# 第三节　极限

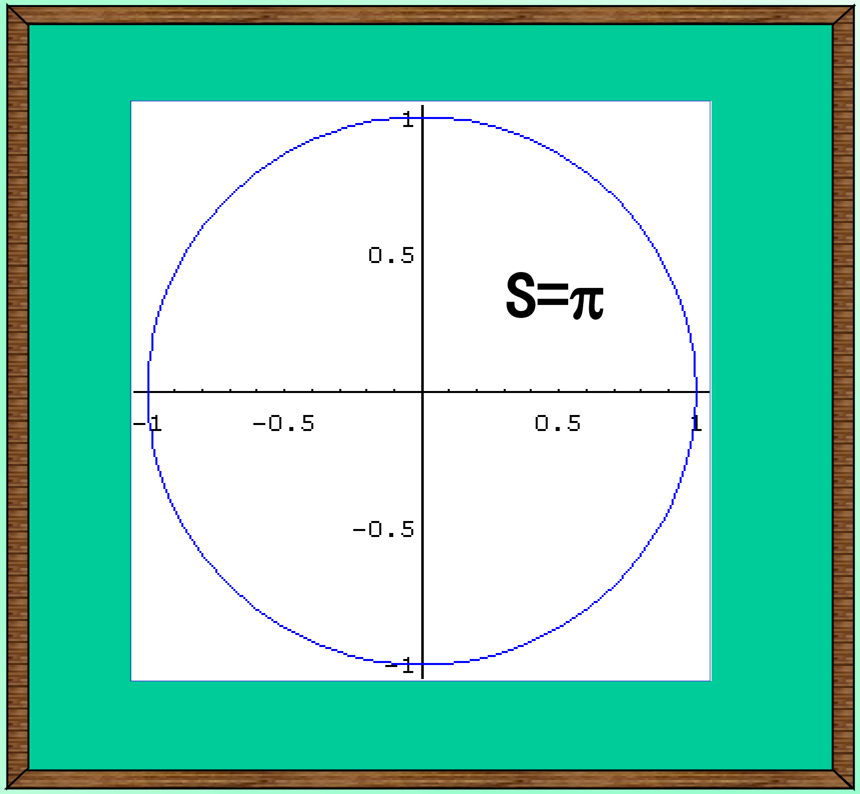
## 一、数列的极限的概念

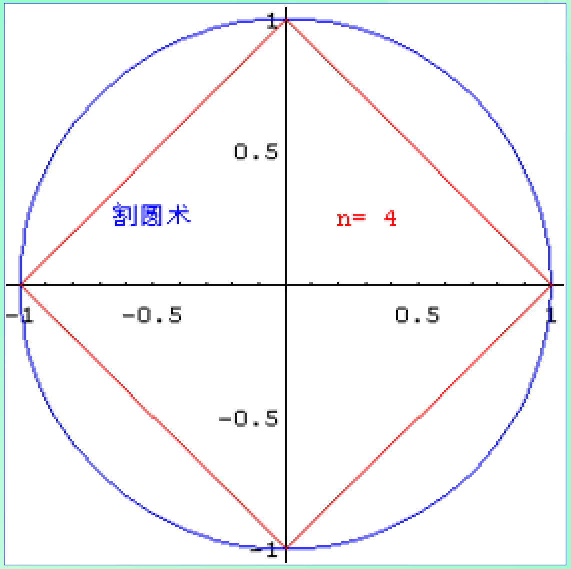
### 1、概念的引入

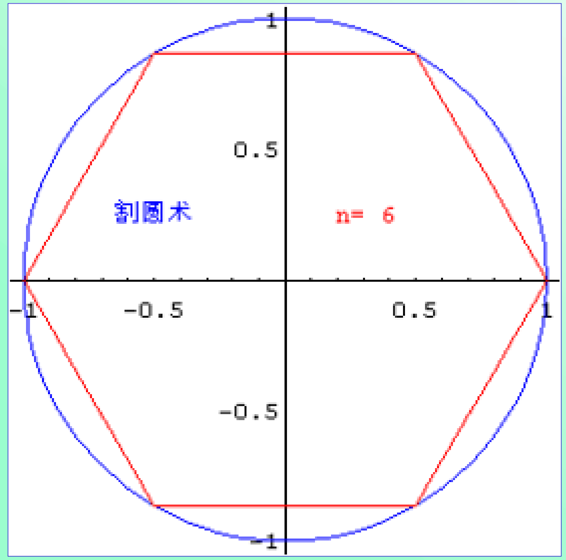
**割圆术：**

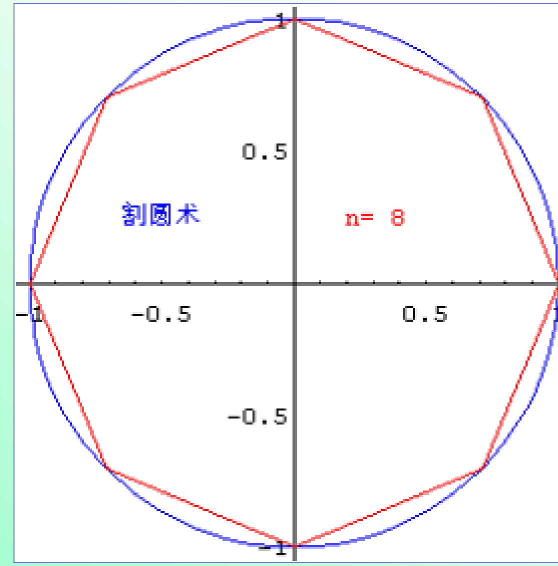
“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

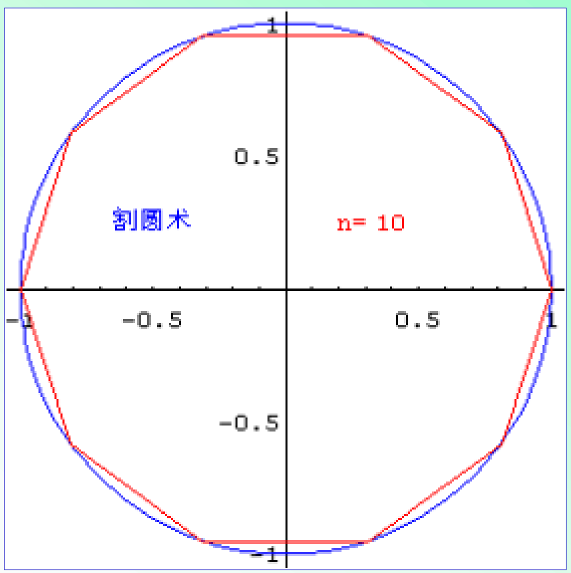
——刘徽

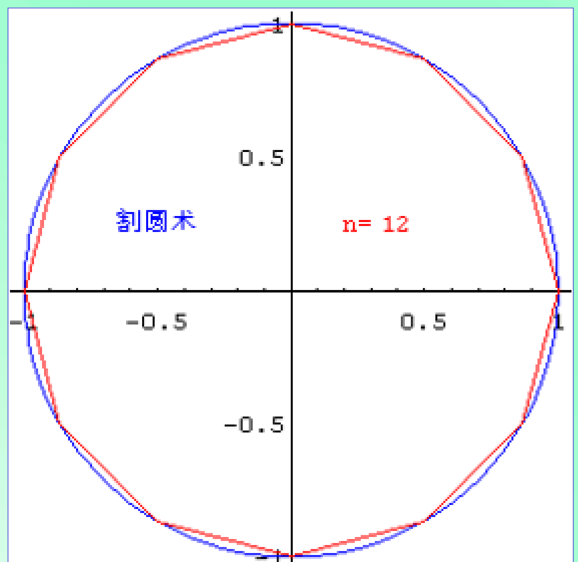


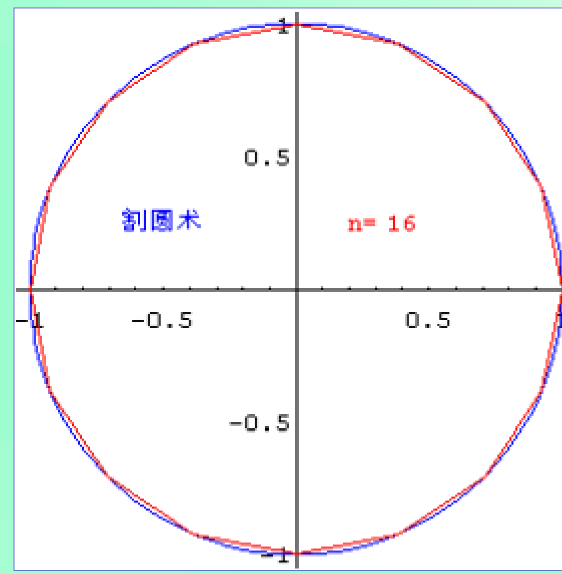

1
0.5
割圆术
n= 4
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1


1
0.5
割圆术
n= 6
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1


1
0.5
割圆术
n= 8
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1


1
0.5
割圆术
n= 10
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1


1
0.5
割圆术
n= 12
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1

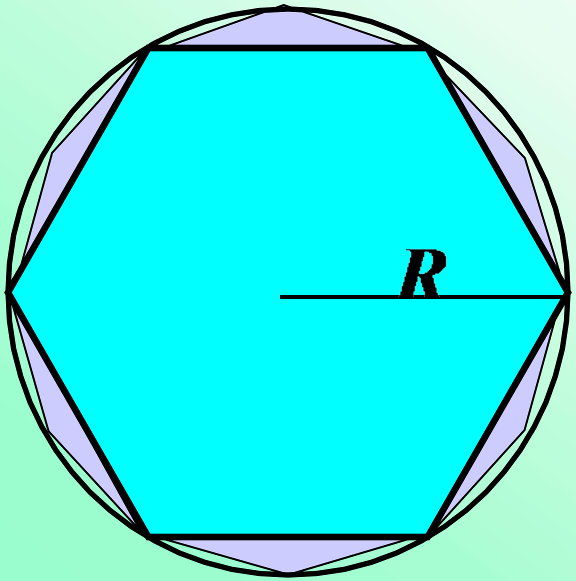

1
0.5
割圆术
n= 16
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1

正六边形的面积 $A_1$

正十二边形的面积 $A_2$

I I  I I

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 $A_n$




$A_1, A_2, A_3, \mathrm{L}\;, A_n, \mathrm{L}\quad \Rightarrow\quad S$

$$A_n = 3\times 2^{(n-1)} r^2 \sin\alpha,\quad r = 1,\quad \alpha = \frac{2\pi}{6\times 2^{(n-1)}}.$$

## 截丈问题：

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

第一天截下的杖长为 $X_1=\frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$;

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

第$n$天截下的杖长总和为 $X_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$;

$$X_n=1-\frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

## 2、数列的定义

定义:按自然数$1,2,3,\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为<u>无穷数列</u>,简称<u>数列</u>.其中的每个数称为数列的<u>项</u>,$x_n$称为<u>通项(一般项)</u>.数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$; $\{2^n\}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$; $\{\frac{1}{2^n}\}$

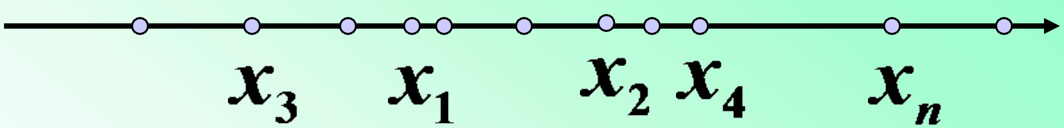
$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$; $\{(-1)^{n-1}\}$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots; \qquad \left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$$

$$\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \cdots, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}, \cdots \qquad \{\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}}_{n\text{重根号}}\}$$

**子列的概念:** 在数列$\{x_n\}$中取出的,并按原有顺序排列的一列数: $x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk}, \cdots$ ,称为数列$\{x_n\}$的子数列(子序列).

0数列相应着数轴上一种点列. 可看作一动点在数轴上依次取点: $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ .

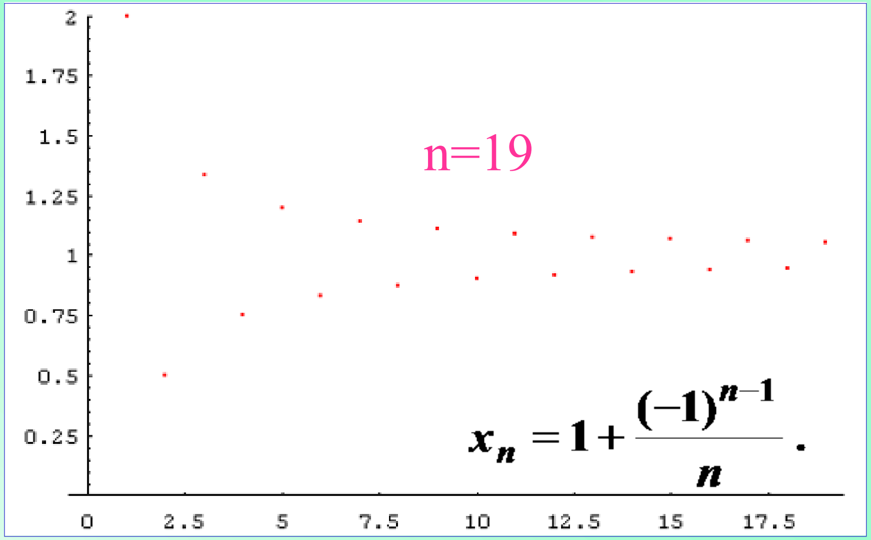


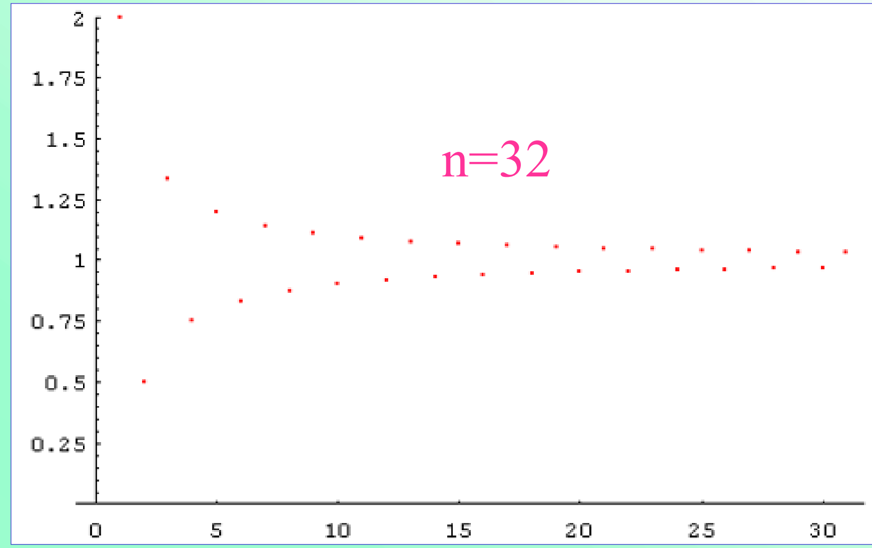

数列的几何意义.

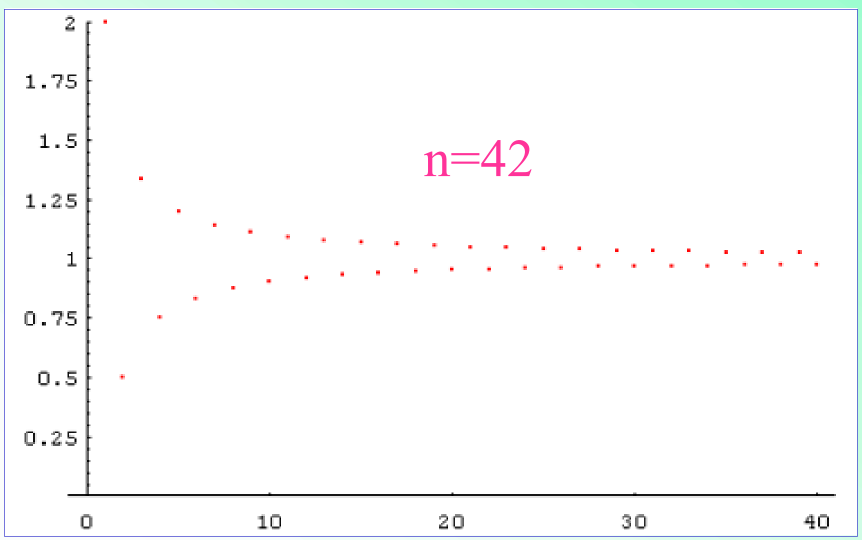
0数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

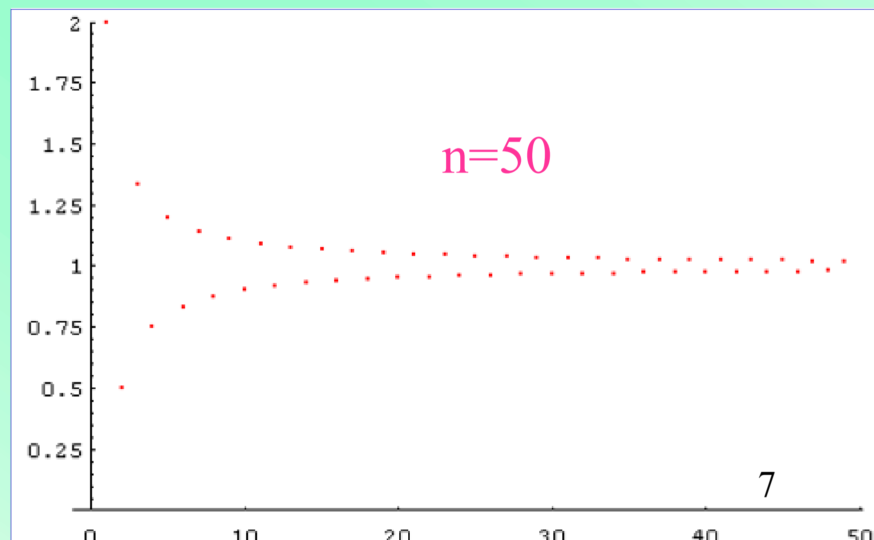
# 3、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势



当$n$无限增大时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$无限接近于1.

**问题:**

1) 当 n 无限增大时, 数列 $x_n$ 是否无限接近于某一拟定的数值? 假如是, 怎样用数学语言描述?

2) “无限接近”意味着什么?怎样用数学语言刻划它.

我们可用两个数之间的‘距离’来刻化两个数的接近程度

$$Q \quad \left|x_n - 1\right| = \left|1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

伴随n的增长，1/n会越来越小。

给定$\varepsilon = \dfrac{1}{100}$，由$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$，只要$n > 100$时，有$\left|x_n - 1\right| < \dfrac{1}{100}$，

给定$\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$，只要$n > 1000$时，有$\left|x_n - 1\right| < \dfrac{1}{1000}$，

给定$\varepsilon = \dfrac{1}{10000}$，只要$n > 10000$时，有$\left|x_n - 1\right| < \dfrac{1}{10000}$，

引入符号N和厂 来刻化无限增大和无限接近。

任意给定$\varepsilon > 0$，只要$n > N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$时，有$|x_n - 1| < \varepsilon$成立.

只要n无限增大，$x_n$ 就会与1无限接近。

$$n > N \xrightarrow{\text{确保}} |x_n - 1| < \varepsilon$$

**定义** 如果对于任意给定的正数$\varepsilon$(不论它多么小)，总存在正数$N$，使得对于$n > N$时的一切$x_n$，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立，那末就称常数$a$是数列$x_n$的极限，或者称数列$x_n$收敛于$a$，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

假如数列没有极限,就说数列是发散的.

注:

不等式$|x_n - a| < \varepsilon$刻划了$x_n$与$a$的无限接近;

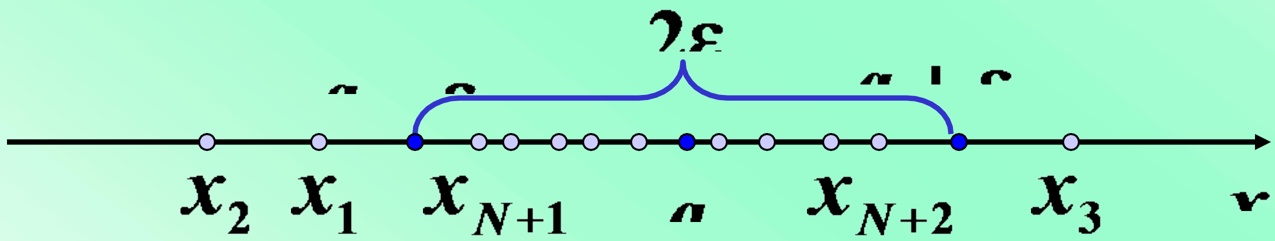
$N$与任意给定的正数$\varepsilon$有关.

$\varepsilon - N$定义: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

其中 $\forall$: 每一个或任给的; $\exists$: 至少有一个或存在.

## 几何解释:




当$n > N$时, 所有的点$x_n$都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内, 只有有限个(至多只有$N$个)落在其外.

数列极限的定义未给出求极限的措施，我们能够用定义来证明极限的存在。

例1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 $\because\ \left|x_n-1\right|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,$　要 $\left|x_n-1\right|<\varepsilon,$ 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$ 取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}],$

则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

例2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}=1.$

证 $\because\ \left|x_n-1\right|=\left|\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}-1\right|=\left|\dfrac{n+1}{n^2+5}\right|<\dfrac{2}{n}$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,$ 取 $N=[\dfrac{2}{\varepsilon}],$ 当 $n>N$ 时,

就有 $\left|\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}-1\right|<\varepsilon$　即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+6}{n^2+5}=1.$

注：用定义证明数列极限存在时，关键是从主要不等式出发，由∀ε>0，找到使主要不等式成立的N（并不在乎N是否最小）.

例3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中$a>0$.

证　任给$\varepsilon>0$，要使$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，

若$a<1$，只要$1-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$，$\sqrt[n]{a}>1-\varepsilon$，即：$n>\dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$，

取$N_1=[\dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}]$，

若$a>1$，只要$\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$，$\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$，即：$n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$，

取$N_2=[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}]$，$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，

就有$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，　$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

例4 设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, Q $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N$使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \sqrt{a}\,\varepsilon$,

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\sqrt{a}\,\varepsilon}{\sqrt{a}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

## 二、 收敛数列的性质

### 1.有界性

定义：对数列$x_n$，若存在正数$M$，使得一切自然数$n$，恒有$|x_n| \le M$成立，称数列$x_n$有界;否则，称为无界.

例如，数列$x_n = \frac{n}{n+1}$ 有界；数列$y_n = 2^n$ 无界。

在数轴上,有界数列的点$x_n$都落在闭区间[-M,M]上.

数列$x_n$有上界，即存在M，使$x_n \leqslant M(n=1, 2, \cdots)$。

数列$x_n$有下界，即存在m，使$x_n \geqslant m(n=1, 2, \cdots)$。

**定理1　收敛的数列肯定有界.**

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,　由定义,　取 $\varepsilon = 1$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则对一切自然数 $n$, 皆有 $|x_n| \le M$,　故 $\{x_n\}$ 有界.

**有界性是数列收敛的必要条件.**