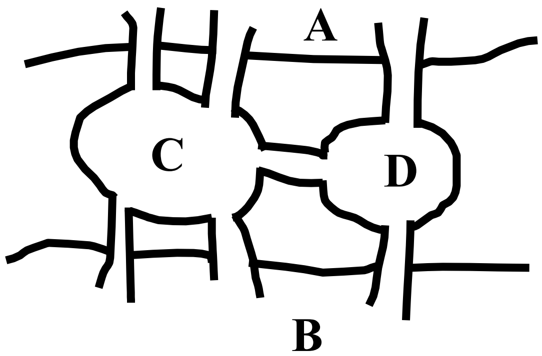
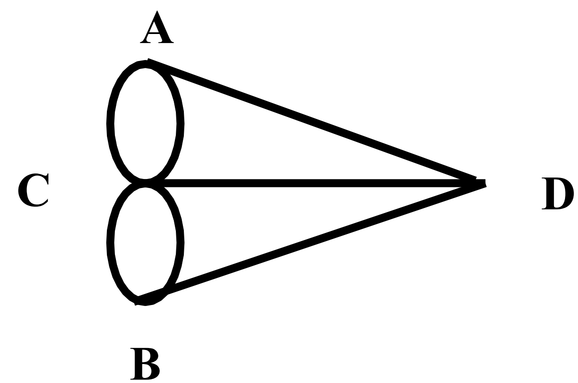
第六章 图与网络分析

- 图与网络的基本知识
- 树
- 最短路问题
- 最大流问题
- 最小费用流问题

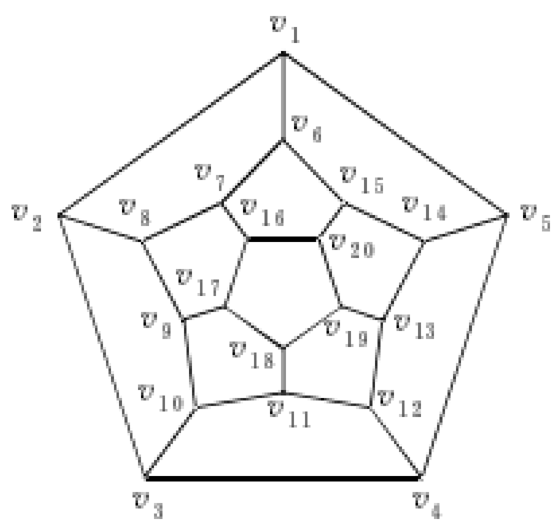
§1 图与网络的基本知识

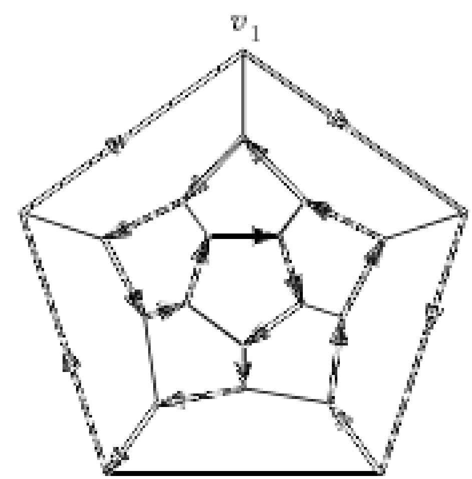


哥尼斯堡七空桥



一笔画问题





环球旅行问题

● 图及其分类

定义1 一个图是由点集$V=\{v_j\}$和V中元素的无序对的一个集合$E=\{e_k\}$构成的二元组，记为$G=(V,E)$,其中V中的元素v_j叫做顶点，V表示图G的点集合；E中的元素e_k叫做边，E表示图G的边集合。

例 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$

$e_1=\{v_1,v_2\}$　$e_2=\{v_1,v_2\}$

$e_3=\{v_2,v_3\}$　$e_4=\{v_3,v_4\}$

$e_5=\{v_1,v_3\}$　$e_6=\{v_3,v_5\}$

$e_7=\{v_3,v_5\}$　$e_8=\{v_5,v_6\}$

$e_9=\{v_6,v_6\}$　$e_{10}=\{v_1,v_6\}$

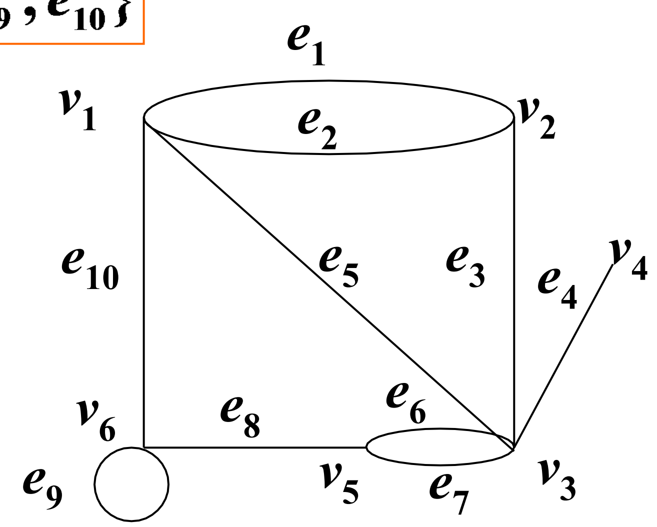


图1

● 图及其分类

- 如果一个图是由点和边所构成的，则称其为无向图，记作G =(V,E)，连接点的边记作$[v_i, v_j]$, 或者$[v_j, v_i]$。

- 如果一个图是由点和弧所构成的，那么称它为有向图，记作D=(V,A)，其中V 表示有向图D的点集合，A 表示有向图D 的弧集合。一条方向从v_i指向v_j 的弧，记作(v_i, v_j)。

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$A = \{(v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3),$$

$$(v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_5),$$

$$(v_5, v_4), (v_5, v_6)\}$$

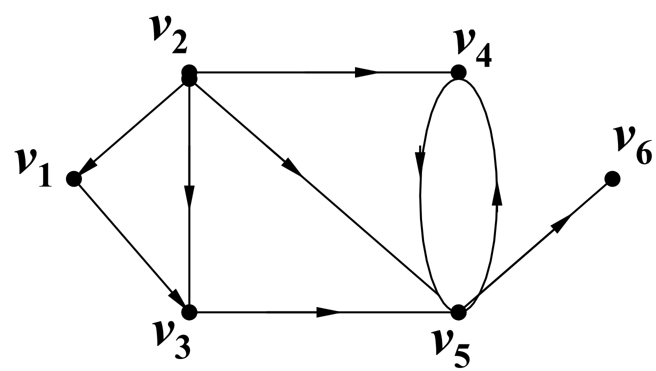


图2

图及其分类

- 环：两个端点相同的边。
- 多重边：两个端点之间有两条以上的边。

定义2

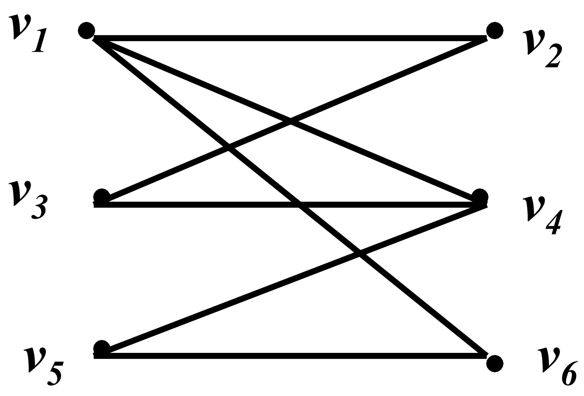
- 简单图：无环，无多重边的图；
- 多重图：无环，有多重边的图。

定义3

- 完全图：每一对顶点间都有边相连的无向简单图。
- 有向完全图：任意两顶点之间有且仅有一条有向边的简单图。

定义4

图$G=(V,E)$的点集V可以分为两个非空子集X，Y，即$X\cup Y=V$，$X\cap Y=\varnothing$，使得E中每条边的两个端点必有一个端点属于X，另一个端点属于Y，则称G为二部图（偶图），有时记作$G=(X,Y,E)$。



X: $\{v_1, v_3, v_5\}$

Y: $\{v_2, v_4, v_6\}$

顶点的度(次)

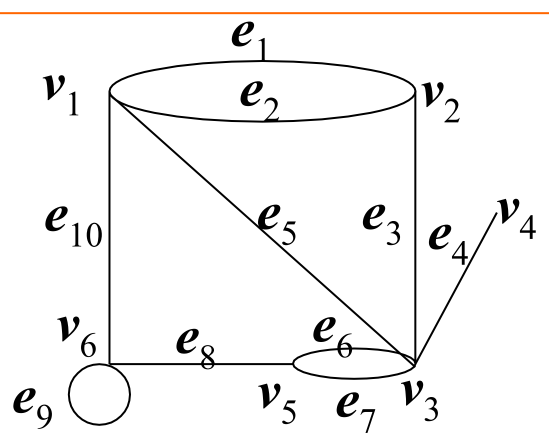
四川农业大学

定义5

- 以点 v 为端点的边的个数称为点 v 的度（次），记作 $d(v)$。

图中 $d(v_1) = 4$，$d(v_6) = 4$（环计两度）

- 度为零的点称为弧立点，度为1的点称为悬挂点。悬挂点的关联边称为悬挂边。度为奇数的点称为奇点，度为偶数的点称为偶点。



● 顶点的度(次)

定理1 所有顶点度数之和等于所有边数的2倍。

定理2 在任一图中，奇点的个数必为偶数。

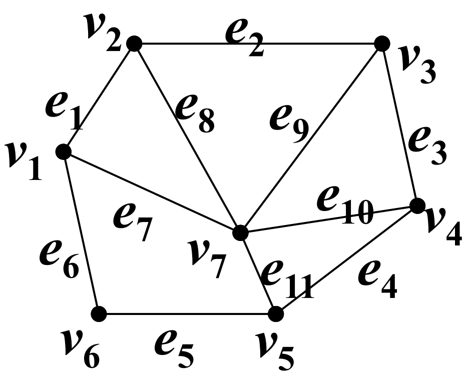
定义6

- 有向图中，以v_i为始点的边数称为点v_i的出度，用 $d^+(v_i)$ 表示；以v_i为终点的边数称为点v_i的入度，用 $d^-(v_i)$表示；
- v_i 点的出度和入度之和就是该点的度。所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和。

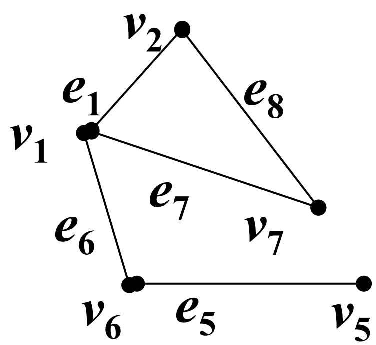
● 子图

定义7

图$G=(V,E)$，若E'是E的子集，V'是V的子集，且E'中的边仅与V'中的顶点相关联，则称$G'=(V',E')$是G的一个子图。特别是，若$V'=V$，则G'称为G的生成子图 (支撑子图)。

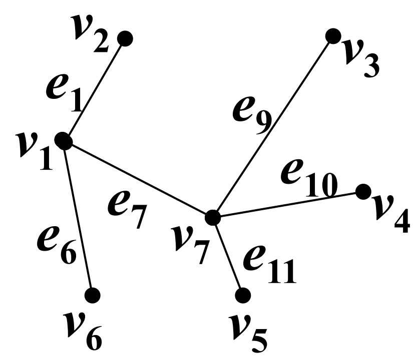


(a)



(b)

子图



(c)

支撑子图

连通图

- 实际应用中，给定一个图$G=(V, E)$或有向图 $D=(V, A)$，在V中指定两个点，一个称为始点（或发点），记作v_1，一个称为终点（或收点），记作v_n，其余的点称为中间点。对每一条弧$(v_i, v_j)\in A$，对应一个数w_{ij}，称为弧上的“权”。通常把这种赋权的图称为网络。

定义8

- 无向图$G=(V,E)$，若图G中某些点与边的交替序列可以排成$(v_{i0},e_{i1},v_{i1},e_{i2},\ldots,v_{ik-1},e_{ik},v_{ik})$的形式，且$e_{it}=(v_{it-1},v_{it})(t=1,\ldots,k)$，则称这个点边序列为连接$v_{i0}$与$v_{ik}$的一条链，链长为k。
- 点边列中没有重复的点和重复边者为初等链。

连通图

有向图可定义链和圈，初等链、圈，此时不考虑边的方向。而当链(圈)上的边方向相同时，称为道路(回路)。对于无向图来说，道路与链、回路与圈意义相同。

定义9

- 无向图G中，连结v_{i0}与v_{ik}的一条链，当v_{i0}与v_{ik}是同一个点时，称此链为圈。圈中既无重复点也无重复边者为初等圈。

定义10

- 若一个图中任意两点间至少有一条链相连，则称此图为连通图。任何一个不连通图都可以分为若干个连通子图，每一个称为原图的一个分图。

● 图的矩阵表示

定义11

● 对于网络(赋权图) $G=(V, E)$，其中边 (v_i, v_j) 有权 w_{ij} ，构造矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases} w_{ij} & (v_i, v_j)\in E \\ 0 & (v_i, v_j)\notin E \end{cases}$$

● 称矩阵A为网络G的**权矩阵**。

定义12

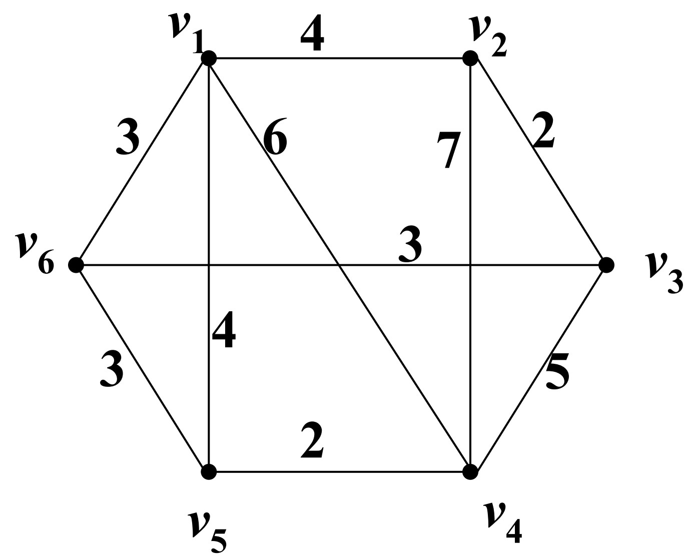
● 设图$G=$（V,E）中顶点的个数为n，构造一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中： $a_{ij}=\begin{cases} 1 & (v_i, v_j)\in E \\ 0 & (v_i, v_j)\notin E \end{cases}$

称矩阵A为网络G的**邻接矩阵**。

当G为**无向图**时，邻接矩阵为**对称矩阵**。

● 图的矩阵表示

例



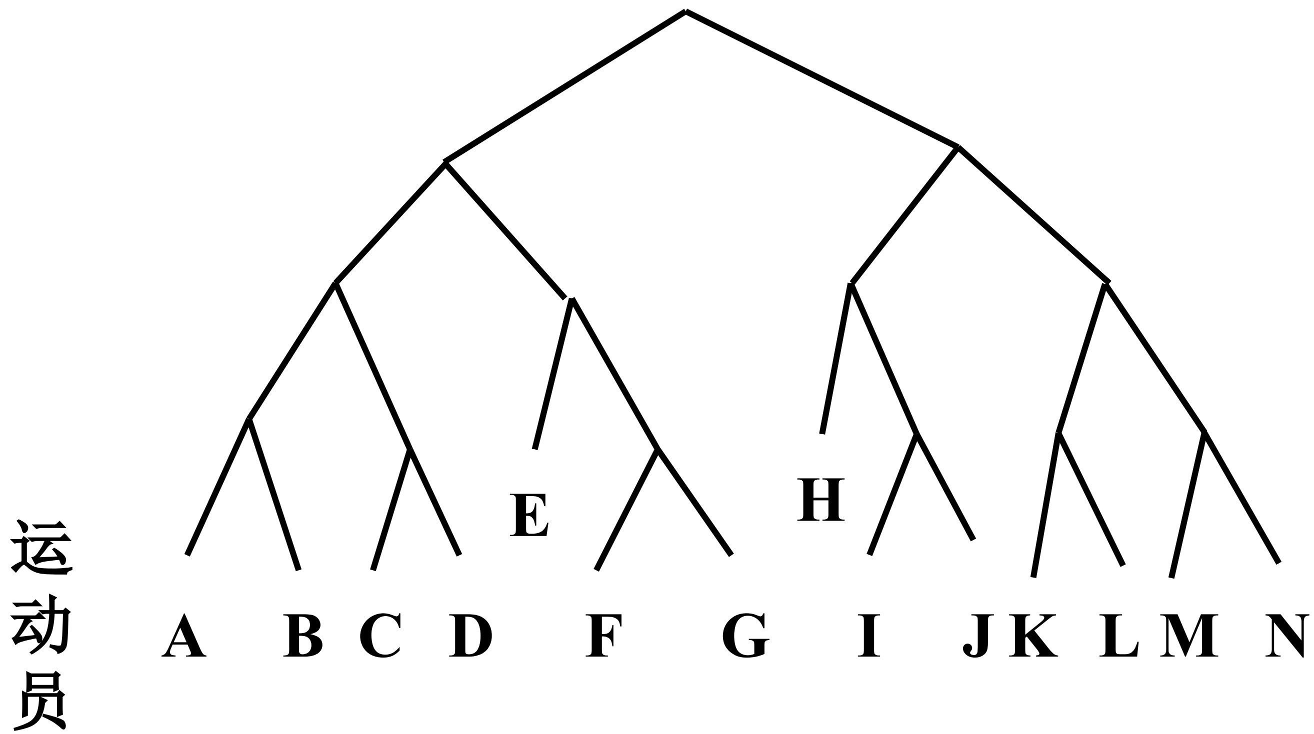
权矩阵为：

$$A=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&4&0&6&4&3\\4&0&2&7&0&0\\0&2&0&5&0&3\\6&7&5&0&2&0\\4&0&0&2&0&3\\3&0&3&0&3&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6\end{matrix}\end{array}$$

邻接矩阵为：

$$B=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&1\\1&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6\end{matrix}\end{array}$$

§2 树



乒乓球单打比赛

树的概念和性质

定义13

- 连通且不含圈的无向图称为树。树中度为1的点称为树叶，度大于1的点称为分枝点。

定理3

- 图T=(V,E), |V|=n, |E|=m，则下列关于树的说法是等价的。

（1） T是一个树。

（2） T无圈，且m=n-1。

（3） T连通，且m=n-1。

（4） T无圈，但每加一新边即得惟一一个圈。

（5） T连通，但任舍去一边就不连通。

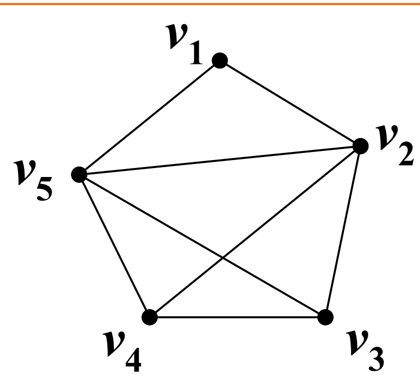
（6） T中任意两点，有惟一链相连。

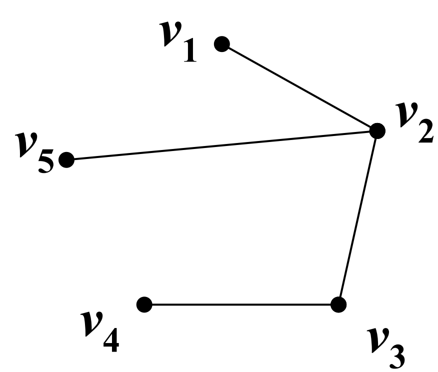
图的生成树

四川農業大學

定义14

- 设图 $K=(V,E_1)$是图G=(V, E)的一支撑子图，如果图 $K=(V,E_1)$是一个树，那么称K是G的一个生成树（支撑树），或简称为图G的树。图G中属于生成树的边称为**树枝**，不在生成树中的边称为**弦**。





定理4

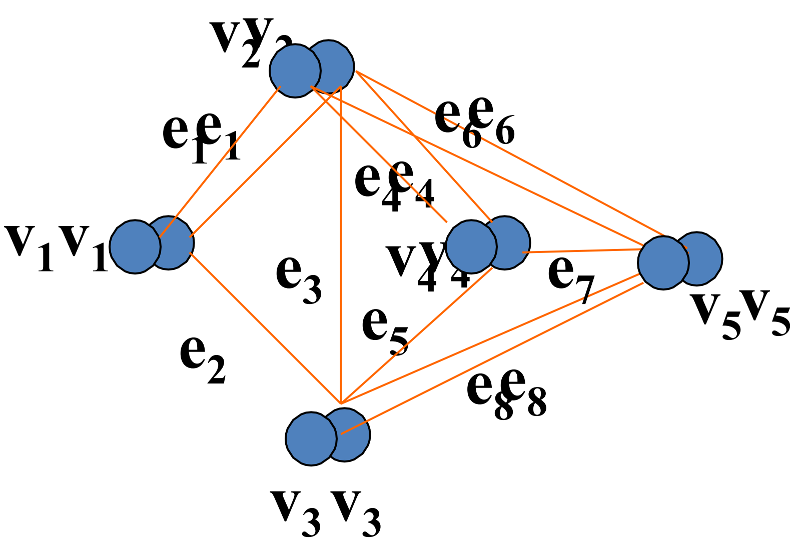
- 一个图G有生成树的充要条件是**G是连通图**。

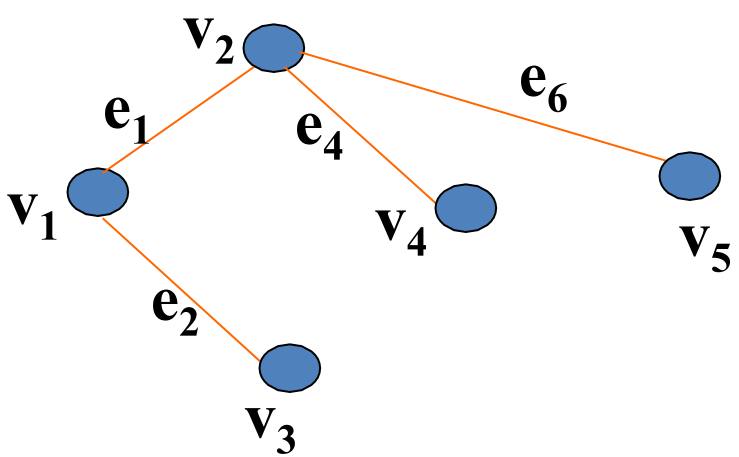
■ 求生成树的方法

（一）避圈法

● 在图中任取一条边e_1，找一条与e_1不构成圈的边e_2，再找一条与$\{e_1, e_2\}$不构成圈的边e_3。一般设已有$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$，找一条与$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$中任何一些边不构成圈的边$e_{k+1}$，重复这个过程，直到不能进行为止。

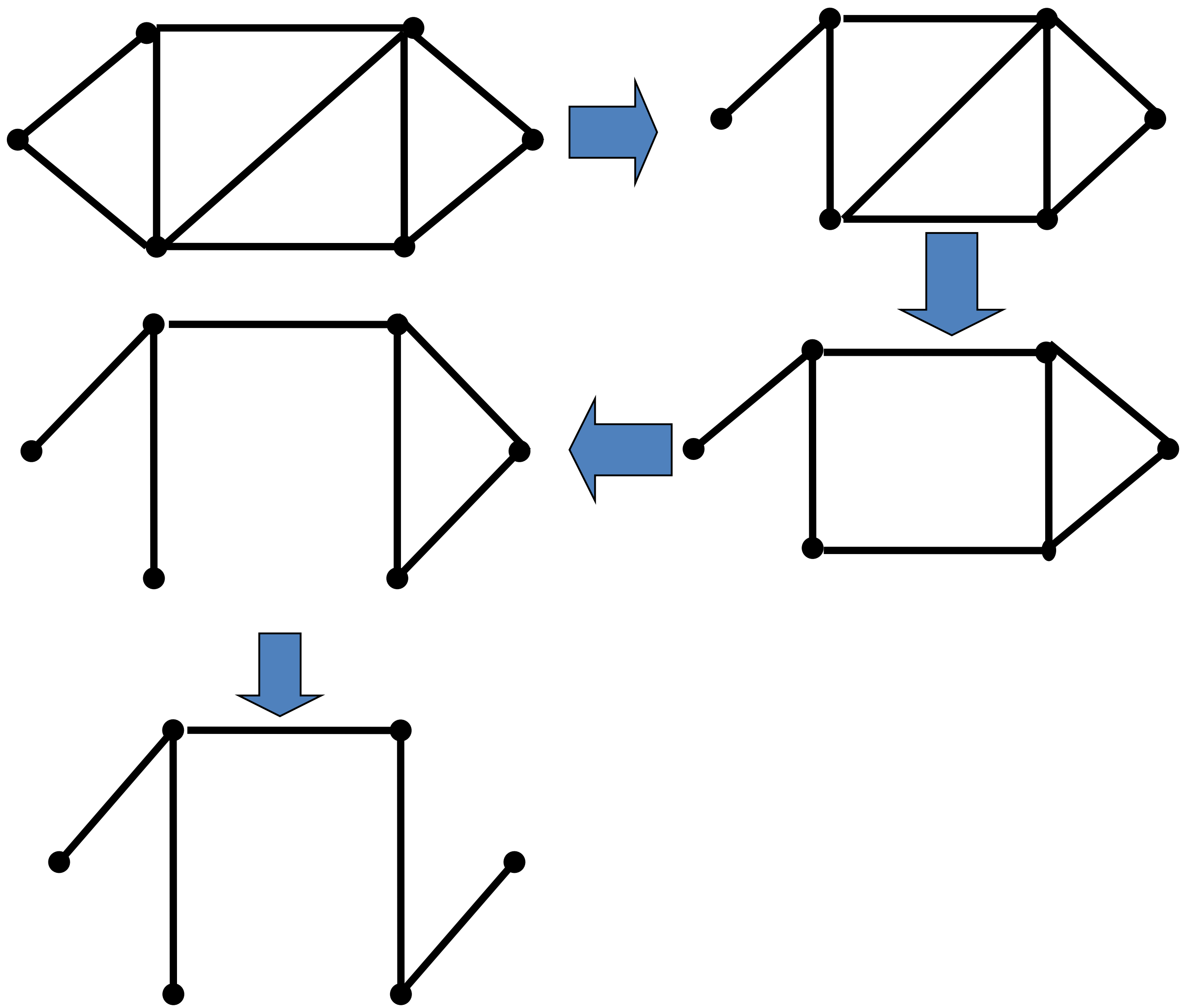
避圈法示例





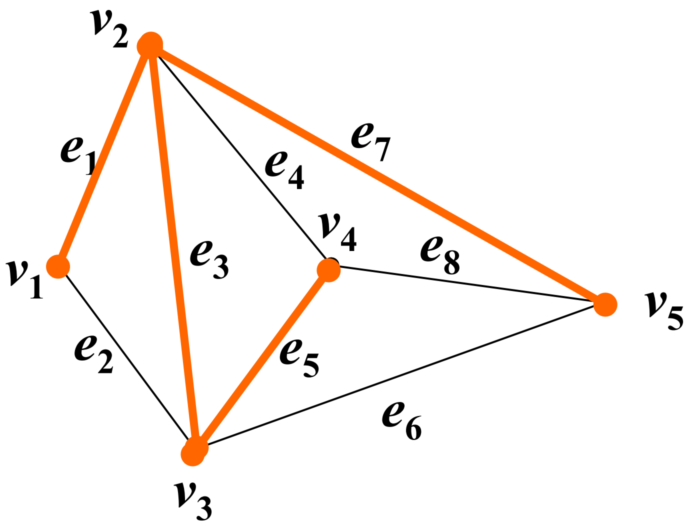
● 图的生成树

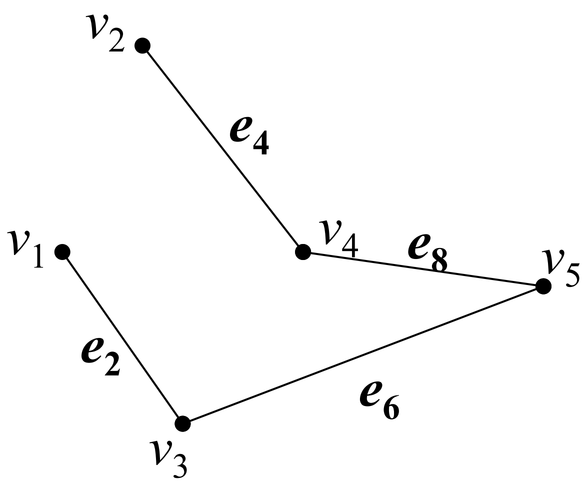
（二）破圈法



图的生成树

- 用破圈法求出下图的一个生成树





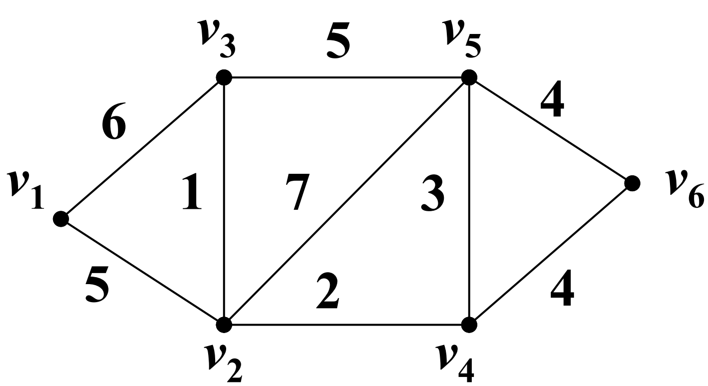
- 根据破圈法和避圈法两种方式得到了图的两个不同的支撑树，由此可以看到连通图的支撑树不是唯一的。

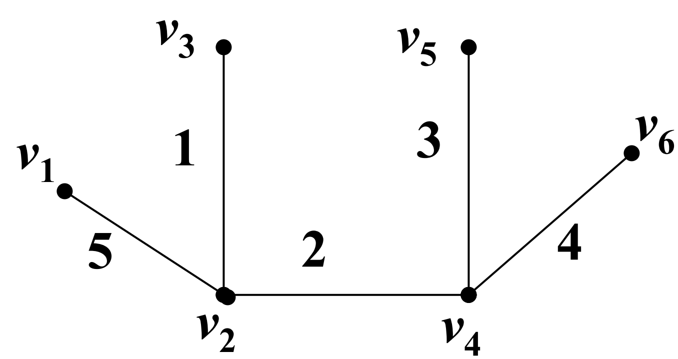
最小生成树问题

定义15

如果图 $T=(V,E_1)$是图G的一个生成树，那么称E_1上所有边的权的和为生成树T的权，记作S(T)。如果图G的生成树T* 的权S(T*)，在G 的所有生成树T 中的权最小，即 $S(T^*)=\min\limits_{T} S(T)$
那么称T*是G 的最小生成树。

某六个城市之间的道路网如图所示，要求沿着已知长度的道路联结六个城市的电话线网，使电话线的总长度最短。





最短路的概念：设 $G=(V,E)$为连通图，图中各边 (v_i,v_j)有权 l_{ij}（$l_{ij}=+\infty$ 表示 v_i,v_j 之间没有边），v_s,v_t 为图中任意两点，求一条路μ，使它为从 v_s到 v_t的所有路中总权最短。即：

$$L(\mu)=\sum_{(v_i,v_j)\in\mu} l_{ij}$$ 为最小。

(一) 狄克斯特拉(Dijkstra)算法

Dijkstra算法是在1959年提出来的。在所有的权$w_{ij}\geq 0$时，该算法是目前公认的寻求最短路问题最好的算法。并且，这个算法实际上也给出了寻求从一个始点v_s到任意一个点v_j的最短路。

注意：Dijkstra算法适用于$w_{ij}\geqslant 0$，否则，则可用逐次逼近法

§3 最短路问题--Dijkstra算法

- **算法步骤：**（ P:永久标号；T:临时标号）

1. 给始点v_s以P标号 $P(v_s)=0$，**这表示从v_s到 v_s的最短距离为0,其余节点均给T标号，** $T(v_i)=+\infty \quad (i=2,3,\cdots,n)$

2.设节点 v_i 为刚得到P标号的点，考虑点v_j，其中且v_j为T标号。对v_j的T标号进行如下修改：

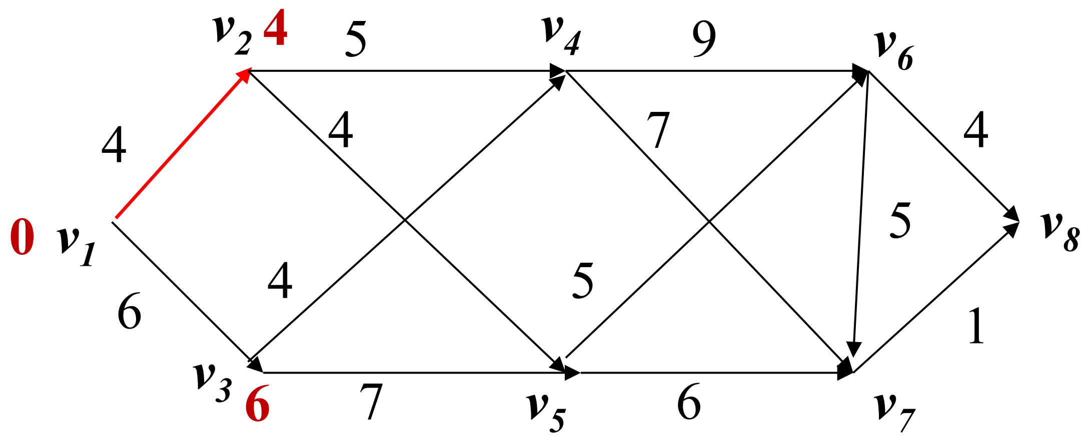
$$T(v_j)=\min[T(v_j),P(v_i)+l_{ij}]$$

3.比较所有具有T标号的节点，把最小者改为P标号，即：

$$P(v_k)=\min[T(v_i)]$$

当存在两个以上最小者时，可同时改为P标号。若全部节点均为P标号，则停止，否则用v_k代替v_i，返回步骤（2）。

例: 用Dijkstra算法求下图从v_1到v_8的最短路



解 （1）首先给v_1以P标号，给其余所有点T标号。

$$P(v_1)=0 \qquad T(v_i)=+\infty \quad (i=2,3,\cdots,8)$$

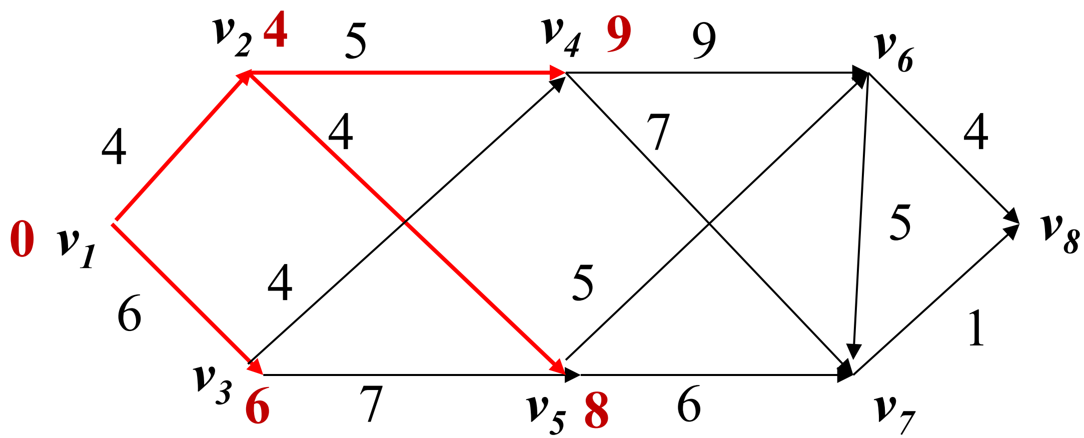
$$\boxed{T(v_2)=\min[T(v_2),P(v_1)+l_{12}]=\min[+\infty,0+4]=4}$$

$$\boxed{T(v_3)=\min[T(v_3),P(v_1)+l_{13}]=\min[+\infty,0+6]=6}$$

(2) 比较所有T标号，T(v_2)最小，令P(v_2)=4，并记录路径(v_1,v_2)

$$\boxed{T(v4)=\min[T(v_4),P(v_2)+l_{24}]=\min[+\infty,4+5]=9}$$

$$\boxed{T(v_5)=\min[T(v_5),P(v_2)+l_{25}]=\min[+\infty,4+4]=8}$$



- 比较所有T标号，T(v_3)最小，令P(v_3)=6, 并记录路径(v_1,v_3)

$$T(v_4)=\min[T(v_4),P(v_3)+l_{34}]=\min[9\,,\,6+4]=9$$

$$T(v_5)=\min[T(v_5),P(v_3)+l_{35}]=\min[8,\,6+7]=8$$

- 比较所有T标号，T(v_5)最小，令P(v_5)=8, 并记录路径(v_2,v_5)

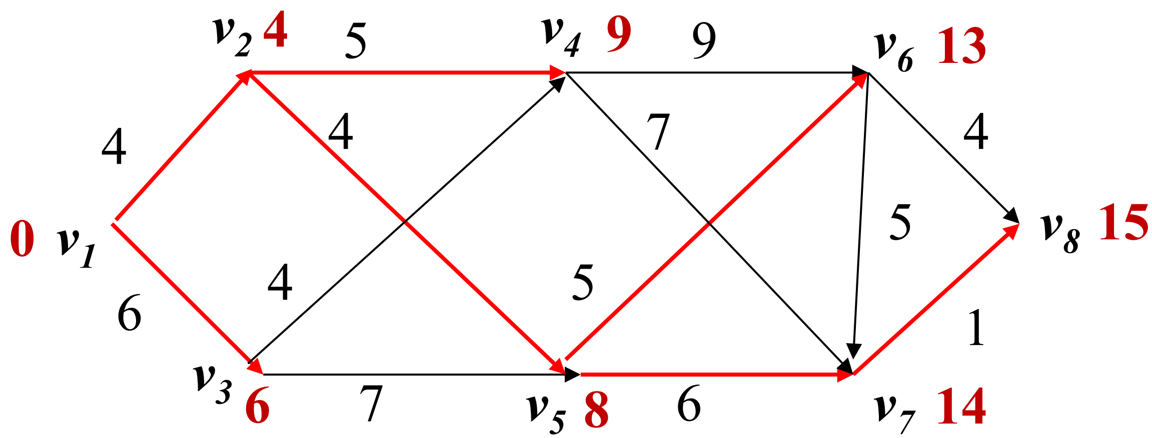
$$T(v_6)=\min[T(v_6),P(v_5)+l_{56}]=\min[+\infty\,,\,8+5]=13$$

$$T(v_7)=\min[T(v_7),P(v_5)+l_{57}]=\min[+\infty,\,8+6]=14$$

- 比较所有T标号，T(v_4)最小，令P(v_4)=9, 并记录路径(v_2,v_4)

$$T(v_6)=\min[T(v_6),P(v_4)+l_{46}]=\min[13\,,\,9+9]=13$$

$$T(v_7)=\min[T(v_7),P(v_4)+l_{47}]=\min[14,\,9+7]=14$$



- 比较所有T标号，T(v_6)最小，令P(v_6)=13, 并记录路径(v_5,v_6)

$$T(v_7)=\min[T(v_7),P(v_6)+l_{67}]=\min[14\,,13+5]=14$$

$$T(v_8)=\min[T(v_8),P(v_6)+l_{68}]=\min[+\infty\,,13+4]=17$$

- 比较所有T标号，T(v_7)最小，令P(v_7)=14, 并记录路径(v_5,v_7)

$$T(v_8)=\min[T(v_8),P(v_7)+l_{78}]=\min[17\,,14+1]=15$$

因为只有一个T标号T(v_8)最小，令P(v_8)=15, 并记录路径(v_7,v_8)，v_1到v_8之最短路为:

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_7 \longrightarrow v_8$$