2023-2024 学年高二上册数学期末试卷 7（苏教版）

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_3 \square a_{16} \square 9$，$S \square \square 10$，则数列$\{a_n\}$的公差为（　　）

A．1　　　B．$\square 4$　　　C．4　　　D．$\square 1$

2．椭圆C：$\frac{x^2}{16}\square\frac{y^2}{9}\square 1$的左焦点为$F$，椭圆上的点$P_1$与$P_2$关于坐标原点对称，则$|PF|\square|PF|$的值是（　　）

A．3　　　B．4　　　C．6　　　D．8

3．等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3 \square 3\ _1$，则$\frac{a}{a} =$（　　）

A．$\square 8$　　　B．8　　　C．1 或$\square 8$　　　D．$\square$或 8

4．下列求导运算正确的是（　　）

A．$\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)\square\cos\frac{\pi}{5}$　　　B．$\square x^2\cos x\square\ 2\sin x\square 3x^2\sin x$

C．$(\tan x)\square\square\frac{1}{\sin^2 x}$　　　D．$\left(\ln 2x\square 1\right)\square\frac{2}{2x\square 1}$

5．已知圆C：$x^2\square y^2\square 2$，点$A(m, m\square 3)$，则点 A 到圆C上点的最小距离为（　　）

A．1　　　B．2　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

6．若函数$f(x)\square\frac{1}{3}x^3\square 2x^2\square 3ax\square 1$在$\left(\square\frac{1}{2},\ \right)$上有且仅有一个极值点，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$a\square\square\frac{3}{4}$　　　B．$a\square\square\frac{5}{3}$　　　C．$\square\frac{5}{3}\square a\square\square\frac{3}{4}$　　　D．$\square\frac{5}{3}\square a\square\frac{3}{4}$

7．德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一，他从几何问题出发，引进微积分概念.在研究切线时认识到，求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值和横坐标的差值，以及当此差值变成无限小时它们的比值，这也正是导数的几何意义．设$f\square(x)$是函数$f(x)$的导函数，若$f'(x)>0$，且对$\square x_1, x_2\in R$，且$x_1\square x_2$总有$\frac{f(x_1)\square f(x_2)}{2}\square f\left(\frac{x_1\square x_2}{2}\right)$，则下列选项正确的是（　　）

A．$f(\square)\square f(e)\square f(\square)$　　　B．$f'(\square)\square f'(\square)\square f'(\square)$

C．$f'(\square)\square f(\square)\square f(\square)\square f'(\square)$　　　D．$f'(\square)\square f(\square)\square f(\square)\square f'(\square)$

8．已知F_1，F_2是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}\square\frac{y^2}{b^2}\square 1\ (a\square 0, b\square 0)$的左、右焦点，点$A$是$C$的左顶点，$O$为坐标原点，以$OF_2$为直径的圆交$C$的一条渐近线于$O$、$P$两点，以$OP$为直径的圆与$x$轴交于$O$、$M$两点，且$PO$平分$\square APM$，则双曲线

C 的离心率为（ ）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

二、多选题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．全对得 5 分，少选得 3 分，多选、错选不得分）

9．以下四个命题正确的有（ ）

A．若直线 a□x y□4□0 在 x 轴上的截距为□，则实数 a□2

B．若直线 y□2□k x□1 不经过第四象限，则 k 1

C．直线 m□x□y □ 0□m□R□与圆 x^2□y^2□4 相离

D．直线 x□ y □ 0 关于点(2, 1) 对称的直线方程为 x □ y □9□0

10．设等差数列 □ 前 n 项和为 S_n，公差 d □0，若 S_9□S_{20}，则下列结论中正确的有（ ）

A．S_{30}□0　　B．当 n□15 时，S_n 取得最小值

C．a_{10}□a_{22}□0　　D．当 S_n□0 时，n 的最小值为 29

11．双曲线上 $\frac{y^2}{9}$□$\frac{x^2}{16}$□1 的焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，下列结论正确的是( )

A．该双曲线的离心率为 $\frac{5}{4}$　　B．该双曲线的渐进线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$

C．若 PF_1□PF_2，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 16　　D．点 P 到两渐近线的距离乘积 $\frac{144}{25}$

12．关于函数 f□x□，g□□□$\ln x$，下列说法正确的是（ ）

A．对任意的 x□0，g□□ □ □1

B．对任意的 x□0，f□□ □ $\frac{1}{□x}$

C．函数 y□$\frac{f□}{x}$□x□g□□的最小值为 e 1

D．若存在 x□0 使得不等式 a $\frac{g□}{□f}$□成立，则实数 a 的最大值为 $\frac{1}{e}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．等比数列 □ 的前 n 项和为 S_n□ 3^{n} □r，则 的值为_____．

14．写出一个同时具有性质①②的函数 f x ___________．（ f□ 不是常值函数）① f□ 为偶函数；② f□x□□□f□□．

15．已知直线 l $mx\square y\square m\square3\square0$ 与圆 C $x^2\square y^2\square4x\square4y\square10\square0$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为__________．

16．已知点 A 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}\square\frac{y^2}{b^2}\square1(a\square b\square0)$ 的左顶点，过点 A 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于另一点 P（点 P 在第一象限）.以原点 O 为圆心，$|OP|$ 为半径的圆在点 P 处的切线与 x 轴交于点 Q.若 $|PA|\geq|PQ|$，则 $\frac{a^2}{b^2}$ 的最大值是__.

四、解答题（本大题共 6 小题，第 17-18 题每小题 10 分，第 19-21 题每小题 12 分，第 22 题 14 分，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．已知圆 C 的圆心在直线 $y\square\square x$ 上，且过点 $(2,\ 1),(0,\ 3)$

（1）求圆 C 的方程；

（2）已知直线 l 经过原点，并且被圆 C 截得的弦长为 2，求直线 l 的方程.

18．已知等差数列 $\square$ 中，$a_2\square a_{10}\square22$，$a\square15$，等比数列 $\square b_n\square$ 中，$b_1\square a_2$，$b_4\square a_{40}\square2$．

(1)求数列 $\square$ 的通项公式；

(2) 记 $c_n\square\frac{\log b_n\square3}{a_n\square4}$，求 c_n 的最小值．

19．已知函数 $f(x)=ax-2\ln x$．

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)设函数 $g(x)=x-2$，若存在 $x\in\left[1,e^{3}\right]$，使得 $f(x)\le g(x)$，求 a 的取值范围．

20．等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0，满足 $a_5=13$，a，a，a_6成等比数列，数列 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{1}{\log_2 b_1}+\frac{2}{\log_2 b_2}+\frac{3}{\log_2 b_3}+\cdots+\frac{n}{\log_2 b_n}=\frac{n}{2}.$$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 经过点 $P(\sqrt{2},1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)是否存在圆 $\odot O$：$x^2+y^2=r^2$，使得 $\odot O$ 的任意切线 l 与椭圆交于 A，B 两点，都有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$．若存在，求出 r 的值，并求此时△AOB 的面积 S 的取值范围；若不存在，请说明理由．

22．已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\frac{1}{2}ax^2, a\in R$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(3)若 0 不是函数 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值.

答案解析

一、单选题

1．在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_3+a_{16}=9$，$S_5=-10$，则数列$\{a_n\}$的公差为（　　）

A．1　　　　B．-4　　　　C．4　　　　D．-1

【答案】A

【分析】由已知条件列方程组求解即可

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_3+a_{16}=9$，$S_5=-10$，

所以$\begin{cases}a_1+2d+a_1+15d=9\\5a_1+10d=-10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=-4\\d=1\end{cases}$，

故选：A

2．椭圆C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的左焦点为$F$，椭圆上的点$P_1$与$P_2$关于坐标原点对称，则$|P_1F|+|P_2F|$的值是（　　）

A．3　　　　B．4　　　　C．6　　　　D．8

【答案】D

【分析】令椭圆C的右焦点F'，由已知条件可得四边形P_1FP_2F'为平行四边形，再利用椭圆定义计算作答.

【解析】令椭圆C的右焦点F'，依题意，线段P_1P_2与FF'互相平分，于是得四边形P_1FP_2F'为平行四边形，

因此$|P_2F|=|P_1F'|$，而椭圆C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的长半轴长$a=4$，

所以$|P_1F|+|P_2F|=|P_1F|+|P_1F'|=2a=8$.

故选：D

3．等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3=3a_1$，则$\frac{a_4}{a_1}=$（　　）

A．-8　　　　B．8　　　　C．1或-8　　　　D．-1或8

【答案】C

【分析】根据等比数列的前n项和公式及等比数列通项公式即可求解.

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则

因为$S_3=3a_1$，所以$a_1+a_2+a_3=3a_1$，

即$q^2+q-2=0$，解得$q=1$或$q=-2$，

所以$\frac{a}{a}={}^{3}=1$或 .

故选：C.

4．下列求导运算正确的是（　　）

A．$\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)'=\cos\frac{\pi}{5}$　　　　B．$\left(x^2\cos x\right)'=2x\sin x-3x^2\sin x$

C．$\left(\tan x\right)'=\frac{1}{\sin^2 x}$　　　　D．$\left[\ln\left(2x+1\right)\right]'=\frac{2}{2x+1}$

【答案】D

【分析】利用基本初等函数、复合函数以及导数的运算法则可判断各选项的正误.

【解析】对于A选项，$\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)'=0$，A错；

对于B选项，$\left(x^2\cos x\right)'=2x\cos x-x^2\sin x$，B错；

对于C选项，$\left(\tan x\right)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$，C错；

对于D选项，$\left[\ln\left(2x+1\right)\right]'=\frac{2}{2x+1}$，D对.

故选：D.

5．已知圆C：$x^2+y^2=2$，点$A\left(m,m-3\right)$，则点A到圆C上点的最小距离为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【分析】写出圆C的圆心和半径，求出$|AC|$距离的最小值，

再结合圆外一点到圆上点的距离最小值的方法即可求解.

【解析】由圆C：$x^2+y^2=2$，得圆心$C\left(0,0\right)$，半径r为$\sqrt{2}$，

所以$|AC|=\sqrt{m^2+\left(m-3\right)^2}=\sqrt{2m^2-6m+9}$

$=\sqrt{2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以点A到圆C上点的最小距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C.

6．若函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3ax+1$在$\left(\frac{1}{2},\right.$上有且仅有一个极值点，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$a<-\frac{3}{4}$　　B．$a<-\frac{5}{3}$　　C．$-\frac{5}{3}<a<-\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{5}{3}$ [illegible] a [illegible] $-\frac{3}{4}$

【答案】C

【分析】根据极值点的意义,可知函数 $f(x)$ 的导函数在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有且仅有一个零点.结合零点存在定理,即可求得 a 的取值范围.

【解析】函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3ax+1$

则 $f'(x)=x^2+4x+3a$

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有且仅有一个极值点

即 $f'(x)=x^2+4x+3a$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有且仅有一个零点

根据函数零点存在定理可知满足 $f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1)<0$ 即可

代入可得 $\left(\frac{9}{4}+3a\right)(5+3a)<0$

解得 $-\frac{5}{3}<a<-\frac{3}{4}$

故选:C

【点睛】本题考查了函数极值点的意义,函数零点存在定理的应用,属于中档题.

7．德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一，他从几何问题出发，引进微积分概念.在研究切线时认识到，求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值和横坐标的差值，以及当此差值变成无限小时它们的比值，这也正是导数的几何意义．设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，若 $f'(x)>0$，且对 $\forall x_1$，$x_2\in R$，且 $x_1\neq x_2$ 总有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，则下列选项正确的是（　　）

A．[illegible]　　B．[illegible]

C．[illegible]　　D．[illegible]

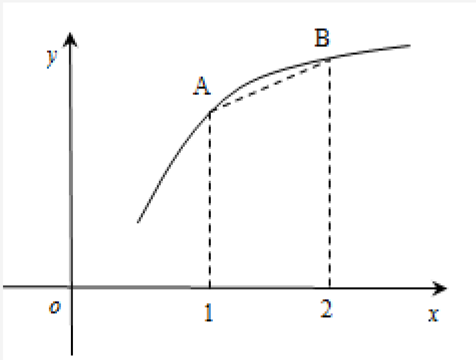
【答案】D

【分析】由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 R 上单调递增，并且由 $f(x)$ 的图象是向上凸，进而判断选项.

【解析】由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 R 上单调递增，因为 [illegible] >2，所以 [illegible]，

故 A 不正确；

对 $\forall x_1$，$x_2\in R$，且 $x_1\neq x_2$，总有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，可得函数的图象是向上凸，可用如图的图象来表示，



由 $f'(x)$ 表示函数图象上各点处的切线的斜率，由函数图象可知，

随着 x 的增大，$f(x)$ 的图象越来越平缓，即切线的斜率越来越小，

所以 $f'(1)>f'(2)$，故 B 不正确；

$f(2)-f(1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=k_{AB}$，表示点 $(1,f(1))$ 与点 $(2,f(2))$ 连线的斜率，

由图可知 $f'(2)<k_{AB}<f'(1)$，所以 D 正确，C 不正确.

故选：D.

【点睛】本题考查以数学文化为背景，导数的几何意义，根据函数的单调性比较函数值的大小，属于中档题型.

8．已知 F_1，F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 A 是 C 的左顶点，O 为坐标原点，以 OF_2 为直径的圆交 C 的一条渐近线于 O、P 两点，以 OP 为直径的圆与 x 轴交于 O，M 两点，且 PO 平分 $\angle APM$，则双曲线 C 的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　　B．2　　　C．$\sqrt{3}$　　　D．3

【答案】B

【分析】由直径所对圆周角是直角，结合双曲线的几何性质和角平分线定义可解.

【解析】由圆的性质可知，$F_2P\perp OP$，$OM\perp PM$，所以 $|F_2P|=b$，$|OP|=a$

因为 $|OA|=a$，所以 $\angle PAO=\angle APO$

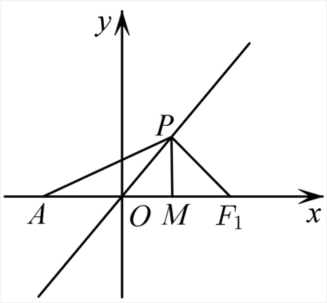
又因为 PO 平分 $\angle APM$，所以 $\angle APM=2\angle PAO$，

由 $\angle APM+\angle PAO=90^\circ$，得 $\angle PAO=30^\circ$，

所以 $\angle POM=2\angle PAO=60^\circ$，即 $\frac{b}{a}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

所以 $e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+3}=2$

故选：B



二、多选题

9．以下四个命题正确的有（　　）

A．若直线 $a x□y□4□0$ 在 x 轴上的截距为 $\frac{□}{2}$，则实数 $a□2$

B．若直线 $y□2□k x□1$ 不经过第四象限，则 $k□1$

C．直线 $mx□y□□0(m□R)$ 与圆 $x^2□y^2□4$ 相离

D．直线 $x□y□□0$ 关于点 $(2,1)$ 对称的直线方程为 $x□y□9□0$

【答案】AD

【分析】A：利用代入法进行求解判断即可；

B：根据直线的斜截式方程进行求解判断即可；

C：利用直线所过的定点，结合圆的性质进行判断即可；

D：根据平行线间距离公式进行求解判断即可

【解析】A：因为直线 $a x□y□4□0$ 在 x 轴上的截距为 $\frac{□}{2}$，

所以有 $□a□\frac{□}{2}□0□4□0□a□2$，因此本选项说法正确；

B：$y□2□k x□1□y□k x□2□k$，因为直线 $y□2□k x□1$ 不经过第四象限，

所以有 $□\begin{cases}□□0\\ k□0\end{cases}□k□0$，因此本选项说法不正确；

C：直线 $mx□y□0(m□R)$ 过定点 $(0,1)$，因为 $0^2□1^2□4$，

所以点 $(0,1)$ 在圆 $x^2□y^2□4$ 内，因此该直线与圆 $x^2□y^2□4$ 相交，所以本选项说法不正确；

D：因为直线 $x□y□0$ 关于点 $(2,1)$ 对称的直线与直线 $x□y□0$ 平行，

所以设对称直线方程为：$x□2y□c□0(c□1)$，于是有：

$\frac{|2\times1-2\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2\times1-2\times(-1)-c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\Rightarrow|c-4|=5\Rightarrow c=-9$，或 $c=-1$（舍去）

即 $x-2y-9=0$，所以本选项说法正确，

故选：AD

10．设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，公差 $d>0$，若 $S_9=S_{20}$，则下列结论中正确的有（　　）

A．$S_{30}=0$

B．当 $n=15$ 时，S_n 取得最小值

C．$a_{10}+a_{22}>0$

D．当 $S_n>0$ 时，n 的最小值为 29

【答案】BC

【分析】根据等差数列的前 n 项和公式，结合该数列的单调性逐一判断即可.

【解析】由 $S_9=S_{20}\Rightarrow 9a_1+\frac{1}{2}\times9\times8d=20a_1+\frac{1}{2}\times20\times19d\Rightarrow a_1=-14d<0\Rightarrow a_{15}=0$.

A：因为 $d>0$，

所以有 $S_{30}=30a_1+\frac{1}{2}\times30\times29d=30\times(-14d)+435d=15d>0$，因此本选项说法不正确；

B：因为 $d>0$，所以该等差数列是单调递增数列，因为 $a_{15}=0$，所以当 $n=15$，或 $n=14$ 时，S_n 取得最小值，故本选项说法正确；

C：因为 $d>0$，所以该等差数列是单调递增数列，因为 $a_{15}=0$，

所以 $a_{10}+a_{22}=2a_{16}=2(a_{15}+d)=2d>0$，因此本选项说法正确；

D：因为 $d>0$，$n\in N^*$，

所以由 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=n(-14d)+\frac{1}{2}n(n-1)d=\frac{1}{2}dn(n-29)>0$，

可得：$n>29, n\in N^*$，因此 n 的最小值为 30，所以本选项说法不正确，

故选：BC

11．双曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 的焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，下列结论正确的是(　　)

A．该双曲线的离心率为 $\frac{5}{4}$

B．该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$

C．若 $PF_1\perp PF_2$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 16

D．点 P 到两渐近线的距离乘积为 $\frac{144}{25}$

【答案】BCD

【分析】A：离心率 $e=\frac{c}{a}$；