机密★启用前（全国卷理科数学）

华大新高考联盟 2024 届高三 3 月教学质量测评

数学（理科）

本试题卷共 4 页，共 23 题（含选考题）．全卷满分 150 分．考试用时 120 分钟．

祝考试顺利

注意事项：

1．答题前．考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置，认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致，并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置．

2．选择题的作答：选出答案后．用 2B 铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．答在试题卷上无效．

3．非选择题的作答：用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内．答在试题卷上或答题卷指定区域外无效．

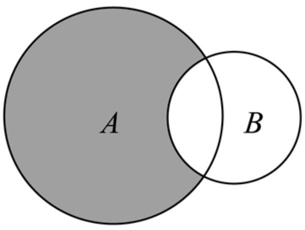
4．考试结束，监考人员将答题卷收回，考生自己保管好试题卷，评讲时带来．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若 $z\cdot(2+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}^{2023}$，则 z 的虚部为（　　）

A. -1　　　B. $\frac{7}{5}$　　　C. $-\frac{1}{5}$　　　D. 1

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,x=t+\sqrt{t-2}\}$，$B=\{x\,|\,2x^2-7x-9<0\}$，则图中阴影部分表示的集合为（　　）

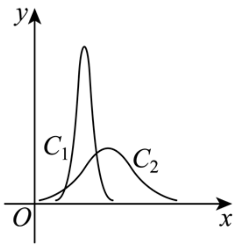


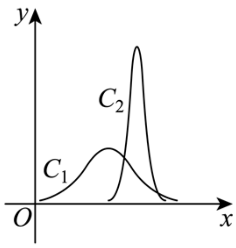
A. $\{x\,|\,-1<x<\frac{9}{2}\}$　　　B. $\{x\,|\,-1<x<2\}$

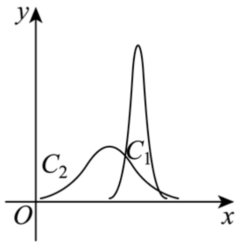
C. $\{x\,|\,x>-1\}$　　　D. $\{x\,|\,x\geqslant\frac{9}{2}\}$

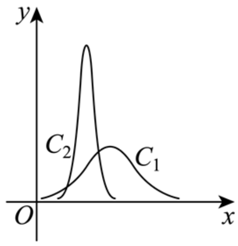
3. 对 A，B 两地国企员工上班迟到情况进行统计，可知两地国企员工的上班迟到时间均符合正态分布，其中 A 地员工的上班迟到时间为 X（单位：min），$X\sim N(2,4)$，对应的曲线为 C_1，B

地员工的上班迟到时间为 Y（单位：min），$Y \sim N\left(3,\frac{1}{9}\right)$，对应的曲线为 C_2，则下列图象正确的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 已知 $\vec{m}=(3,6),\vec{n}=(-3,\lambda)$，若 $\langle\vec{m}+\vec{n},\vec{n}\rangle=120^{\circ}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-2\sqrt{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 若 $\frac{\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin 2\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$（　　）

A. $\frac{11-\sqrt{5}}{12}$　　B. $\frac{5+\sqrt{5}}{12}$　　C. $\frac{5+\sqrt{5}}{16}$　　D. $\frac{11-\sqrt{5}}{16}$

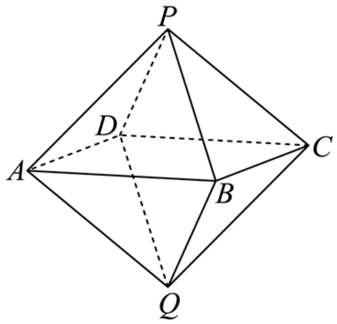
6. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴的交点为 P，过点 F 的直线 l' 与 C 交于 M，N 两点，若 $\frac{S_{\triangle OMF}}{S_{\triangle ONF}}=\frac{2}{5}$，且 $|MN|=\frac{49}{5}$，则 $S_{\triangle PMN}=$（　　）

A. $\frac{28\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{28\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{28\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{56\sqrt{5}}{5}$

7. 已知实数 a,b 满足 $a^2+b^2-|a|-|b|=0$，则 $|a+b-3|$ 的最小值与最大值之和为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

8. 六氟化硫，化学式为 SF_6，在常压下是一种无色、无臭、无毒、不燃的稳定气体，有良好的绝缘性，在电器工业方面具有广泛用途．六氟化硫结构为正八面体结构，如图所示，硫原子位于正八面体的中心，6 个氟原子分别位于正八面体的 6 个顶点，若相邻两个氟原子之间的距离为 m，则该正八面体结构的内切球表面积为（　　）



A. πm^2　　B. $2\pi m^2$　　C. $\dfrac{\pi m^2}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi m^2}{3}$

9. 记数列$\{a_n\}$的前 n 项积为T_n，且$a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=T_n-1$，若数列$\{b_n\}$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+b_n=T_n$，则数列$\{b_n\}$的前 20 项和为（　　）

A. -175　　B. -180　　C. -185　　D. -190

10. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的边长为 4，其中点 E 为线段B_1C的中点，点 F，G 分别在线段C_1D_1，BD_1上运动，若$|GE|+|GF|\geqslant\lambda$恒成立，则实数 λ 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,\dfrac{10\sqrt{2}}{3}]$　　B. $(-\infty,\dfrac{5\sqrt{2}}{3}]$　　C. $(-\infty,5\sqrt{2}]$　　D. $(-\infty,\dfrac{5\sqrt{2}}{2}]$

11. 已知函数$f(x)=\left|\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right|+\left|\cos\dfrac{1}{2}x\right|$，现有如下说法：

①$f(x)$的最小正周期为2π；②$f(x)$的图象关于$x=-\dfrac{\pi}{3}$对称；③$f(x)$在$\left[\dfrac{5\pi}{2},3\pi\right]$上单调递减；④$y=f(x)-\dfrac{9}{10}$在$[-\pi,\pi]$上有 4 个零点；

则正确说法的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 若关于 x 的不等式$e^{x-2}+x\geq 2ax^2-x\cdot\ln x$在$(0,+\infty)$上恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{e}}{3}\right)$　　D. $(-\infty,1]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分．共 20 分．

13.

在学习完二项式定理的相关知识后，老师要求同桌之间相互出题进行考查，为了区别于课例中的问题，小明提出如下题干：“已知$(3x-4)^7=\sum_{i=0}^{7}a_i(3x-2)^i$，基于上述题干，则$a_3=$____________.

14. 若函数$f(x)=\sin x\cdot[\log_3(9^x+2m)-x]$的图像关于原点对称，则$m$=________.

15. 记等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，其中$S_3=\frac{7}{4},S_6=\frac{63}{32}$,数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$a_n<b_n$，且$\frac{T_n}{4}<1$，则$b_n=$____________.（横线上写出一个满足条件的通项公式即可）

16. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在双曲线$C$上，且$\angle OPF_2=90°$，$\overrightarrow{F_2P}=\overrightarrow{PQ}$，若点$Q$也在双曲线$C$上，则双曲线$C$的离心率为________.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17~21题为必考题、每个试题考生都必须作答：第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共5小题，每小题12分，共60分．

17. 已知平面四边形$ABCD$的对角线分别为AC，BD，其中

$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\sin\angle BAD\cdot\tan\angle ABD=\sin\angle ABD\cdot\sin\angle ADB$.

（1）探究：$\triangle ABD$是否为直角三角形；若是．请说明哪个角为直角，若不是，请给出相关理由；

（2）记平面四边形$ABCD$的面积为S，若$\left|\overrightarrow{DC}\right|=2$，且恒有$S<\lambda$，求实数$\lambda$的取值范围．

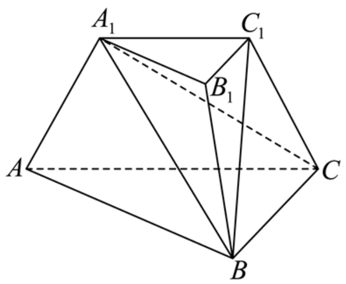
18. 小甲参加商场举行的玩游戏换代金券的活动．若参与A游戏，则每次胜利可以获得该商场150元的代金券；若参与B游戏，则每次胜利可以获得该商场200元的代金券；若参与C游戏，则每次胜利可以获得该商场300元的代金券．已知每参与一次游戏需要成本100元，且小甲每次游戏胜利与否相互独立．

（1）若小甲参加4次A游戏，每次获胜的概率为$p(0<p<1)$，记其最终获得450元代金券的概率为$F(p)$，求函数$F(p)$的极大值点p_0；

（2）在（1）的条件下，记小甲参加A，B，C游戏获胜的概率分别为$\frac{2}{3}p_0$，$\frac{4}{7}p_0$，$\frac{1}{2}p_0$．若小甲只玩一次游戏，试通过计算说明，玩哪种游戏小甲获利的期望最大．

19. 已知三棱台$ABC-A_1B_1C_1$如图所示，其中$AC=2BC=4B_1C_1=\frac{4\sqrt{5}}{5}A_1B_1=4$，

$A_1A=B_1B=C_1C$.



（1）若直线 $l\subset$ 平面 ABB_1A_1，且 $l\perp AB$，求证：直线 $l\perp$ 平面 ABC；

（2）若平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 之间的距离为 3，求平面 A_1B_1B 与平面 A_1C_1B 所成角的余弦值.

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2，左、右顶点分别为 A_1， A_2，点 P，Q 在椭圆 C 上，P，Q 异于 A_1， A_2.

（1）若直线 PA_1 与直线 $x=2\sqrt{2}$ 交于点 $D(2\sqrt{2},y_D)$，直线 PA_2 与直线 $x=2\sqrt{2}$ 交于点 $E(2\sqrt{2},y_E)$，求 y_Dy_E 的值；

（2）若 P，Q， F_2 三点共线，且 $\triangle PQF_1$ 的内切圆面积为 $\dfrac{3\pi}{16}$，求直线 PQ 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{m}{3}x$.

（1）若 $m=-3$，求证： $f(x)\le 0$；

（2）讨论关于 x 的方程 $f(x)+\dfrac{2}{3\pi}\sin\dfrac{\pi x}{2}=0$ 在 $(-1,2)$ 上的根的情况.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做．则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系；曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，点 A 的极坐标为 $\left(\sqrt{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 且点 A 在曲线 C_1 上.

（1）求曲线 C_1 的极坐标方程以及曲线 C_2 的参数方程；

（2）已知直线$l: x-\sqrt{3}y=0$与曲线C_1, C_2分别交于 P，Q 两点，其中 P，Q 异于原点 O，求$\triangle APQ$的面积.

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23. 已知函数$f\left(x\right)=\left|2x-4\right|+\left|mx-2\right|$.

（1）若$m=3$，求不等式$f\left(x\right)>8$的解集；

（2）若关于 x 的不等式在$f\left(x\right)\geq 3\left|x-2\right|$在$\left[1,2\right]$上恒成立，求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若$z\cdot(2+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}^{2023}$，则 z 的虚部为（　　）

A. -1　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $-\dfrac{1}{5}$　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】先将等式$z\cdot(2+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}^{2023}$变形为$z=\dfrac{3-\mathrm{i}^{2023}}{2+\mathrm{i}}$，利用复数的除法运算求解即可.

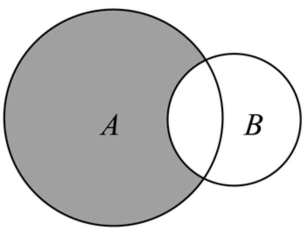
【详解】依题意$z\cdot(2+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}^{2023}$，得$z=\dfrac{3-\mathrm{i}^{2023}}{2+\mathrm{i}}$，

$$z=\frac{3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{6-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}+1}{5}=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i},$$

则复数 z 的虚部为：$-\dfrac{1}{5}$，

故选：C．

2. 已知集合$A=\{x\,|\,x=t+\sqrt{t-2}\}$，$B=\{x\,|\,2x^2-7x-9<0\}$，则图中阴影部分表示的集合为（　　）



A. $\{x \mid -1 < x < \frac{9}{2}\}$

B. $\{x \mid -1 < x < 2\}$

C. $\{x \mid x > -1\}$

D. $\{x \mid x \geqslant \frac{9}{2}\}$

【答案】D

【解析】

【分析】首先化简集合，根据交集、补集定义可得.

【详解】依题意，$x = t + \sqrt{t-2}$，由$t - 2 \geq 0$，得$t \geq 2$，

又$x = t + \sqrt{t-2}$在$\left[2, +\infty\right)$上单调递增，所以$x \geq 2$，

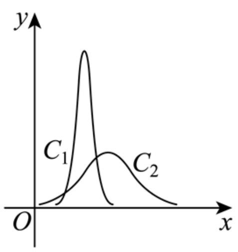
即$A = \{x \mid x \geq 2\}$，$B = \{x \mid (2x-9)(x+1) < 0\} = \{x \mid -1 < x < \frac{9}{2}\}$，

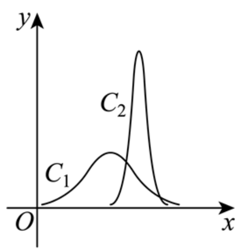
则$A \cap B = \left\{x \middle| 2 \leq x < \frac{9}{2}\right\}$，图中阴影部分表示的集合是集合$A$中$A \cap B$的补集，

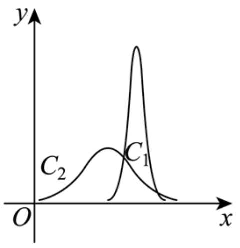
故阴影部分表示的集合为$\{x \mid x \geqslant \frac{9}{2}\}$，

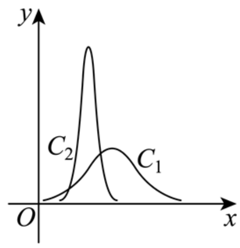
故选：D.

3. 对A，B两地国企员工上班迟到情况进行统计，可知两地国企员工的上班迟到时间均符合正态分布，其中A地员工的上班迟到时间为X（单位：min），X： $N\left(2,4\right)$，对应的曲线为C_1，B地员工的上班迟到时间为Y（单位：min），Y： $N\left(3,\frac{1}{9}\right)$，对应的曲线为$C_2$，则下列图象正确的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】由两个正态曲线的对称轴位置和集中分散程度判断结果.

【详解】由 $\mu_X=2<\mu_Y=3$，故曲线C_1的对称轴在曲线C_2的左侧，排除 C、D；

由$\sigma_X^2=4>\sigma_Y^2=\frac{1}{9}$，故曲线$C_2$比曲线$C_1$瘦高，曲线$C_1$比曲线$C_2$矮胖，排除 A.

故选：B.

4. 已知$\vec{m}=(3,6),\vec{n}=(-3,\lambda)$,若$\langle\vec{m}+\vec{n},\vec{n}\rangle=120^\circ$,则$\lambda=$（　　）

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-2\sqrt{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面向量数量积夹角公式坐标公式求解即可.

【详解】因为$\vec{m}=(3,6),\vec{n}=(-3,\lambda)$,所以$\vec{m}+\vec{n}=(0,6+\lambda)$,

则$(\vec{m}+\vec{n})\cdot\vec{n}=\lambda(6+\lambda),|\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{(6+\lambda)^2},|\vec{n}|=\sqrt{9+\lambda^2}$，

所以$\cos\langle\vec{m}+\vec{n},\vec{n}\rangle=\frac{\lambda(6+\lambda)}{\sqrt{(6+\lambda)^2}\cdot\sqrt{9+\lambda^2}}=-\frac{1}{2}$,

化简得$\lambda^2=3\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{3}$，

又$\lambda(6+\lambda)<0\Rightarrow-6<\lambda<0$,所以$\lambda=-\sqrt{3}$.

故选:A.

5. 若$\frac{\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin 2\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$（　　）

A. $\frac{11-\sqrt{5}}{12}$　　B. $\frac{5+\sqrt{5}}{12}$　　C. $\frac{5+\sqrt{5}}{16}$　　D. $\frac{11-\sqrt{5}}{16}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，由二倍角公式化简可得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，再由同角的平方关系可得$\sin^2\alpha$的值，代入计算，即可得到结果.

【详解】$\frac{\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，得$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，

则 $\cos^2\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$， $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$，

故 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\times\frac{5-\sqrt{5}}{8}\times\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{11-\sqrt{5}}{16}$.

故选：D.

6. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴的交点为 P，过点 F 的直线 l' 与 C 交于 M，N 两点，若 $\frac{S_{\triangle OMF}}{S_{\triangle ONF}}=\frac{2}{5}$，且 $|MN|=\frac{49}{5}$，则 $S_{\triangle PMN}=$（　　）

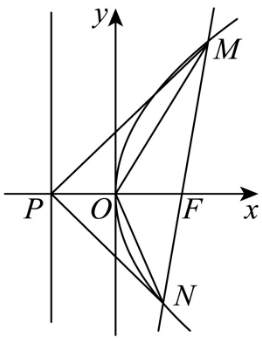
A. $\frac{28\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{28\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{28\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{56\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】设直线 l' 的倾斜角为 θ，则 $\frac{S_{\triangle OMF}}{S_{\triangle ONF}}=\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{2}{5}$，得到 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2}{5}$，求出 $\cos\theta,\sin\theta$，进而得到 $|MN|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{49}{5}$，从而求出 $p=4$，再根据 $S_{\triangle PMN}=2S_{\triangle OMN}$，求出 $S_{\triangle PMN}$.

【详解】



记直线 l' 的倾斜角为 θ，不妨设 $0°<\theta<90°$，则 $\frac{S_{\triangle OMF}}{S_{\triangle ONF}}=\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{2}{5}$，即 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2}{5}$，

得 $\cos\theta=\frac{3}{7}$，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$，则 $|MN|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{49}{5}$，解得 $p=4$，

故 $S_{\triangle PMN}=2S_{\triangle OMN}=2\cdot\frac{p^2}{2\sin\theta}=\frac{16}{\frac{2\sqrt{10}}{7}}=\frac{28\sqrt{10}}{5}$，

故选：A.

7. 已知实数a,b满足$a^2+b^2-|a|-|b|=0$，则$|a+b-3|$的最小值与最大值之和为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】C

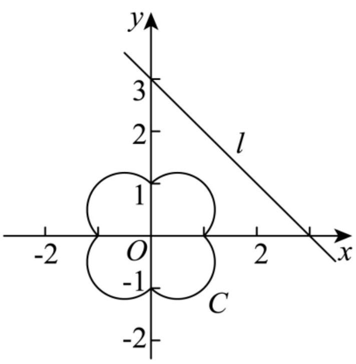
【解析】

【分析】作出曲线$C:x^2+y^2-|x|-|y|=0$对应的曲线，将$d=\dfrac{|a+b-3|}{\sqrt{2}}$看作曲线$C$上的点$(a,b)$到直线$l:x+y-3=0$的距离，结合圆心到直线的距离求得$d$的最小值和最大值，即可求得答案.

【详解】由题意知点(a,b)在曲线$C:x^2+y^2-|x|-|y|=0$上，曲线C关于原点以及坐标轴均对称；

由于$x\ge 0,y\ge 0$时，曲线的方程为$x^2+y^2-x-y=0$，即$(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$，

故结合曲线对称性，作出曲线C如图：



而$d=\dfrac{|a+b-3|}{\sqrt{2}}$表示曲线$C$上的点$(a,b)$到直线$l:x+y-3=0$的距离，

可知$d=\dfrac{|a+b-3|}{\sqrt{2}}$取最小值和最大值时，$(a,b)$位于曲线在第一、三象限内的圆弧上，

当$x\ge 0,y\ge 0$时，曲线的方程为$x^2+y^2-x-y=0$，即$(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$，

此时d的最小值为$\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当$x<0,y<0$时，曲线的方程为$x^2+y^2+x+y=0$，即$(x+\dfrac{1}{2})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$，

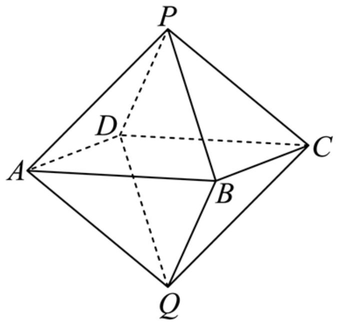
此时d的最大值为$\dfrac{|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

故 $d=\frac{|a+b-3|}{\sqrt{2}}$ 的最小值与最大值之和为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$，

所以 $|a+b-3|$ 的最小值与最大值之和为 $3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$，

故选：C．

8. 六氟化硫，化学式为 $\mathrm{SF_6}$，在常压下是一种无色、无臭、无毒、不燃的稳定气体，有良好的绝缘性，在电器工业方面具有广泛用途．六氟化硫结构为正八面体结构，如图所示，硫原子位于正八面体的中心，6 个氟原子分别位于正八面体的 6 个顶点，若相邻两个氟原子之间的距离为 m，则该正八面体结构的内切球表面积为（　　）



A. πm^2　　　　B. $2\pi m^2$　　　　C. $\frac{\pi m^2}{3}$　　　　D. $\frac{2\pi m^2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据正四棱锥的性质结合线面垂直的判定定理、性质定理找出内切球的半径，利用等面积法求出半径的大小，即可求解.

【详解】如图，连接 AC,BD 交于点 O，连接 OP，

取 BC 的中点 E，连接 OE,PE，

因为 $AB=m$,所以 $OA=OB=OC=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}m$，

$OP=\sqrt{AP^2-OA^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}m$，

由 $BE=CE$,可得 $BC\perp OE,BC\perp PE,OE,PE\subset$ 平面 POE，

且 $OE\cap PE=E$，所以 $BC\perp$ 平面 POE，

过 O 作 $OH\perp PE$，

因为$BC\perp$平面POE，$OH\subset$平面POE，所以$BC\perp OH$，

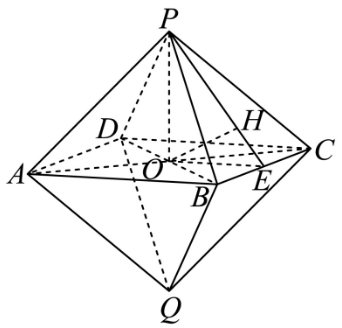
且$BC\cap PE=E,BC,PE\subset$平面PBC，所以$OH\perp$平面PBC，

所以OH为该正八面体结构的内切球的半径，

在直角三角形POE中，$OP=\frac{\sqrt{2}}{2}m,OE=\frac{1}{2}m,PE=\frac{\sqrt{3}}{2}m$，

由等面积法可得，$\frac{1}{2}\times OP\times OE=\frac{1}{2}\times PE\times OH$,解得$OH=\frac{\sqrt{6}}{6}m$，

所以内切球的表面积为$4\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{6}m\right)^2=\frac{2\pi}{3}m^2$，



故选:D.

9. 记数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，且$a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=T_n-1$，若数列$\{b_n\}$满足$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+b_n=T_n$，则数列$\{b_n\}$的前20项和为（　　）

A. -175　　B. -180　　C. -185　　D. -190

【答案】C

【解析】

【分析】利用递推公式及前n项积可得$a_n^2=a_{n+1}-a_n+1$，再由累加法可求得$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=a_{n+1}+n-\frac{1}{4}$，可知数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=-n+\frac{5}{4}$，即可计算出前20项和为$-185$.

【详解】根据题意由$a_{n+1}=T_n-1$可得$a_{n+1}+1=T_n$，所以$a_n+1=T_{n-1}\left(n\geq 2\right)$，

两式相除可得$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=\frac{T_n}{T_{n-1}}=a_n$，整理可得$a_{n+1}+1=a_n\left(a_n+1\right)=a_n^2+a_n$，

即$a_n^2=a_{n+1}-a_n+1$，

所以$a_{n-1}^2=a_n-a_{n-1}+1$，

……

$a_3^2=a_4-a_3+1$，

$a_2^2=a_3-a_2+1$，

累加可得$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-a_1^2=a_{n+1}-a_2+\left(n-1\right)$，

由$a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=T_n-1$可得$a_2=-\dfrac{1}{2}$；

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=a_{n+1}+\dfrac{1}{2}+\left(n-1\right)+\dfrac{1}{4}=a_{n+1}+n-\dfrac{1}{4}$；

结合$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+b_n=T_n$可得$a_{n+1}+n-\dfrac{1}{4}+b_n=T_n=a_{n+1}+1$，

所以$b_n=-n+\dfrac{5}{4},n\geq 2$；

易知$b_1=\dfrac{1}{4}$符合上式，所以可得$b_n=-n+\dfrac{5}{4}$；

即数列$\left\{b_n\right\}$为等差数列，前n项和为$b_1+b_2+\cdots+b_n=-\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}+\dfrac{5n}{4}$，

因此数列$\left\{b_n\right\}$的前 20 项和为$b_1+b_2+\cdots+b_{20}=-\dfrac{20\times\left(20+1\right)}{2}+\dfrac{5\times 20}{4}=-185$.

故选：C

10. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的边长为 4，其中点E为线段B_1C的中点，点F，G分别在线段C_1D_1，BD_1上运动，若$|GE|+|GF|\geqslant\lambda$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,\dfrac{10\sqrt{2}}{3}]$　　　　B. $(-\infty,\dfrac{5\sqrt{2}}{3}]$　　　　C. $(-\infty,5\sqrt{2}]$　　　　D. $(-\infty,\dfrac{5\sqrt{2}}{2}]$

【答案】A

【解析】

【分析】作点E关于线段D_1B的对称点E_1，可确定$GE+GF=E_1G+GF\geqslant E_1F_1$，当$F_1,G,E_1$三点共线时取等号，结合解三角形求出$E_1F_1$的长，即可得答案.

【详解】由题意知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 4，其中点 E 为线段 B_1C 的中点，

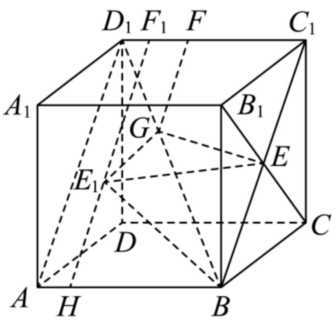
$AB \parallel CD \parallel C_1D_1, AB=CD=C_1D_1$，即四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，

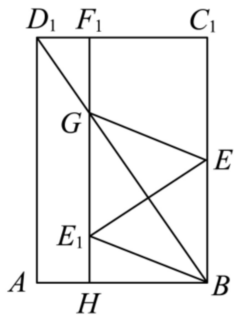
作点 E 关于线段 D_1B 的对称点 E_1，则 E_1，E 在平面 ABC_1D_1 内，连接 BE_1，

则 $BE_1=BE=\dfrac{1}{2}BC_1=2\sqrt{2}, \angle E_1BD_1=\angle C_1BD_1$，

过点 E_1 作 D_1C_1，AB 的垂线，垂足分别为 F_1，H，则 F_1,E_1,H 共线，且 $HF_1=BC_1=4\sqrt{2}$，

则 $GE+GF=E_1G+GF\geqslant E_1F_1$，当 F_1,G,E_1 三点共线时取等号，





又 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，$AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，故 $AB\perp AD_1$，

而 $BD_1=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$，则 $\sin\angle ABD_1=\dfrac{AD_1}{BD_1}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，同理

$\sin\angle C_1BD_1=\dfrac{BC_1}{BD_1}=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

则 $\cos\angle ABD_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\angle C_1BD_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

设 $\angle E_1BA=\theta$，则 $\sin\theta=\sin(\angle ABD_1-\angle E_1BD_1)=\sin(\angle ABD_1-\angle C_1BD_1)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

故 $E_1H=BE_1\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$E_1F_1=HF_1-E_1H=4\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$，

故实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{10\sqrt{2}}{3}]$，

故选：A.

【点睛】关键点睛：本题考查正方体中线段和的最小值问题，关键在于要作出点 E 关于线段 D_1B 的对称点 E_1，由此确定 $GE+GF=E_1G+GF\geqslant E_1F_1$，当 F_1,G,E_1 三点共线时取等号，即可求解.

11. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)\right|+\left|\cos\frac{1}{2}x\right|$，现有如下说法：

① $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 2π；② $f\left(x\right)$ 的图象关于 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称；③ $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$ 上单调递减；④ $y=f\left(x\right)-\frac{9}{10}$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上有 4 个零点；

则正确说法的个数为（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦型函数的周期公式以及图形求出函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期，可判断①；利用函数对称性的定义可判断②；利用正弦型函数的单调性可判断③；数形结合可判断④.

【详解】对于①，$f\left(x\right)=\sqrt{\left[\left|\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)\right|+\left|\cos\frac{1}{2}x\right|\right]^2}$

$=\sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\frac{x}{2}+2\left|\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x+\left|2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right|}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left|\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right|}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x-\frac{1}{4}\cos x\right)+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1+\cos x}{2}\right|}$

$=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\right|}$

$=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right|}$，