f(x)$的极值；

(2)若函数$f(x)$的图象关于点$(-1,f(-1))$对称，求a的值.

16．在$\vee ABC$中，A，B，C的对边分别为a，b，c，且满足$b\cos\left(A-C\right)+\frac{b}{2}=2a\sin B\sin C$.

(1)求B；

(2)若四边形$ABDC$内接于圆O，$\angle ACB=\frac{\pi}{6}$，$AB=2$，求$\triangle ABD$面积的最大值.

17．银行储蓄卡的密码由6位数字组成.小明是一位数学爱好者，记得自己随机用了

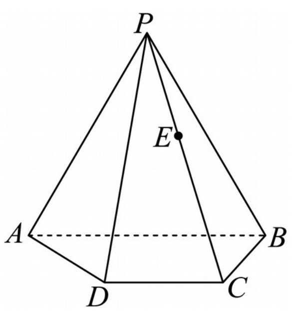
$\pi\left(3.14159\cdots\right)$的前6个数字（1，1，3，4，5，9）设置个人银行储蓄卡密码.

(1)求密码中两个1不相邻的概率；

(2)若密码的前三位出现1的次数为X，求X的分布列和数学期望.

18．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是梯形，$AB//CD$，$BC\perp CD$，平面$PAB\perp$平面

$ABCD$，$PA=PD=AB=2$，$BC=CD=1$.



(1)求证：$PD\perp AB$；

(2)求 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值；

(3)若线段 PC 上存在一点 E，使得截面 ABE 将四棱锥 $P-ABCD$ 分成体积之比为 $5:7$ 的上下两部分，求点 P 到截面 ABE 的距离.

19．已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域都为 R，设直线 l：$y=kx+m$ 是曲线 $y=kx+m$ 的任意一条切线，切点横坐标为 x_0，若 $f(x)\geq kx+m$，当且仅当 $x=x_0$ 时“=”成立，则称函数 $f(x)$ 满足“性质 P”.

(1)判断 $y=x^2$ 是否满足“性质 P”，并说明理由；

(2)若 $f'(x)$ 是单调增函数，证明：$f(x)$ 满足“性质 P”；

(3)若函数 $g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-ax^2$ 满足“性质 P”，求实数 α 的取值范围.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	A	C	B	B	C	BC	ACD
题号	11									
答案	ACD									

1．D

【分析】根据给定条件，利用复数的除法运算即可得解.

【详解】由 $z_1=1+2i$， $z_2=\mathrm{i}$，得 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$，

所以 $\frac{z_1}{z_2}$ 在复平面内对应的点 $(2,-1)$ 位于第四象限.

故选：D

2．B

【分析】解出集合 B，再根据交集含义即可得到答案.

【详解】由题意得 $\begin{cases}x(2-x)\geq 0\\ 2-x\neq 0\end{cases}$，解得 $0\leq x<2$，即 $B=\{x|0\leq x<2\}$，

则 $A\cap B=\{0,1\}$.

故选：B.

3．C

【分析】根据给定条件，利用数量积的运算律列式计算即得.

【详解】由 $\vec{a}+\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，得 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$，而 $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)=2(1^2+3^2)=20$，

因此 $4+|\vec{a}-\vec{b}|^2=20$，所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=4$.

故选：C

4．A

【分析】首先根据奇函数的性质，求 $x>0$ 的解析式，根据二次函数的对称轴列式，即可求解.

【详解】设$x>0$，$-x<0$，因为函数的奇函数，所以$f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，

则$f\left(x\right)=-\left[-\left(-x\right)^2+a\left(-x\right)+1\right]=x^2+ax-1$，

若函数$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，所以$-\frac{a}{2}\geq 1$，得$a\leq -2$.

故选：A

5．C

【分析】根据给定条件，利用排除法，结合组合计数问题列式计算即得.

【详解】从8名学生中任选4名有$C_8^4=70$种，没有甲乙的选法有$C_6^4=15$种，

所以甲乙至少1人参加的不同的选法种数为$70-15=55$.

故选：C

6．B

【分析】代入棱台的体积公式，即可求解.

【详解】设四棱台的高为h，上底面的面积为$3600\,\text{cm}^2$，下底面的面积为1600cm^2，

所以$V=\frac{1}{3}h\left(3600+1600+\sqrt{3600\times 1600}\right)=190000$，解得：$h=75\text{cm}$.

故选：B

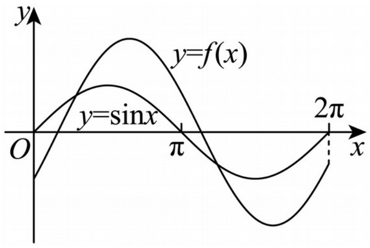
7．B

【分析】在同一坐标系内作出$\omega\in\{1,2,3,4\}$时函数$y=f(x)$与$y=\sin x$在$[0,2\pi]$内的图象，

利用图象的交点个数判断.

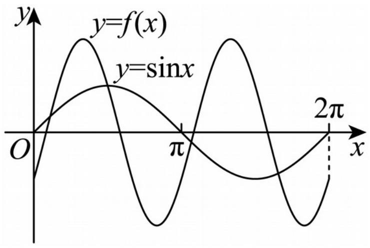
【详解】对于A，当$\omega=1$时，函数$f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$与$y=\sin x$在$[0,2\pi]$内的图象如图，

它们有2个交点，A不是；



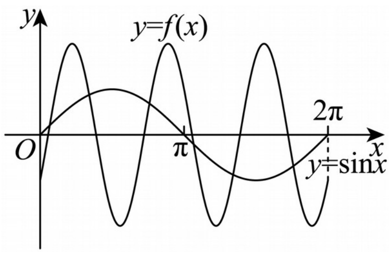
对于B，当$\omega=2$时，函数$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$与$y=\sin x$在$[0,2\pi]$内的图象如图，

它们有4个交点，B是；



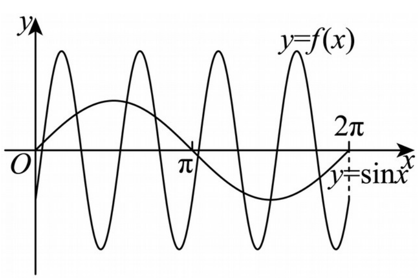
对于C，当$\omega=3$时，函数$f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$与$y=\sin x$在$[0,2\pi]$内的图象如图，

它们有6个交点，C不是；



对于D，当$\omega=4$时，函数$f(x)=2\sin(4x-\frac{\pi}{6})$与$y=\sin x$在$[0,2\pi]$内的图象如图，

它们有8个交点，D不是.



故选：B

8．C

【分析】首先根据具体函数的解析式求$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$的值，再根据抽象函数的关系式，分类求函数值.

【详解】$\sum_{k=1}^{25} f(k)=f(1)+f(2)...+f(25)$，

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=-3+(-4)+(-3)+0+5+12=7$，

$f(7)+f(8)+f(9)+f(10)+f(11)+f(12)=2\left[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\right]=14$

$f(13)+f(14)+f(15)+f(16)+f(17)+f(18)=2\left[f(7)+f(8)+f(9)+f(10)+f(11)+f(12)\right]=28$

$f(19)+f(20)+f(21)+f(22)+f(23)+f(24)=2\left[f(13)+f(14)+f(15)+f(16)+f(17)+f(18)\right]=56,$

$f(25)=2f(19)=4f(13)=8f(7)=16f(1)=-48\cdot$

所以$\sum_{k=1}^{25} f(k)=f(1)+f(2)...+f(25)=7+14+28+56-48=57$

故选：C

9．BC

【分析】利用二项展开式的通项公式得$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r 2^{5-r} 3^{\frac{1}{r}} x^{5-2r}$，再合理赋值即可判断各选项.

【详解】$\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^5$展开式第$r+1$项，

$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(2x)^{5-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r=\mathrm{C}_5^r 2^{5-r} x^{5-r} 3^{-r} x^{-r}=\mathrm{C}_5^r 2^{5-r} 3^{-r} x^{5-2r}$，

对A，令$5-2r=1$，即$r=2$时，$\mathrm{C}_5^2 2^3 \frac{1}{3^2} x=\frac{80}{9} x$，$\therefore x$的系数为$\frac{80}{9}$，A错；

对B，第4项的二项式系数$\mathrm{C}_5^3=10$，B对；

对C，因为$0\le r\le 5, r\in \mathrm{N}$，则$5-2r\ne 0, \therefore$展开式无常数项，C对；

对D，$x=1$时，$\left(2+\frac{1}{3}\right)^5\ne 32, \therefore$各项系数和不是$32$，则D错，

故选：BC.

10．ACD

【分析】A选项，建立空间直角坐标系，写出点的坐标，计算出$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，得到垂直关系；B选项，$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{A_1B}=6\ne 0$，$D_1B$与$A_1B$不垂直，B错误；C选项，设$P(x,y,0)$，求出平面$A_1C_1B$的一个法向量为$\vec{m}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},1\right)$，根据线面平行得到方程，求出$y=\sqrt{2}-x$，表达出$D_1P=\left|\overrightarrow{D_1P}\right|==\sqrt{2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+5}$，得到$D_1P$取得最小值$\sqrt{5}$；D选项，结合C选项，得点$P$在直线$AC$上，将矩形$ACC_1A_1$和等腰直角$\vee ABC$沿着$AC$折到同一平面内，数形结合得到最小值，并利用勾股定理进行求解.

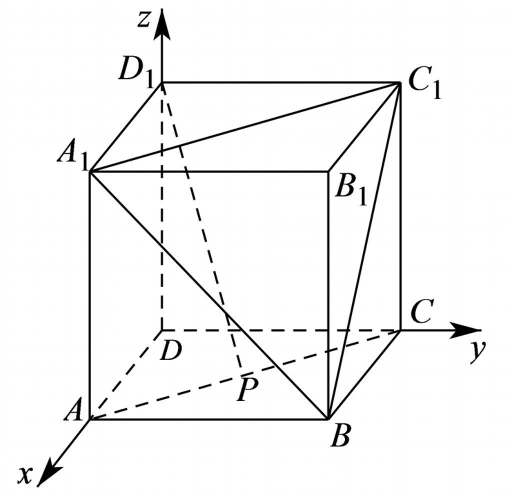
【详解】A选项，以D为坐标原点，DA, DC, DD_1所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，

$D_1(0,0,2), B\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right), A\left(\sqrt{2},0,0\right), C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，

则$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-2\right)\cdot\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)=-2+2=0$，故$D_1B\perp AC$，A正确；

B选项，$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-2\right)\cdot\left(0,\sqrt{2},-2\right)=2+4=6\ne 0$，

所以D_1B与A_1B不垂直，则$D_1B\perp$平面A_1C_1B不成立，B错误；



C选项，设$P(a,b,0)$，$A_1(\sqrt{2},0,2),C_1(0,\sqrt{2},2)$，

设平面A_1C_1B的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=(x,y,z)\cdot(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{2},-2)=\sqrt{2}y-2z=0\end{cases}$，

令$z=1$得，$x=y=\sqrt{2}$，所以$\vec{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，

因为$D_1P\parallel$平面A_1C_1B，所以$\overrightarrow{D_1P}$与$\vec{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$垂直，

即$\overrightarrow{D_1P}\cdot\vec{m}=(a,b,-2)\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2},1)=\sqrt{2}a+\sqrt{2}b-2=0$，

故$b=\sqrt{2}-a$，

$D_1P=\left|\overrightarrow{D_1P}\right|=\sqrt{a^2+b^2+4}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}-a)^2+4}=\sqrt{2a^2-2\sqrt{2}a+6}$

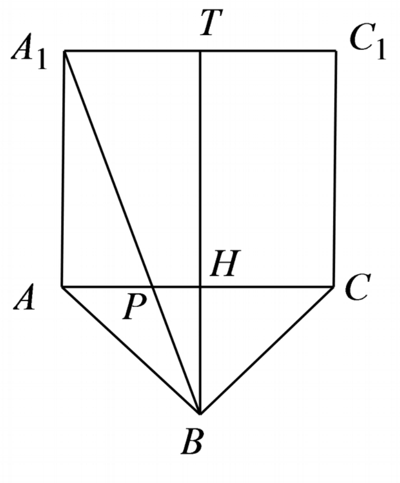
$=\sqrt{2\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+5}$，

故当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，D_1P 取得最小值，最小值为 $\sqrt{5}$，C 正确；

D 选项，由 C 选项，$b=\sqrt{2}-a$，即点 P 在直线 AC 上，

由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2$，故四边形 ACC_1A_1 为正方形，

将矩形 ACC_1A_1 和等腰直角 $\vee ABC$ 沿着 AC 折到同一平面内，如图，



连接 A_1B，与 AC 的交点即为使得 A_1P+PB 最小的点 P，

A_1P+PB 的最小值为 A_1B，过点 B 作 $BT\perp A_1C_1$，交 AC 于点 H，

故 $A_1T=1, TB=TH+BH=2+1=3$，

由勾股定理得 $A_1B=\sqrt{A_1T^2+TB^2}=\sqrt{10}$，D 正确.

故选：ACD

【点睛】方法点睛：立体几何中最值问题，一般可从三个方面考虑：一是构建函数法，即建立所求体积的目标函数，转化为函数的最值问题进行求解；二是借助基本不等式求最值，

几何体变化过程中两个互相牵制的变量（两个变量之间有等量关系），往往可以使用此种方法；三是根据几何体的结构特征，变动态为静态，直观判断在什么情况下取得最值.

11．ACD

【分析】根据给定的函数图象，利用五点法作图求出 $f(x)$，再结合正弦型函数图象与性质逐项分析判断.

【详解】对于 A，观察图象，$A=2$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4(\frac{\pi\pi\pi}{3}-\frac{}{12})=\pi=\frac{2}{\omega}$，解得

$\omega=2$，

由 $f(\frac{\pi}{12})=2$，得 $2\cdot\frac{\pi\pi}{12}+\varphi=\frac{}{2}+2k\pi,\ k\in Z$ ，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $k=0,\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，A 正确；

对于 B，将 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 后得到函数 $f(x-\frac{2\pi2\pi\pi}{3})=2\sin[2(x-\frac{}{3})+\frac{}{3}]=-2\sin 2x$，B 错误；

对于 C，当 $x\in[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$，而正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ 上单调递增，

因此 $f(x)$ 在区间 $[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}]$ 上单调递增，C 正确.

对于 D，函数 $f(x)$ 的图象对称轴为 $x=\frac{\pi\pi}{12}+\frac{k}{2},k\in Z$，

当 t 与 $t+\frac{\pi}{3}$ 关于直线 $x=\frac{\pi\pi}{12}+\frac{k}{2},k\in Z$ 对称时，$f(x)$ 的最大值与最小值的差最小，

此时 $t=-\frac{\pi\pi}{12}+\frac{k}{2}$，$t+\frac{\pi\pi\pi}{3}=\frac{}{4}+\frac{k}{2},k\in Z$，当 k 为偶数时，$f(t)=f(t+\frac{\pi}{3})=1$，而

$f(\frac{\pi\pi}{12}+\frac{k}{2})=2$，

当 k 为奇数时，$f(t)=f(t+\frac{\pi}{3})=-1$，而 $f(\frac{\pi\pi}{12}+\frac{k}{2})=-2$，最大值与最小值的差为 1；

当 $[t,t+\frac{\pi}{3}]\subseteq[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi]$ 或 $[t,t+\frac{\pi}{3}]\subseteq[\frac{7\pi}{12}+k\pi,\frac{13\pi}{12}+k\pi](k\in Z)$ 时，

函数 $f(x)$ 在 $[t,t+\frac{\pi}{3}]$ 上单调，最大值与最小值的差最大，

$|f(t)-f(t+\frac{\pi}{3})|=|2\sin(2t+\frac{\pi}{3})-2\sin[2(t+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]|=|3\sin 2t+\sqrt{3}\cos 2t|$

$=2\sqrt{3}|\sin(2t+\frac{\pi}{6})|\le 2\sqrt{3}$，当 $t=\frac{\pi}{12}$ 或 $t=\frac{7\pi}{12}$ 时均可取到等号，

所以最大值与最小值之差的取值范围为 $[1,2\sqrt{3}]$，D 正确.

故选：ACD

【点睛】思路点睛：给定 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的部分图象求解解析式，一般是

由函数图象的最高（低）点定 A，求出周期定 ω，由图象上特殊点求 φ.

12． 0.4 / $\frac{2}{5}$

【分析】利用正态分布的对称性，即可求解.

【详解】由对称性可知，正态密度曲线的对称轴为 5，所以

$P(3\le X\le 5)=0.5-P(X\le 3)=0.2$，

所以 $P(3\le X\le 7)=2P(3\le X\le 5)=0.4$.

故答案为：0.4