2024届高三“一起考”大联考（模拟一）

数 学

（时量：120分钟　满分：150分）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

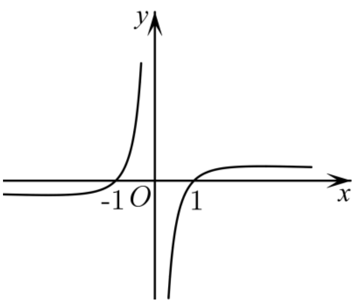
1. 已知$a\in\mathbf{R}$，若$(3+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})$为纯虚数，则$a=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

2. 已知$|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=3,\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，则$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=$（　　）

A. -32　　B. -38　　C. -44　　D. -50

3. 已知函数$f(x)$的图象如图所示，那么该函数可能为（　　）

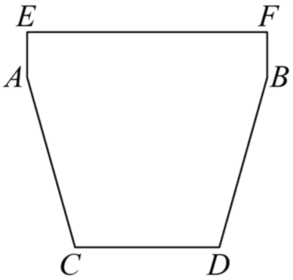


A. $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x|}$　　B. $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{e^x},x>0\\(x+1)e^x,x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln x}{x^2},x>0\\\dfrac{\ln(-x)}{x^2},x<0\end{cases}$

4. 夏日炎炎，某奶茶店推出了新款奶茶——“冰桶”系列，受到了年轻消费者的

喜爱，已知该系列奶茶的容器可以看作是一个圆台与一个圆柱拼接而成，其轴截面如图所示，其中 $EF=20\text{cm}, CD=14\text{cm}$，$AE=3\text{cm}, AC=3\sqrt{26}\text{cm}$，则该容器的容积为（　　）（不考虑材料厚度）



A. $1265\pi\text{cm}^3$　　B. $1365\pi\text{cm}^3$　　C. $1295\pi\text{cm}^3$　　D. $1395\pi\text{cm}^3$

5. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

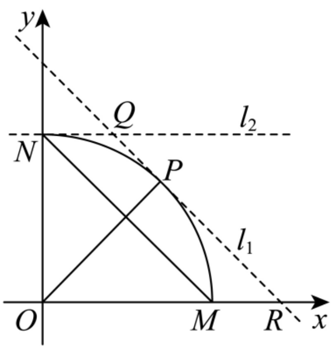
A. $[2, 6]$　　B. $[4, 8]$　　C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

6. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后可以得到 $g(x)$ 的图象，则 $f(x)+g(x)$ 的一个对称中心为（　　）

A. $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$　　B. $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$

7. 如图所示，面积为 π 的扇形 OMN 中，M, N 分别在 x, y 轴上，点 P 在弧 MN 上（点 P 与点 M, N 不重合），分别在点 P, N 作扇形 OMN 所在圆的切线 l_1, l_2，且 l_1 与 l_2 交于点 Q，其中 l_1 与 x 轴交于点 R，则 $|NQ|+|QR|$ 的最小值为（　　）



A. 4　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. 2

8. 设$a=\sin 0.2, b=0.16, c=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

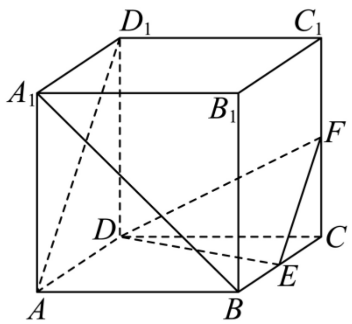
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知$a>0, b>0, a+b=ab$，则（　　）

A. $a+b\le 4$　　B. $ab\ge 4$

C. $a+4b\le 9$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\ge\frac{2}{3}$

10. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别为BC,CC_1的中点，则下列结论正确的是（　　）



A. 直线A_1B与EF所成的角的大小为$60°$

B. 直线AD_1 / / 平面DEF

C. 平面$DEF\perp$平面BCC_1B_1

D. 四面体$D-EFC$外接球的体积与正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积之比为$\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$

11. 玻璃缸中装有 2 个黑球和 4 个白球，现从中先后无放回地取 2 个球．记“第一次取得黑球”为A_1，“第一次取得白球”为A_2，“第二次取得黑球”为B_1，“第二次取得白球”为B_2，则（　　）

A. $P(A_1B_1)=P(A_2B_2)$　　B. $P(A_1B_2)=P(A_2B_1)$

C. $P(B_1|A_1)+P(B_2|A_1)=1$　　D. $P(B_2|A_1)+P(B_1|A_2)>1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 已知全集 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{-3,-1,0,3,4\},B=\{0,1,2,3\}$，则 $(\complement_U B)\cap A=$ __________.

13. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 是 C 上一点，且 $PF_2\perp F_1F_2$，H 是线段 PF_1 上靠近 F_1 的三等分点，且 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PF_1}=0$，则 C 的离心率为__________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 为公差不为 0 的等差数列，$a_3=5$，且 a_2,a_5,a_{14} 成等比数列，设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[\pi]=3,[-1.5]=-2$，记 $b_n=[\log_2 a_n],S_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{100}=$ __________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

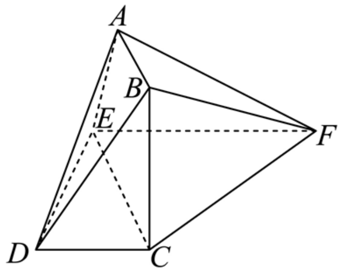
15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且

$\cos A=\dfrac{3}{5},(a+c)(\sin A+\sin C)=b\sin B+3c\sin A$.

（1）证明：$\triangle ABC$ 是锐角三角形；

（2）若 $a=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCE$ 和四边形 $CDEF$ 是全等的直角梯形，且这两个梯形所在的平面相互垂直，其中 $\angle ABC=\angle BCE=\angle CDE=\angle DEF=\dfrac{\pi}{2},CE=EF=2AB=2CD$.



（1）证明：$DE\perp$ 平面 BCD；

（2）求平面 BCD 和平面 ABF 的夹角的余弦值.

17. 已知函数 $f(x)=ax+\ln x+1$，$g(x)=xe^x-2x$.

（1）若 $f(x)$ 的极大值为 1，求实数 a 的值；

（2）若 $a=-1$，求证：$f(x)\le g(x)$.

18. 某市教育局为了调查学生热爱数学是否与学生的年级有关，从全市随机抽取了 50 位高二学生和 $m(m>50)$ 位高三学生进行调查，每位学生对"是否热爱数学"提出"热爱"或"不热爱"的观点，得到如下数据:

观点	高二	高三
热爱	30	20
不热爱	20	

（1）以该 50 名高二学生热爱数学的频率作为全市高二学生热爱数学的概率，从全市的高二学生中随机抽取 3 名学生，记 X 为这 3 名学生中热爱数学的学生人数，求 X 的分布列和期望；

（2）若根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，认为热爱数学与学生的年级有关，求实数 m 的最小值．

附：$\chi^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

19. 已知双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）一个顶点为 $A(-2,0)$，直线 l 过点 $Q(3,0)$ 交双曲线右支于 M，N 两点，记 $\triangle AMN$，$\triangle AOM$，$\triangle AON$ 的面积分别为 S，S_1，S_2．当 l 与 x 轴垂直时，S_1 的值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$．

（1）求双曲线 E 的标准方程；

（2）若 l 交 y 轴于点 P，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MQ}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NQ}$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值；

（3）在（2）的条件下，若 $\dfrac{16}{25}S=\mu S_1+mS_2$，当 $5<\lambda\le 8$ 时，求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $(3+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})$ 为纯虚数，则 $a=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】由复数的运算和纯虚数的概念求解即可.

【详解】因为$\left(3+\mathrm{i}\right)\left(1-a\mathrm{i}\right)=\left(3+a\right)+\left(1-3a\right)\mathrm{i}, a\in\mathbf{R}$，且$\left(3+\mathrm{i}\right)\left(1-a\mathrm{i}\right)$为纯虚数，

所以$\begin{cases}3+a=0,\\1-3a\neq 0,\end{cases}$解得$a=-3$，

故选：A.

2. 已知$\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3,\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，则$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=$（　　）

A. -32　　B. -38　　C. -44　　D. -50

【答案】C

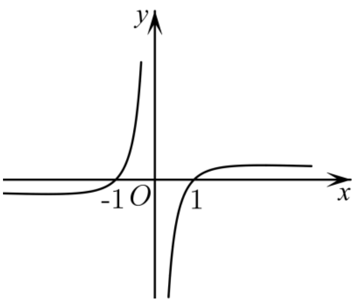
【解析】

【分析】根据题意，由平面向量数量积的运算律代入计算，即可得到结果.

【详解】$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=\vec{a}^2-6\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-6\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=4^2-6\times3^2-4\times3\cos60°=-44$，

故选：C.

3. 已知函数$f(x)$的图象如图所示，那么该函数可能为（　　）



A. $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x|}$

B. $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{e^x},x>0\\(x+1)e^x,x<0\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln x}{x^2},x>0\\\dfrac{\ln(-x)}{x^2},x<0\end{cases}$

【答案】B

【解析】

【分析】由图可知，函数$f(x)$为奇函数，结合函数奇偶性的概念可排除选项A；结合$x\to0^+$时函数的取值可排除C；对比B和D选项，发现当$x\in(0,1)$

时，两个函数对应的函数值的正负性恰好相反，利用对数函数的图象，验证后即可得解.

【详解】解：由图可知，函数$f(x)$为奇函数，而选项A中对应的函数是非奇非偶函数，于是排除选项A；

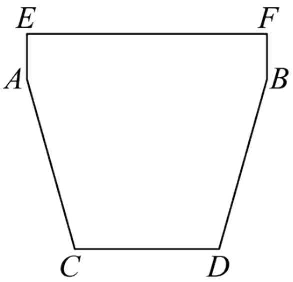
当$x \to 0^+$，$f(x) \to -\infty$，排除C；

当$x \in (0,1)$时，从图象可知，$f(x) < 0$，而对于选项D，$\ln x < 0$，$x^2 > 0$，所以$f(x) > 0$，与图象不符，排除选项D.

故选：B.

【点睛】本题考查根据函数的图象判定可能的函数表达式，涉及对数函数，函数的单调性，奇偶性，一般从函数的单调性、奇偶性和特殊点处的函数值等方面着手考虑，考查学生的逻辑推理能力，属于基础题.

4. 夏日炎炎，某奶茶店推出了新款奶茶——“冰桶”系列，受到了年轻消费者的喜爱，已知该系列奶茶的容器可以看作是一个圆台与一个圆柱拼接而成，其轴截面如图所示，其中$EF = 20\text{cm}, CD = 14\text{cm}$，$AE = 3\text{cm}, AC = 3\sqrt{26}\text{cm}$，则该容器的容积为（　　）（不考虑材料厚度）



A. $1265\pi\text{cm}^3$　　B. $1365\pi\text{cm}^3$　　C. $1295\pi\text{cm}^3$　　D. $1395\pi\text{cm}^3$

【答案】D

【解析】

【分析】求出圆台部分的高，根据圆台以及圆柱的体积公式，即可求得答案.

【详解】由题意得，圆台的高$h = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB - CD}{2}\right)^2} = \sqrt{9 \times 26 - 9} = 15\text{cm}$，

故该容器的容积$V = \pi \times 10^2 \times 3 + \frac{1}{3} \times \left(\pi \times 10^2 + \pi \times 7^2 + \pi \times 10 \times 7\right) \times 15 = 1395\pi\left(\text{cm}^3\right)$，

故选：D.

5. 直线$x + y + 2 = 0$分别与x轴，y轴交于A，B两点，点P在圆$(x-2)^2 + y^2 = 2$上，则$\vee ABP$面积的取值范围是

A. $[2，6]$　　B. $[4，8]$　　C. $\left[\sqrt{2}，3\sqrt{2}\right]$　　D. $\left[2\sqrt{2}，3\sqrt{2}\right]$

【答案】A

【解析】

【详解】分析：先求出A，B两点坐标得到$|AB|$,再计算圆心到直线距离，得到点P到直线距离范围，由面积公式计算即可

详解：$\because$直线$x+y+2=0$分别与x轴，y轴交于A，B两点

$\therefore A(-2,0),B(0,-2)$,则$|AB|=2\sqrt{2}$

$\because$点P在圆$(x-2)^2+y^2=2$上

$\therefore$圆心为（2，0），则圆心到直线距离$d_1=\dfrac{|2+0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

故点P到直线$x+y+2=0$的距离d_2的范围为$\left[\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$

则$S_{\vartriangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|d_2=\sqrt{2}d_2\in[2,6]$

故答案选A.

点睛：本题主要考查直线与圆，考查了点到直线的距离公式，三角形的面积公式，属于中档题.

6. 已知函数$f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，将$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度后可以得到$g(x)$的图象，则$f(x)+g(x)$的一个对称中心为（　　）

A. $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$　　B. $\left(\dfrac{5\pi}{6},0\right)$

C. $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$　　D. $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】先得到$g(x)$的解析式，整体法求解函数的对称中心，得到答案.

【详解】由题意可得：$g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$,

则$f(x)+g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\cos 2x=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{3}{2}\cos2x=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}, k\in Z$,

当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{3}$，故 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 是 $f(x)+g(x)$ 的一个对称中心

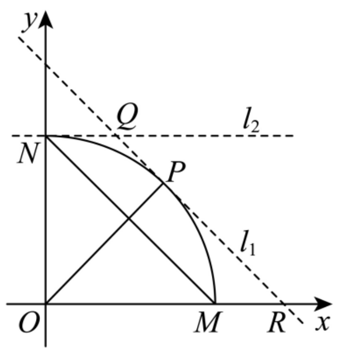
由 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow k=\frac{1}{3}\notin Z$，故 A 错；

由 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow k=\frac{4}{3}\notin Z$，故 B 错

由 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow k=-\frac{2}{3}\notin Z$，故 C 错；

故选：D.

7. 如图所示，面积为 π 的扇形 OMN 中，M,N 分别在 x,y 轴上，点 P 在弧 MN 上（点 P 与点 M,N 不重合），分别在点 P,N 作扇形 OMN 所在圆的切线 l_1,l_2，且 l_1 与 l_2 交于点 Q，其中 l_1 与 x 轴交于点 R，则 $|NQ|+|QR|$ 的最小值为（　　）



A. 4　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. 2

【答案】B

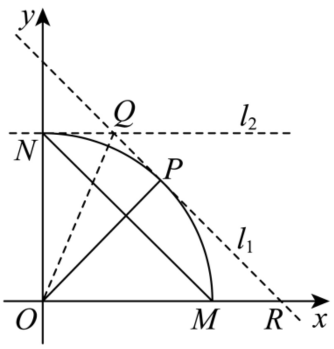
【解析】

【分析】利用扇形面积公式求出 $|OP|$，设 $\angle POM=\theta$，利用三角函数的定义和切线的性质用 θ 和 $|OP|$ 表示 $|NQ|$，$|QP|$，$|PR|$，再根据基本不等式求最小值即可.

【详解】解析：因为扇形 OMN 的面积为 π，即 $\frac{1}{4}\pi|OP|^2=\pi$，所以 $|OP|=2$，

设 $\angle POM=\theta$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OPR$ 中，$|PR|=2\tan\theta$，

连接 OQ，根据切线的性质知 $|QN|=|QP|, \angle NOQ=\frac{1}{2}\angle NOP=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$,



则在$\mathrm{Rt}\triangle NOQ$中，$\left|NQ\right|=2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$，

所以$\left|NQ\right|+\left|QR\right|=\left|PR\right|+2\left|NQ\right|=2\tan\theta+4\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right),\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

令$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$，则$\theta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$，且$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

所　以　原　式　$=2\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+4\tan\alpha=\frac{2}{\tan2\alpha}+4\tan\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}+4\tan\alpha=3\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$

$\geq2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha}\cdot3\tan\alpha}=2\sqrt{3}$，

当且仅当$3\tan\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$，即$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立，

又$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以$\alpha=\frac{\pi}{6}=\theta=\angle POM$时，$\left|NQ\right|+\left|QR\right|$取得最小值，为$2\sqrt{3}$，

故选：B

8. 设$a=\sin0.2,b=0.16,c=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】

【分析】构造$f\left(x\right)=\sin x-\left(x-x^2\right),x\in\left[0,0.2\right]$，二次求导，得到单调性，得到$\sin0.2-0.16>0$，再变形得到$c=\frac{1}{2}\ln\frac{1+0.2}{1-0.2}$，故构造$h\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right]-\sin x,x\in\left[0,0.2\right]$，求导得到其单调性，比较出$c>a$，得到答案.

【详解】设 $f\left(x\right)=\sin x-\left(x-x^2\right),x\in\left[0,0.2\right],f'\left(x\right)=\cos x-1+2x$，

设 $g\left(x\right)=f'\left(x\right),g'\left(x\right)=-\sin x+2>0$，所以 $g\left(x\right)\geq g\left(0\right)=0$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,0.2\right]$ 上单调递增，

所以 $f\left(0.2\right)=\sin 0.2-\left(0.2-0.2^2\right)=\sin 0.2-0.16>f\left(0\right)=0$，即 $a>b$.

根据已知得 $c=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1.2}{0.8}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+0.2}{1-0.2}$，

可设 $h\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right]-\sin x,x\in\left[0,0.2\right]$，

则 $h'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\cos x=\frac{1}{1-x^2}-\cos x>0$，

所以函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left[0,0.2\right]$ 上单调递增，

所以 $h\left(0.2\right)>h\left(0\right)=0$，即 $c>a$.

综上，$c>a>b$.

故选：D.

【点睛】构造函数比较大小是高考热点和难点，结合代数式的特点，选择适当的函数，通过导函数研究出函数的单调性，从而比较出代数式的大小.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $a>0,b>0,a+b=ab$，则（　　）

A. $a+b\leq 4$

B. $ab\geq 4$

C. $a+4b\leq 9$

D. $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\geq\frac{2}{3}$

【答案】BD

【解析】

【分析】利用基本不等式逐一分析各选项即可得解.

【详解】解析：对于 A 和 B，因为 $a+b=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，所以 $a+b\geq 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，

$a+b=ab\geq 2\sqrt{ab}$，则 $ab\geq 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，故 A 错误，B 正确；

对于 C，若 $a+b=ab$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，

所以 $a+4b=\left(a+4b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 5+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=9$，

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{4b}{a}$，即 $b=\frac{3}{2},a=3$ 时，等号成立，故 C 错误；

对于 D，若 $a+b=ab$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，

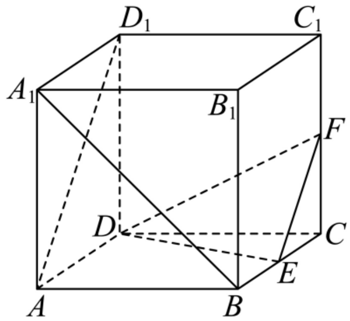
所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}=\left(1-\frac{1}{b}\right)^2+\frac{2}{b^2}=\frac{3}{b^2}-\frac{2}{b}+1=3\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$，

由 $a>0,b>0$ 及 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，可知 $0<\frac{1}{b}<1$，则当 $\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$，

即 $a=\frac{3}{2},b=3$ 时，$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}$ 取得最小值 $\frac{2}{3}$，故 D 正确.

故选：BD.

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 BC,CC_1 的中点，则下列结论正确的是（　　）



A. 直线 A_1B 与 EF 所成的角的大小为 $60°$

B. 直线 AD_1 / / 平面 DEF

C. 平面 $DEF\perp$ 平面 BCC_1B_1

D. 四面体 $D-EFC$ 外接球的体积与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积之比为 $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据异面直线所成角可判定 A 选项，根据线面平行的判定定理可判定 B 选项，根据面面垂直的性质定理可判定 C 选项，根据正方体的体积及外接球的体积公式可判定 D 选项.

【详解】解析：对于 A：连接 BC_1,C_1A_1，如图，由正方体的结构特征知，$\left|BC_1\right|=\left|A_1B\right|=\left|A_1C_1\right|$，