第三章　空间向量与立体几何

3.1.5　空间向量运算的坐标表示

金太阳教育 SUNDUCATION

东哥数学制作

设计思路

本节课主要学习空间直角坐标系，空间向量运算的坐标表示. 本课件以复习平面向量运算的坐标表示入手，提出了新问题：空间向量运算的坐标表示，引入新课。以学生自我探究为主，运用类比的思想学习空间向量运算的坐标表示，教会学生准确的建立坐标系，用空间向量坐标解决空间几何的线面关系. 通过用空间向量解决简单的立体几何中的平行、垂直、夹角、距离(模)等问题，培养学生的观察能力和探索能力, 总结一般性方法. 提高学生运用坐标法解决几何问题的能力，懂得欣赏数学的“简洁美”，并渗透数形结合和等价转化的数学思想方法.

通过平面向量运算的有关方法, 引出空间向量的运算, 进一步体会“二维”与“三维”的关系. 如何建立坐标系, 求解坐标才更简单. 例1是空间向量的坐标运算；例2是利用空间向量求角；例3求角，例4是证明两条直线的垂直。

新课导入

空间向量运算的坐标表示又是怎样的呢？

复习平面向量运算的坐标表示：

设$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$则

类比是我们探究规律的重要方法

$\vec{a}+\vec{b}=$ (a_1+b_1,a_2+b_2)；$\vec{a}-\vec{b}=$ (a_1-b_1,a_2-b_2)；

$\lambda\vec{a}=$ $(\lambda a_1,\lambda a_2)$；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $a_1b_1+a_2b_2$；

$|\vec{a}|=$ $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ $=$ $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$；

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\underline{\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}=\underline{\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}};$$

$$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\underline{\vec{a}=\lambda\vec{b}\,(\lambda\in R)}\Leftrightarrow\underline{a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2(\lambda\in R)},$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}\Leftrightarrow\underline{a_1b_1+a_2b_2=0}$$

新课讲授

问题探究－向量的直角坐标运算

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$则

$\vec{a}+\vec{b}=$ $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

$\vec{a}-\vec{b}=$ $(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

$\lambda\vec{a}=$ $(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),(\lambda\in R)$；

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow$ $\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)$；

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$；

问题探究二 距离与夹角

1. 距离公式

（1）向量的长度（模）公式

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=b_1^2+b_2^2+b_3^2$$

注意：此公式的几何意义是表示长方体的对角线的长度。

（2）空间两点间的距离公式

在空间直角坐标系中，已知 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB} = \underline{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \underline{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\boxed{d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

2. 两个向量夹角公式

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};$$

注意：

（1）当 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=1$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；

（2）当 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=-1$ 时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向；

（3）当 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=0$ 时，$\vec{a}\perp\vec{b}$。

思考： 当 $0<\cos<\vec{a},\vec{b}><1$ 及 $-1<\cos<\vec{a},\vec{b}><0$ 时，夹角在什么范围内？

东哥数学制作

典例展示

例1. 已知$\vec{a}=(2,-3,5),\vec{b}=(-3,1,-4)$

求$\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},|\vec{a}|,8\vec{a},\vec{a}\cdot\vec{b}$

解:

$$\vec{a}+\vec{b}=(2,-3,5)+(-3,1,-4)=(-1,-2,1)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(2,-3,5)-(-3,1,-4)=(5,-4,9)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$$

$$8\vec{a}=8(2,-3,5)=(16,-24,40)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,-3,5)\cdot(-3,1,-4)=2\times(-3)+(-3)\times1+5\times(-4)=-29$$

东哥数学制作

练习一：

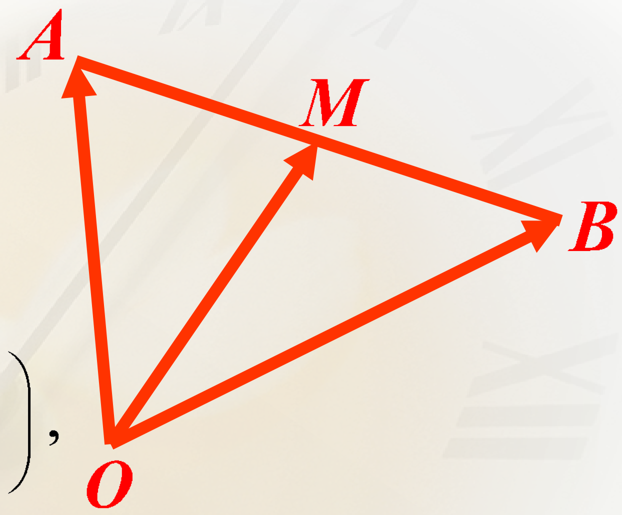
1.求满足下列条件的求知数的值：

$(1)\ \boldsymbol{a}=(2,-3,z)$ ， $\boldsymbol{b}=(4,y,2\sqrt{3})$ 且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，求 y,z 的值

$(2)\ \boldsymbol{a}=(-1,6,1)$ ， $\boldsymbol{b}=(2,-3,z)$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 z 的值

例2 已知$A(3,3,1)$、$B(1,0,5)$，求：

（1）线段 AB 的中点坐标和长度；



解： 设 $M(x,y,z)$是 AB 的中点，则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\left[(3,3,1)+(1,0,5)\right]=\left(2,\frac{3}{2},3\right),$$

$\therefore$ 点M 的坐标是 $\left(2,\dfrac{3}{2},3\right)$.

$$d_{A,B}=\sqrt{(1-3)^2+(0-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{29}\ .$$

例2　已知$A(3,3,1)$、$B(1,0,5)$，求：

（2）到 A 、B两点距离相等的点 $P(x,y,z)$ 的坐标 x,y,z 满足的条件。

解：点 $P(x,y,z)$到 A 、B 的距离相等，则

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-5)^2},$$

化简整理，得 $4x+6y-8z+7=0$

即到 A 、B两点距离相等的点的坐标 (x,y,z)满足的条件是 $4x+6y-8z+7=0$