高中数学与其他学科的整合

一、对学科整合的基本认识

二、数学与其他学科的整合

三、数学教师的学习

一、对学科整合的基本认识

1、学科整合的相关概念

（1）广义学科整合

（2）狭义学科整合

2、中学部分学科课程资源整合的起点

3、学科整合的基本目的

一、对学科整合的基本认识

1——学科整合的相关概念

（1）广义学科整合

将两种、两种以上的学科，融入到课程整体中去。

割裂和对立问题，知识互动、综合能力。

学科整合涉及到课程结构、课程内容、课程资源以及课程实施等各个方面。

一、对学科整合的基本认识

1——学科整合的相关概念

（2）狭义学科整合

将两种学科、两种以上的学科，融合在一堂课中。

对教学本身都提出了更高的综合性要求。

强调把知识作为一种工具、媒介和方法融入到教学的各个层面中，培养学生的学习观念和综合实践能力。

由教研部门和学科教师努力实施来完成。

整合方式：相关整合、联想整合、根源整合。

一、对学科整合的基本认识

2——中学部分学科课程资源整合的起点

1）相互关系——知识整合、思维逻辑、学习方法相互关系紧密程度主要表现为密切相关和一般相关。

对于联系松散的学科，不寻求知识上的整合。

对逻辑关系不密切的学科，由于形象思维和逻辑思维的区别，不寻求他们之间的整合。

对有些学科的学习方法区别很大，难以进行整合的，就不寻求整合。

一、对学科整合的基本认识

2——中学部分学科课程资源整合的起点

2）资源分类——动力性资源、方法性资源、知识性资源

（1）动力性资源，这包括：学生的学习动机，学习兴趣等。

（2）方法性资源，这包括：学生的学习方法，学习策略等。

（3）知识性资源，这包括：学科间有联系的知识，相关的知识等。

一、对学科整合的基本认识

2——中学部分学科课程资源整合的起点

3）基本要点——知识运用、逻辑运用、方法借鉴

（1）注重相关学科的知识运用，实现所学知识的应用价值，取得事半功倍的效果。

（2）注重相关密切学科的逻辑思维方法的运用，注重这些学科逻辑上的联系，注重思维方法的整合运用，寻求了哲理上的统一。

（3）注重相关密切学科的学习方法的借鉴，注重学习方法上的互相借鉴，在学生学习方法上进行了必要的整合。

一、对学科整合的基本认识

2——中学部分学科课程资源整合的起点

4）基本框架——三个维度，三个要素，四条途径

三个维度：知识技能（基础性、技术性），

过程方法（思维、逻辑、辨证方法），

情感态度价值观（动机、兴趣、价值取向）。

三个要素：基点（教材）、隐性点、显性点。

四条途径：类比，生成，融入，提炼。

一、对学科整合的基本认识

2——中学部分学科课程资源整合的起点

维度一：知识与技能（基础性、技术性）

融入（知识的应用）↓提炼（技能的再现）

基点（教材）

类比（知识的扩充）↑生成（技能的强化）

维度二：过程方法（思维、逻辑、辨证方法）

融入（方法的应用）↓提炼（逻辑的理顺）

基点（教材）

类比（思维的扩展）↑生成（方法的迁移）

维度三：情感态度价值观（动机、兴趣、价值取向）

融入（兴趣的激发）↓提炼（价值的实现）

基点（教材）

类比（动机的巩固）↑生成（价值观的完善）

一、对学科整合的基本认识

3——课程整合的基本目的

- 课程资源整合成为教师的自觉行动是课改的必然要求，是教师达到教学目标的基本行为，是教师培养学生创新精神和实践能力的基本途径，是提高教学质量的基本手段。
- 符合教学规律，符合学生的学习规律和学生成长规律，符合新时代对教育的基本要求，符合新课改的基本理念。
- 有利于实施素质教育，有利于实现教育发展的总体目标，有利于完善教育理论。
- 基于现实情况，基于课程改革，根植于教学实际，丰富教学论的理论。

一、对学科整合的基本认识

3——课程整合的基本目的

作为探索性研究，按照课程改革的要求，根据教学发展的实际的科学探索。

经过探索，基本形成学科间课程资源整合的基本框架和模式。

重点是学科间的课程资源整合的系统的建立、以及明确每个学科具体的资源整合内容。

“整合”是指各个局部重新加以整顿组合，以达到优势互补。

二、数学与其他学科的整合

1、数学学科内部的整合

2、数学与文史哲

3、数学与物理

4、数学与化学

5、数学与生物

6、数学与经济

7、思想方法在多学科中的融合

二、数学与其他学科的整合

加强数学与其他学科联系

创设学生能力发展环境

《普通高中数学课程标准（实验）》指出：“我国的数学教育在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视，……高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系，促进学生逐步形成和发展数学应用意识，提高实践能力。”

二、数学与其他学科的整合

加强数学与其他学科联系

创设学生能力发展环境

华罗庚说过“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁无处不用数学”，数学知识的应用性决定了涉及领域的广泛性。

“数学是众多门类科学的工具。数学进入某一学科，就意味这门学科从定性发展到定量阶段，意味着这门学科的成熟。”

二、数学与其他学科的整合

1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

1）开启一座宝藏

——对数——

爱丁堡轶事——纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）和《奇妙的对数表》(1614)

布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）的对数著作及书中的常用对数表

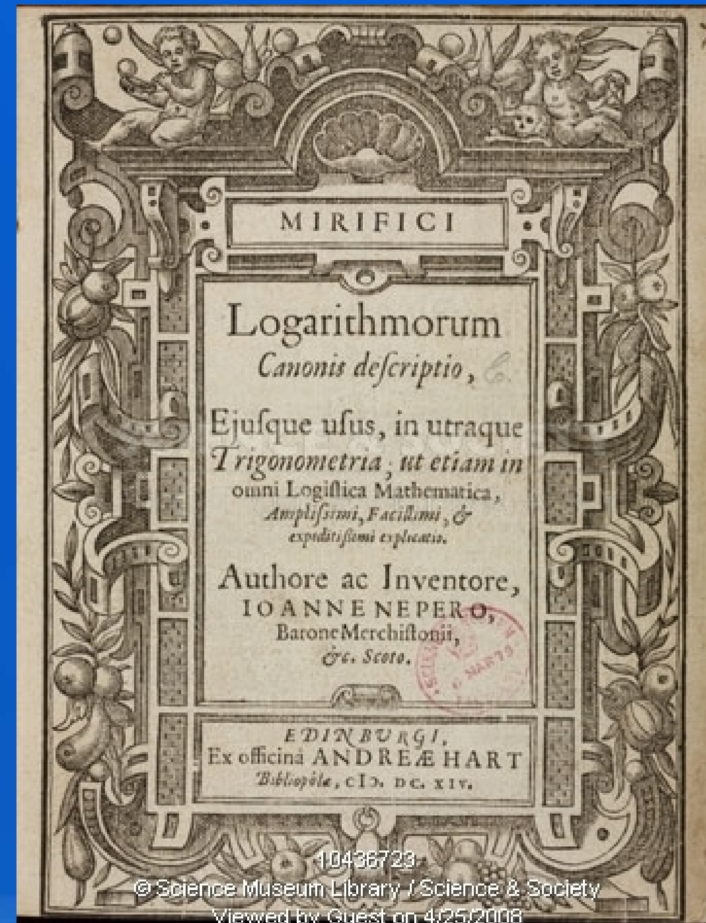
对数有什么用？

新的计算工具，复杂、繁琐、易错——简单、明了、正确

两个大数的乘除

改进对数——以10为底。

二、数学与其他学科的整合


MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

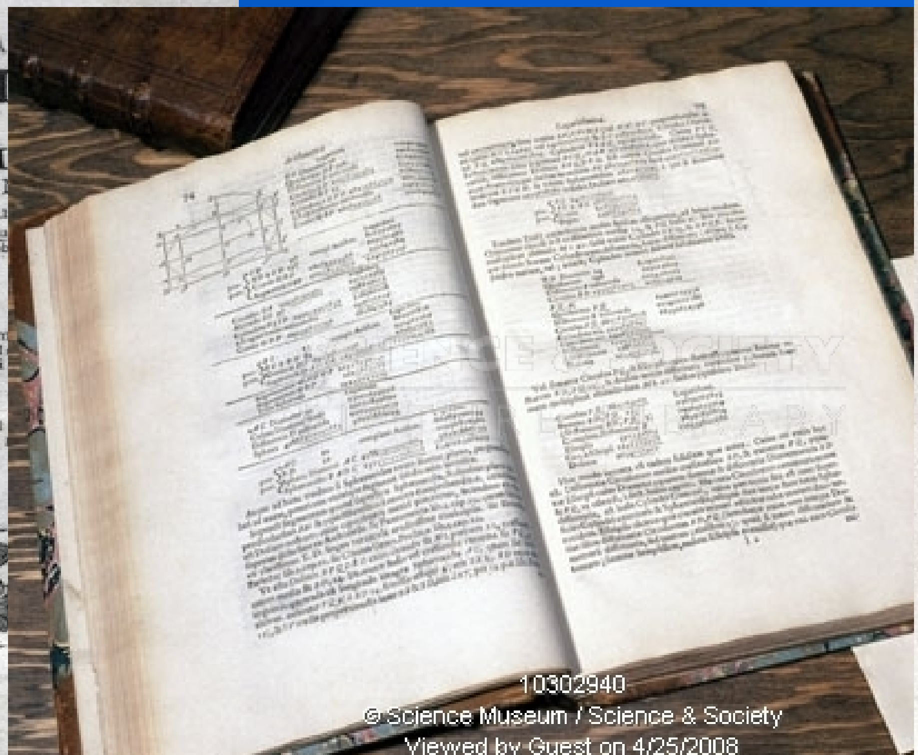
Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Amplisſimi, Facillimi, &
expeditisſimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIƆ. DC. XIV.

纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）和《奇妙的对数表》(1614)

二、数学与其他学科的整合



布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）的对数著作及书中的常用对数表

二、数学与其他学科的整合

纳皮尔对数（尼加拉瓜，1971）

HPM视角下的“对数概念及其运算”的教学

二、数学与其他学科的整合

1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

A. De Moivre (1667-1754)

棣莫佛于1754年去世。去世前不久，他声称以后每天比前一天多睡15分钟。睡满24小时那天，就是他的生命终点。

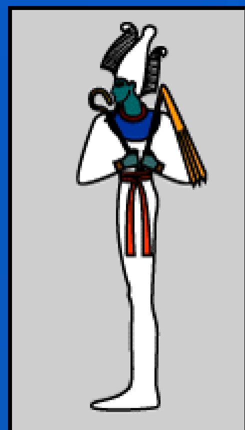
假设棣莫佛当年9月24日睡眠时间为8小时。他去世于哪一天？

——等差数列——

二、数学与其他学科的整合

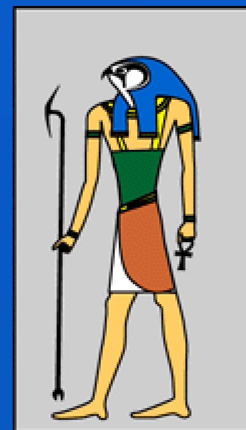
Isis

女



Osiris

夫

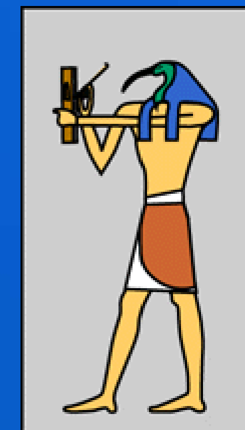


Horus

孩子

Seth

兄弟



Thoth

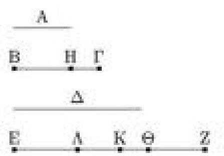
智慧之神

埃及神话中的诸神

——神话传说中的等比数列——

二、数学与其他学科的整合

- 《几何原本》第 9 卷命题 35



ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος ἑκάτερος τῶν ΒΗ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΓ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΒΗ ἴσος ἐστίν, λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΓ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΖΛ, οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸν ΖΘ. διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ, οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΓΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Θ΄.λϝ΄

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω. λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2-a_1}{a_1}=\frac{a_3-a_2}{a_2}=\cdots=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$$

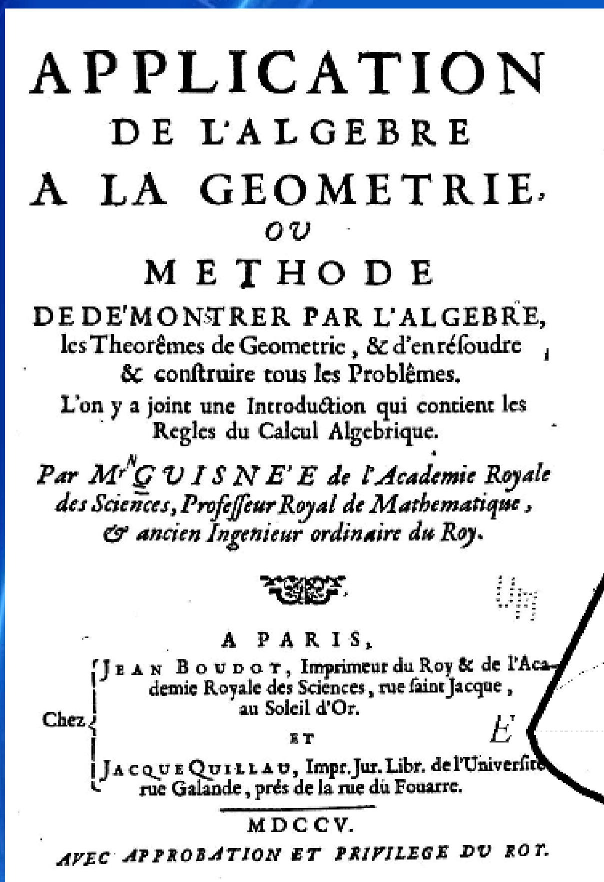
$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}=q-1$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}\quad (q\neq 1)$$

等比数列求和公式

二、数学与其他学科的整合

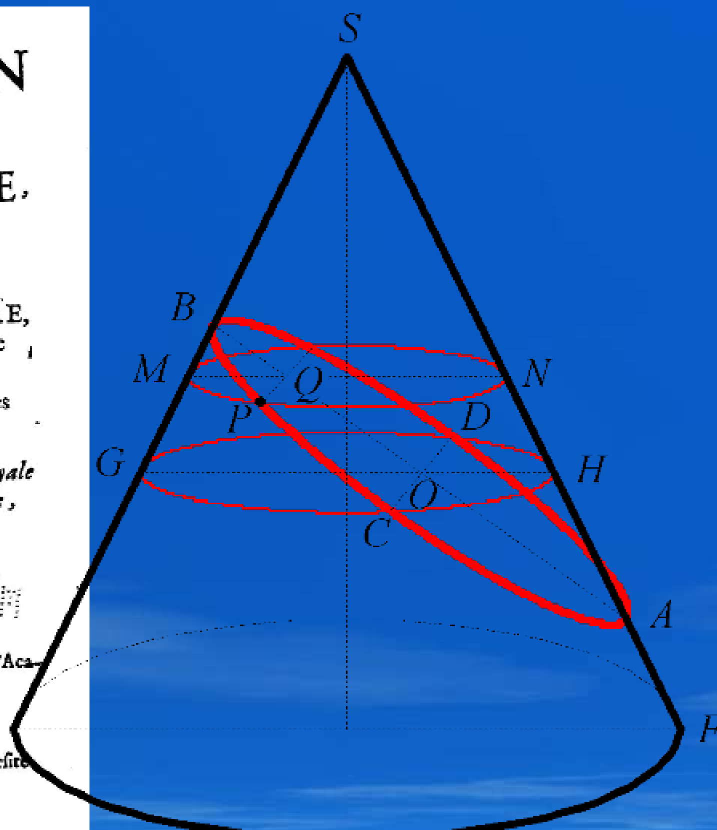
N. Guisnée《代数在几何上的应用》 (1705年)



APPLICATION
DE L'ALGEBRE
A LA GEOMETRIE,
OU
METHODE
DE DE'MONSTRER PAR L'ALGEBRE,
les Theorêmes de Geometrie, & d'en réſoudre
& conſtruire tous les Problêmes.
L'on y a joint une Introduction qui contient les
Regles du Calcul Algebrique.
*Par Mr GUISNE'E de l'Academie Royale
des Sciences, Profeſſeur Royal de Mathematique,
& ancien Ingenieur ordinaire du Roy.*

A PARIS,
Chez { JEAN BOUDOT, Imprimeur du Roy & de l'Academie Royale des Sciences, rue ſaint Jacque, au Soleil d'Or.
ET
JACQUE QUILLAU, Impr. Jur. Libr. de l'Univerſité, rue Galande, prés de la rue du Fouarre. }

MDCCV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



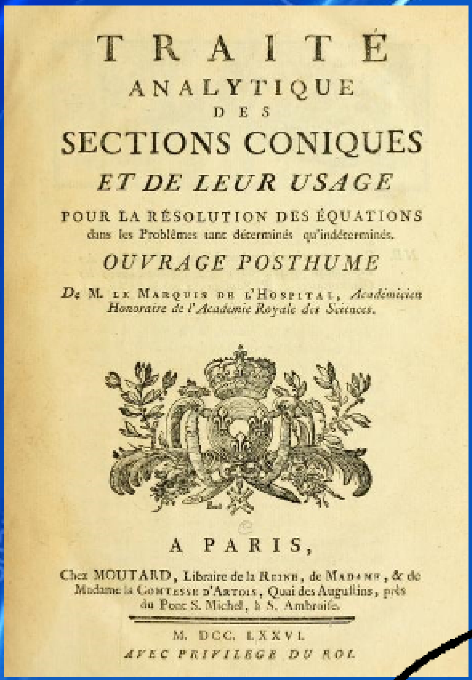
$$\frac{a}{OH}=\frac{a+x}{QN},\frac{a}{OG}=\frac{a-x}{MQ}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{OG\cdot OH}=\frac{a^2-x^2}{MQ\cdot QN}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{y^2}$$

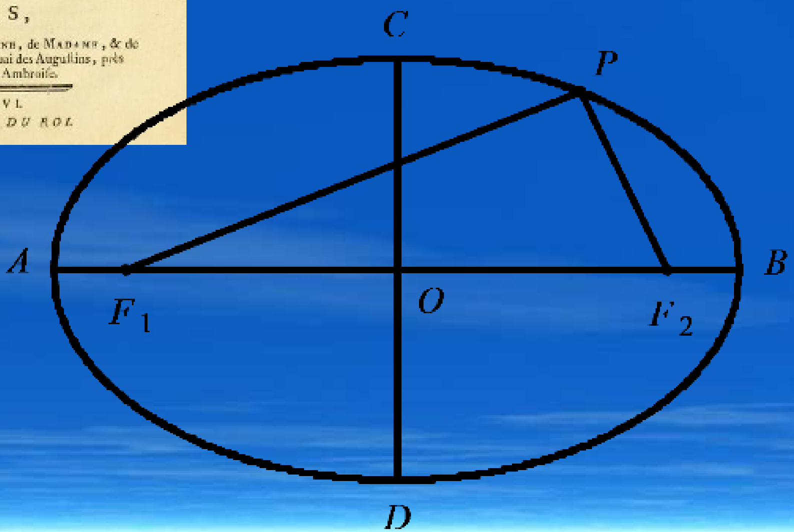
$$\Rightarrow a^2-x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2$$

二、数学与其他学科的整合


TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.
OUVRAGE POSTHUME
De M. le Marquis de l'Hospital, Académicien Honoraire de l'Académie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez MOUTARD, Libraire de la Reine, de Madame, & de Madame la Comtesse d'Artois, Quai des Augustins, près du Pont S. Michel, à S. Ambroise.
M. DCC. LXXXVI.
AVEC PRIVILEGE DU ROI.

《圆锥曲线解析》(1707)

M. de L'Hospital 1661-1704



$$|PF_1|+|PF_2|=2a$$

$$\Rightarrow |PF_1|=a+z,|PF_2|=a-z$$

$$\Rightarrow |PF_1|^2=(a+z)^2=(x+c)^2+y^2$$

$$|PF_2|^2=(a-z)^2=(x-c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4az=4cx$$

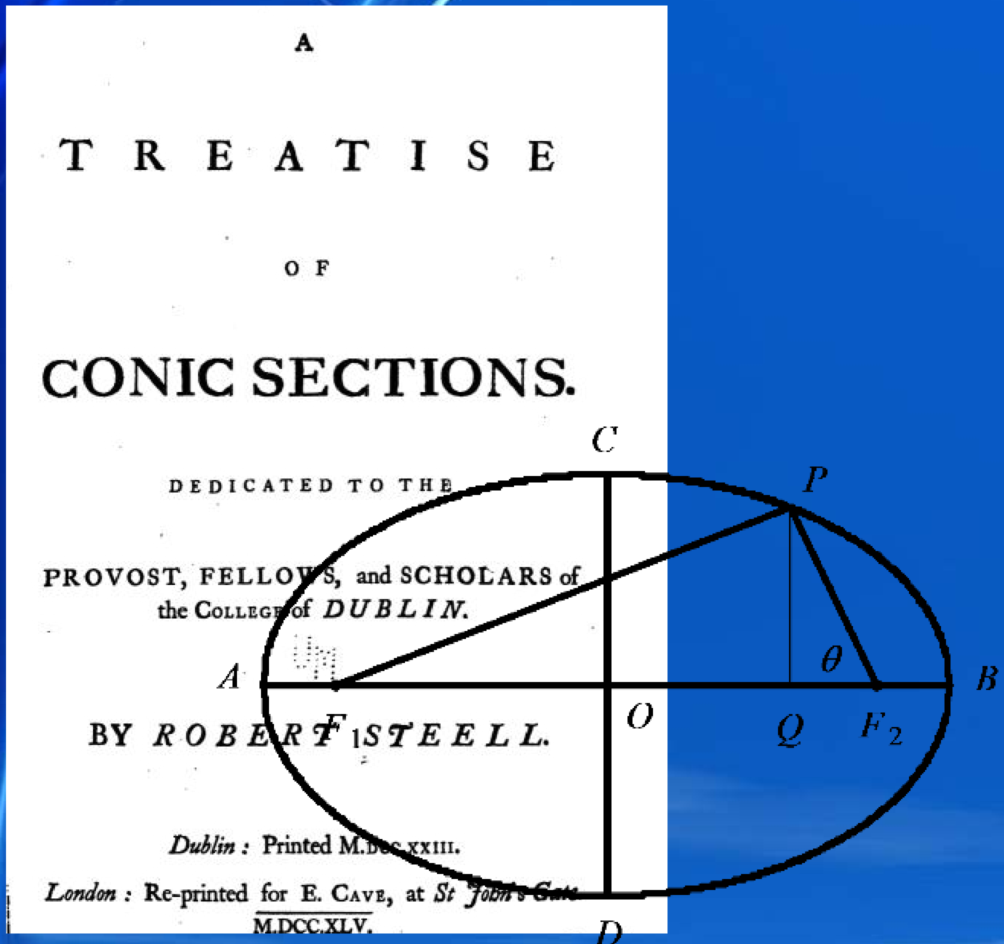
$$\Rightarrow z=\frac{c}{a}x$$

$$\Rightarrow \left(a+\frac{c}{a}x\right)^2=(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$$

二、数学与其他学科的整合



斯蒂尔《圆锥曲线论》(1745)

设$|PF_2| = z$

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

$$\Rightarrow |PF_1| = 2a - z$$

$$\Rightarrow (2a-z)^2 = z^2 + 4c^2 - 4cz\cos\theta$$

$$= z^2 + 4c^2 - 4c(c-x)$$

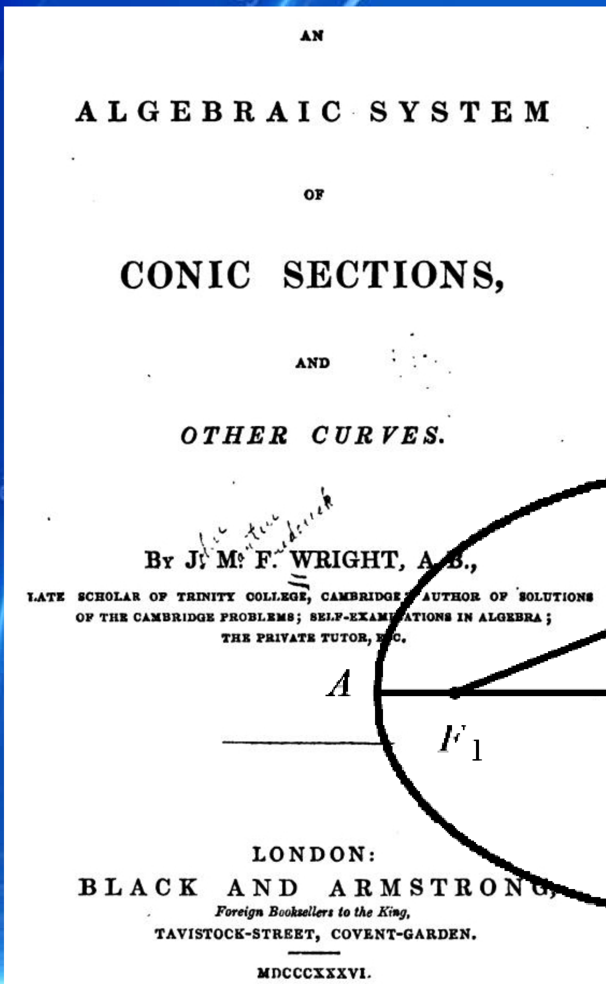
$$\Rightarrow z = \frac{a^2 - cx}{a}$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2}{a^2} = y^2 + (c-x)^2$$

$$\Rightarrow a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

二、数学与其他学科的整合

赖特（J. M. F. Wright）《圆锥曲线之代数体系》（1836）



AN

ALGEBRAIC SYSTEM

OF

CONIC SECTIONS,

AND

OTHER CURVES.

By J. M. F. WRIGHT, A. B.,

LATE SCHOLAR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AUTHOR OF SOLUTIONS OF THE CAMBRIDGE PROBLEMS; SELF-EXAMINATIONS IN ALGEBRA; THE PRIVATE TUTOR, &C.

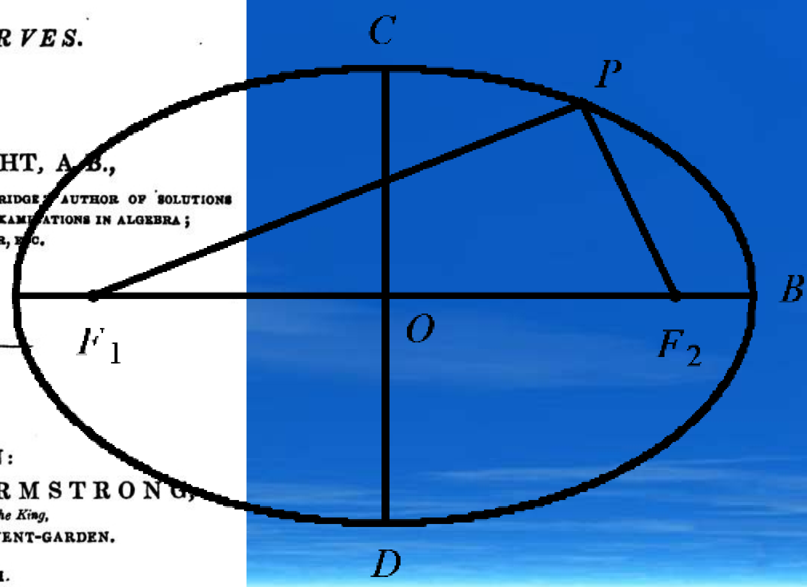
LONDON:

BLACK AND ARMSTRONG,

Foreign Booksellers to the King,

TAVISTOCK-STREET, COVENT-GARDEN.

MDCCCXXXVI.



$$|PF_1| = r_1, |PF_2| = r_2$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$

$$\Rightarrow (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4cx$$

$$\Rightarrow 2a(2r_1 - 2a) = 4cx$$

$$\Rightarrow r_1 = a + \frac{cx}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

二、数学与其他学科的整合

1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

2）探寻一条进路

◆在数学教学中，我们总是在不断地回答“为什么”。

☺为什么将幂指数称为“对数”？薛凤祚（?～1680）《比例对数表》(1653)

《数理精蕴》：“对数比例，乃西士若往·讷白尔所作。以借数与真数对列成表，故名对数表。……其法以加代乘，以减代除，以加倍代自乘，故折半即开平方。以三因代再乘，故三归即开立方。推之至于诸乘方，莫不皆以假数相乘而得真数。盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也。”

二、数学与其他学科的整合

1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

3）传递一缕书香

◆ 萨顿

- *Isis（1913）*
- *《科学史引论》（1927-1947）*
- *《数学史研究》（1936）*
- *《科学史研究》（1936）*
- *《科学史与新人文主义》（19??）*

G. Sarton（1884-1956）

1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

萨顿

在科学和人文之间只有一座桥梁，那就是科学史。建造这座桥梁是我们这个时代的主要文化需要。

同样，在数学和人文之间也只有一座桥梁，那就是数学史。

二、数学与其他学科的整合

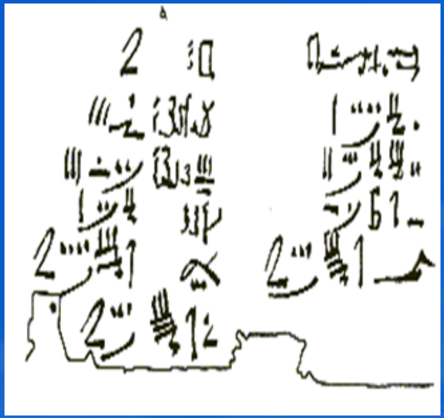
1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

4）增添一种视角

以等比数列求和公式推导为例。

莱因得纸草书（1650B.C.）

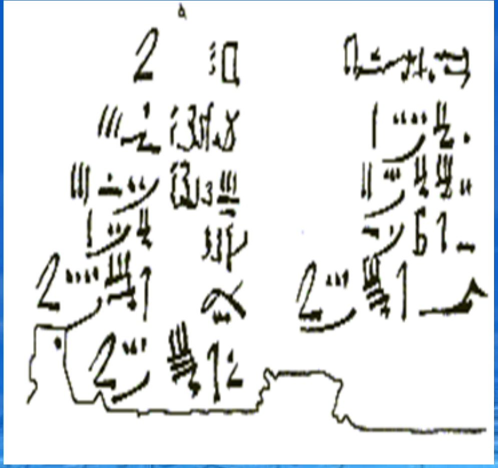


二、数学与其他学科的整合

$$
\begin{aligned}
S_n &= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} \\
&= a + q\left(a + aq + aq^2 + \cdots \ aq^{n-2}\right) \\
&= a + qS_{n-1} \\
&= a + q\left(S_n - aq^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}\left(q \neq 1\right)
$$

$$
\begin{aligned}
S_5 &= 7 + 49 + 343 + 2301 + 16807 \\
&= 7\left(1 + 7 + 49 + 343 + 2301\right) \\
&= 7 \times 2801 \\
&= 19607
\end{aligned}
$$



【公式探究】

设等比数列 $\{a_n\}$，首项 a_1，公比为 q，其前 n 项和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

方程法：$S_n = a_1 + a_1 q + a_2 q + \cdots + a_{n-1} q$

$$S_n = a_1 + q(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

$$S_n = a_1 + q(S_n - a_n)$$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q} & , q \neq 1 \\ n a_1 & , q = 1 \end{cases}$$

【公式探究】几何原本

如果$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是等比数列

Euclid
(325B.C.~265B.C.)

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\frac{a_2-a_1}{a_1}=\frac{a_3-a_2}{a_2}=\cdots=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$$

$$\frac{a_2-a_1}{a_1}=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{a_1(a_{n+1}-a_1)}{a_2-a_1}(a_1\neq a_2)$$

【公式探究】

设等比数列$\{a_n\}$，首项a_1，公比为q，其前n项和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

合比定理：$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q$

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}=\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$$

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1\\ na_1, & q=1\end{cases}$$

【公式探究】

设等比数列 $\{a_n\}$，首项 a_1，公比为 q，其前 n 项和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

错位相减法：$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$

$$-)\quad qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n$$

$$(1-q)S_n = a_1 + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-1\text{个}} - a_1q^n$$

构造常数列

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & ,q \neq 1 \\ na_1 & ,q = 1 \end{cases}$$

【小结】

一个中心：

等比数列前n项和公式的推导及运用。

两个基本点：

（1）重要的求和方法：方程法；比例法；错位相减法；

（2）重要的思想方法：特殊到一般、类比与转化、分类讨论的思想方法.

教学案例—等比数列求和公式

二、数学与其他学科的整合

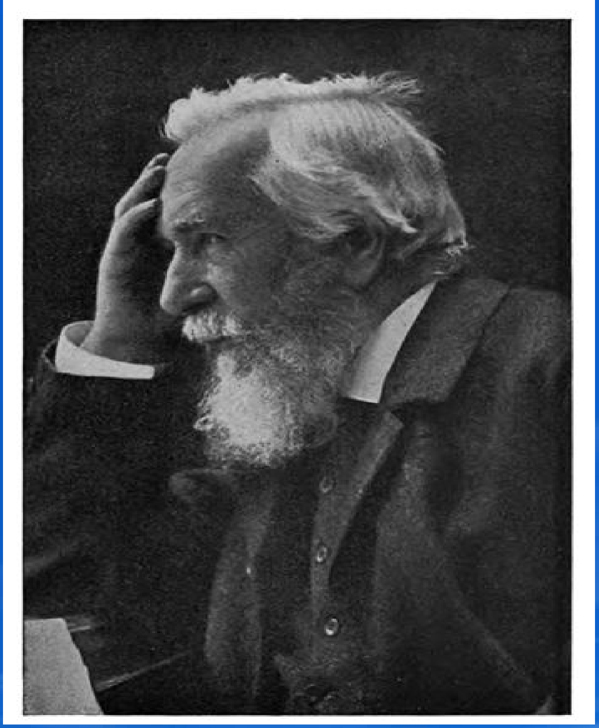
1、数学学科内部的整合

数学史与高中数学教学

5）走进一个领域

1859年，达尔文发表进化论。

在此基础上，海克尔提出一个生物发生学定律：**“个体发育史重蹈种族发展史”**，并将该定律运用于心理学领域，指出“儿童的心理发展不过是种族进化的简短重复而已”。该定律被运用于数学教育，便诞生了**历史发生原理**。



E. Haeckel (1834-1919)

二、数学与其他学科的整合

二、数学与其他学科的整合

二、数学与其他学科的整合

- 研究发现：学生比较无穷集合所用的策略

类型1 集合A与集合B中的元素个数均为无穷，所以元素一样多。

类型2 集合A与集合B的元素都是无穷多，无法比较。

类型3 集合B是集合A的真子集，集合A中的元素比集合B中的元素多。

类型4 集合A与B之间存在一一对应关系，两个集合中的元素一样多。

二、数学与其他学科的整合

瑞士大数学家欧拉（L. Euler, 1707～1783）曾经遇到这样的题目：求$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}$。

欧拉的结果是：$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$ 。

丹麦著名数学家邹腾（H. G. Zeuthen, 1839～1920）在大学考试中也遇到类似题目：求$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 。

邹腾的答案是$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 。你认为欧拉和邹腾的答案对吗？请发表任何评论。

二、数学与其他学科的整合

二、数学与其他学科的整合

英国数学史专家福韦尔（J.Fauvel 1951~2000）总结了数学教学中运用数学史的理由：

（1）增加学生的学习动机；

（2）改编学生的数学观；

（3）因为知道并非只有他们有困难，因而得到安慰；

（4）使数学不那么可怕；

（5）有助于保持对数学的兴趣；

（6）给予数学以人文的一面；

（7）有助于解释数学在社会中的作用；

（8）有助于发展多元文化进路；

（9）历史发展有助于安排课程内容顺序；

（10）告诉学生概念的如何发展，有助于他们对概念的理解；

（11）通过改进方法的比较，确立现代方法的价值；

（12）提供探究的机会；

（13）过去的发展障碍有助于解释今天学生的学习障碍；

（14）培养优秀学生的远见卓识；

（15）提供跨学科合作的机会。