



分形理论

Fractal Theory



土木建筑材料新进展系列讲座

曼德勃罗 (*Benoit B. Mandelbrot*), 数学家,
经济学家, 分形理论的创始人。

1924年生于波兰华沙;

1936年随全家移居法国巴黎, 在那里经历了
动荡的二战时期;

1948年在帕萨迪纳获得航空硕士学位;

1952年在巴黎大学获得数学博士学位;

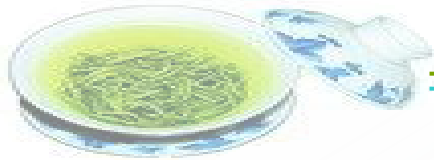
曾经是普林斯顿、日内瓦、巴黎的访问教授,
哈佛大学的“数学实践讲座”的教授,

IBM公司的研究人员和会员。



土木建筑材料新进展系列讲座

课程目的和基本要求



本课程作为用于将学生引入分形理论与应用的研究领域，了解分形理论的基本概念和特征条件，掌握分形维数的分类、特征及确定方法。



土木建筑材料新进展系列讲座



一、基础知识



二、分形的定义与特点



三、分形维数的分类与确定方法



四、分形理论应用



土木建筑材料新进展系列讲座

欧式几何	分形几何
经典几何学（2000多年历史）	现代新兴几何学（30多年历史）
基于特征长度与比例	无特征长度与比例
多适用于人工制品	多适用于自然现象
图形规则	图形不规则
用公式描述	用（递归或迭代）算法描述
图形的结构层次有限	图形的结构层次无限
局部一般不具有整体的信息	局部往往具有整体的信息
图形越复杂，其规则也就越复杂	图形复杂，其规则往往是简单的



请大家带着下面的问题观察下面几幅图片。

- 1、是否可以发现图中的每一朵花中又有另外一朵花？
- 2、图中每一朵花都是形状相似，只是大小不同而已？
- 3、图像可以无限细分，仿佛无穷无尽？



土木建筑材料新进展系列讲座

从上面的图形中我们可以看出，它们具有一个共同的特征，那就是它们的形态是不光滑的，粗糙的，处于无序的，不稳定的，非平衡的和随机的状态之中，部分与整体之间具有相似的特点，而且这些是无法用传统的数学，物理学来描述的，这就是分形。

分形的定义

分形 (Fractal)：本意是不规则的、破碎的、分数的，来源于拉丁文Frangere，它是描述不规则几何形态的有效工具。

曼德勃罗曾经为分形下过两个定义：

① $D_H > D_T$ 的集合A，称为分形集。其中， D_H 为集合A的Hausdoff维数（或分维数）， D_T 为其拓扑维数。一般说来， D_H 不是整数，而是分数。

② 部分与整体以某种形式相似的形，称为分形。

定义①看起来很抽象，也不容易推广。



土木建筑材料新进展系列讲座



标度不变性

标度不变性是指在分形上任选一局部区域，不论将其放大还是缩小，它的结构、形态、性质(功能)、复杂程度、不规则性等各种特性均不会发生变化(或者是在统计上具有这种意义)，通常把具有自相似性的尺度范围称为无标度区，这个范围一般可用特征长度来标志。对于实际的分形体来说，这种标度不变性只在一定的范围内适用。对于无标度区以外，则这种自相似的性质不复存在，因此，分形的概念亦失去意义。人们通常把标度不变性适用的空间称为该分形体的无标度空间，在此范围以外，就不是分形了。



土木建筑材料新进展系列讲座



自相似性

大自然的物体形态千变万化，对于这些不规则的物体形态，我们往往不能用欧式理论描述。但是如果我们从一个形体上任意选取一个局部区域，对其进行放大，再将放大后的图形与原图加以比较，我们发现它们之间形状特征呈现出令人惊讶的自相似性。举一个例子，对于一支花朵，有主干和支干，如果把支干掰下来和主干比较，那么它们之间极为相似，如果再仔细地看一看花心的话，又会发现花瓣和花瓣之间是对称的，而且也是相似的。总而言之，物质的各个部分都或多或少的具有**自相似**结构。

当然，自然界的事物是自相似的，但并不是严格的完全的相似。它们还是有一定差别的。为了定量描述这一差别的大小，我们引入相似度，用来表示一个分形的局部与局部、局部与整体之间的相似程度。根据自相似性的程度，分形可分为**有规分形**和**无规分形**。有规分形是指具有严格的自相似性的分形，比如，三分康托集，**Koch**曲线。无规分形是指具有统计意义上的自相似性的分形，比如，曲折绵长的海岸线，漂浮的云等。



土木建筑材料新进展系列讲座



有规分形实例——三分康托集

1883年，由德国数学家康托(G.Cantor)提出的三分康托集。虽然很容易构造，它却显示出许多最典型的分形特征。它是从单位区间出发，再由这个区间不断地去掉部分子区间的过程。三分康托集的构造过程构造出来的(如右图)。

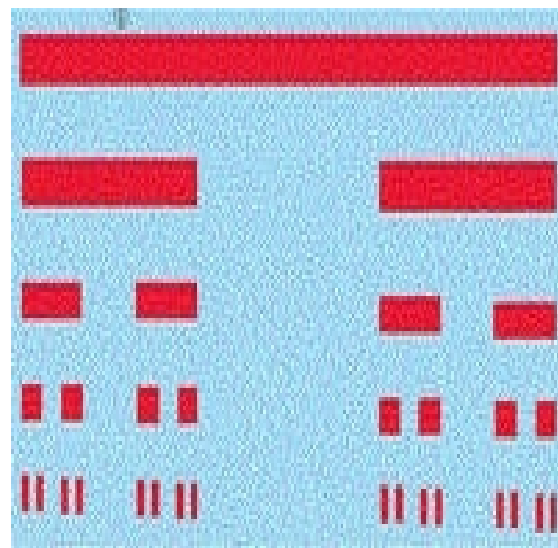
其详细构造过程是：

第一步，把闭区间 $[0, 1]$ 平均分为三段，去掉中间 $1/3$ 段，只剩下两个闭区间 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 。

第二步，再将剩下的两个闭区间各自平均分为三段，同样去掉中间段，这时剩下四段闭区间： $[0, 1/9]$ ， $[2/9, 1/3]$ ， $[2/3, 7/9]$ 和 $[8/9, 1]$ 。

第三步，如此不断的分割下去，重复删除每个小区间中间的 $1/3$ 段，最后剩下的各个小区间段就构成了三分康托集。

三分康托集的分形维数是0.6309。



三分康托集的构造过程

土木建筑材料新进展系列讲座

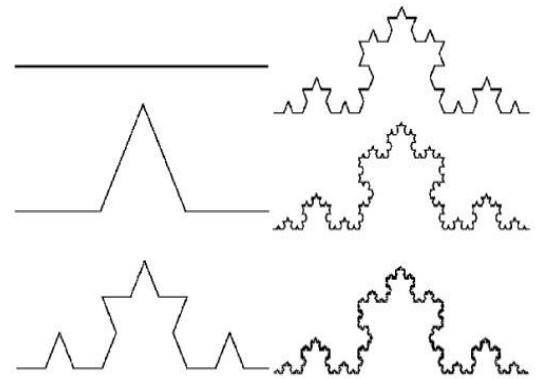


有规分形实例——Koch曲线

1904年，瑞典数学家柯赫构造了“Koch曲线”几何图形。Koch曲线大于一维，具有无限的长度，但是又小于二维，并且生成的图形的面积为零。它和三分康托集一样，是一个典型的分形。根据分形的次数不同，生成的Koch曲线也有很多种，比如三次Koch曲线，四次Koch曲线等。下面以三次Koch曲线为例，介绍Koch曲线的构造方法，其它的可依此类推。

Koch曲线的生成过程

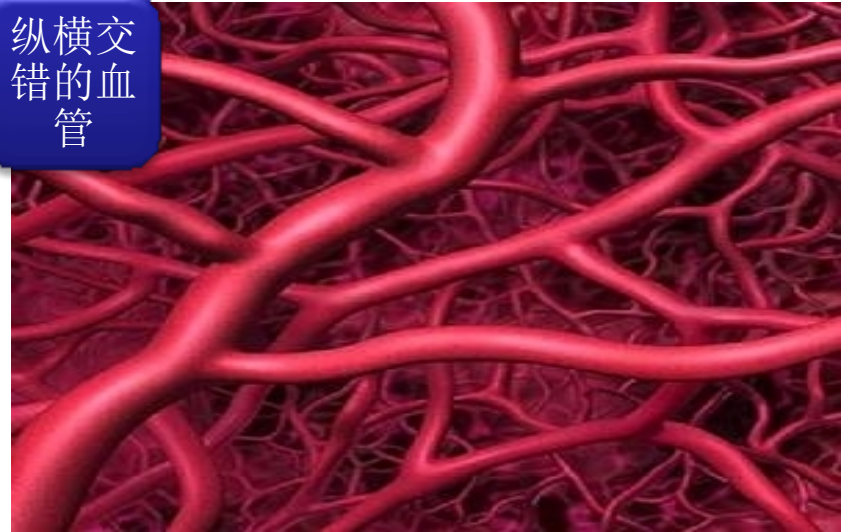
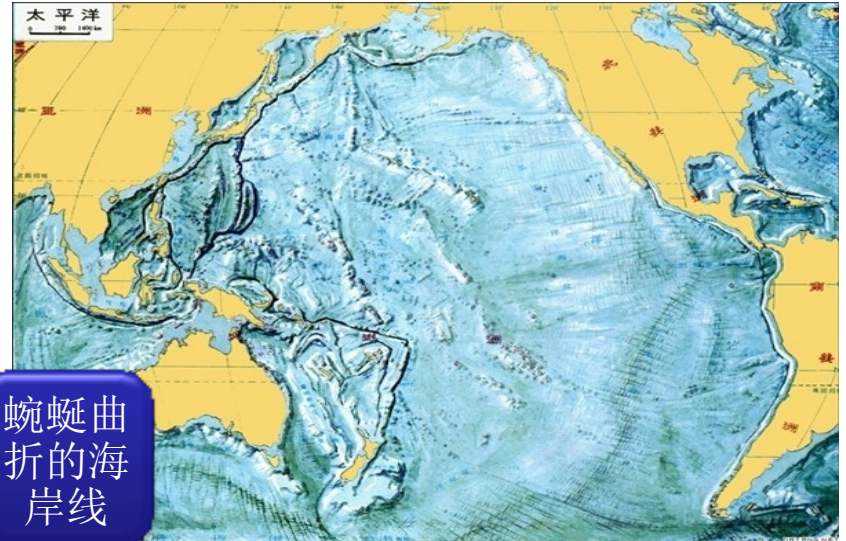
第一步，给定一个初始图形：一条线段；
第二步，将这条线段中间的 $\frac{1}{3}$ 处向外折起；
第三步，按照第二步的方法不断的把各段线段中间的 $\frac{1}{3}$ 处向外折起。这样无限的进行下去，最终即可构造出Koch曲线。



Koch曲线的生成过程



无规分形实例



土木建筑材料新进展系列讲座

分形的确定方法

目前，判断分形与非分形，尚无确定的方法，国内外学者所采用的方法大致有：

- (1) 人工判定法；
- (2) 相关系数检验法；
- (3) 强化系数法；
- (4) 拟合误差法；
- (5) 分维值误差法；
- (6) 总体拟合法等。



土木建筑材料新进展系列讲座

三 分形维数的分类与确定方法

测度与维数是分形理论及应用中最基本的数学概念。

所谓测度就是测定集合大小的一种度量，正如长度用于度量线段、面积用于度量面域以及体积用于度量立方形体等等的情形一样，测度是内容更广泛、形式更一般的特殊集函数。

维数是基于测度上的一个数学概念，用于表示集合占有空间的大小。从某种意义上说，维数是刻画图形占领空间规模和整体复杂性质的量度，是图形最基本的不变量。在欧几里德空间，确定任意一点的位置所需的独立坐标的数目，就是该空间的维数。所以在传统的欧氏几何中，维数都为整数。但是自然界存在着大量不规则物体，这些物体的几何特性用传统的方法根本无法描述，这就促使人们重新考虑维数的定义，从而促成了分形几何的产生和发展。



土木建筑材料新进展系列讲座

分形维数是描述分形的重要参数，能够反映分形的基本特征，但由于侧重面不同，有多种定义和计算方法。常见的有相似维数、豪斯道夫维数、容量维数、计盒维数等，它们有各自不同的应用。

以下介绍几种常见的维数。

(1)、相似维数

一般来说，如果某图形是由把原图缩小为 $1/r$ 的相似的 N 个图形组成，则有：

$$r^D=N, D_s=\log N/\log r$$

的关系成立，则指数 D 称为相似维数， D 可以是整数，也可以是分数。相似维数，通常被定义为具有严格自相似性的维数。



土木建筑材料新进展系列讲座

(2)、容量维数

容量维数是利用相同大小形状的小球或立方体包覆几何对象而定义的维数，由著名苏联数学家科尔莫哥诺夫提出的。设一几何对象 S ，若用直径为 ε 的小球为标准去覆盖 S ，所需的小球的最小数量为 $N(\varepsilon)$ ，则 S 的容量维数为：

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/908103076103006075>