

湖湘教育三新探索协作体 2024 届高三第六次月考数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

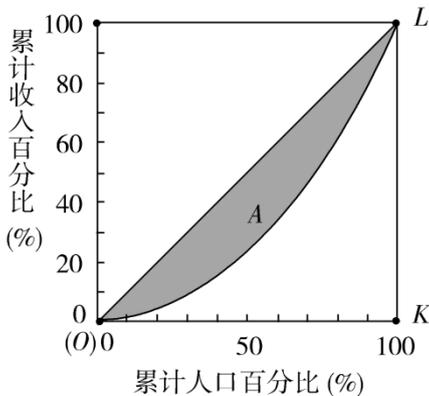
1. 在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 θ 顶点在坐标原点，始边为 x 轴正半轴，终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$ ，则

$$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2. 为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示. 劳伦茨曲线为直线 OL 时，表示收入完全平等. 劳伦茨曲线为折线 OKL 时，表示收入完全不平等. 记区域 A 为不平等

区域， a 表示其面积， S 为 $\triangle OKL$ 的面积，将 $Gini = \frac{a}{S}$ 称为基尼系数.



对于下列说法：

- ① Gini 越小，则国民分配越公平；
- ② 设劳伦茨曲线对应的函数为 $y = f(x)$ ，则对 $\forall x \in (0,1)$ ，均有 $\frac{f(x)}{x} > 1$ ；
- ③ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^2 (x \in [0,1])$ ，则 $Gini = \frac{1}{4}$ ；
- ④ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^3 (x \in [0,1])$ ，则 $Gini = \frac{1}{2}$ 。

其中正确的是：

- A. ①④ B. ②③ C. ①③④ D. ①②④

3. 设一个正三棱柱 $ABC-DEF$ ，每条棱长都相等，一只蚂蚁从上底面 ABC 的某顶点出发，每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点，算一次爬行，若它选择三个方向爬行的概率相等，若蚂蚁爬行 10 次，仍然在上底面的概率为 P_{10} ，则 P_{10} 为 ()

- A. $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \frac{1}{2}$
 C. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11} - \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \frac{1}{2}$

4. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”，用现代式子表示即为：在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ 。根据此公式，若 $a \cos B + (b + 3c) \cos A = 0$ ，

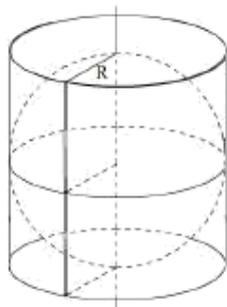
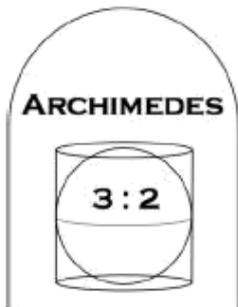
且 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

5. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{a} - x (a > 0)$ ，若函数 $y = f(x)$ 的图象恒在 x 轴的上方，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ B. $(0, e)$ C. $(e, +\infty)$ D. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

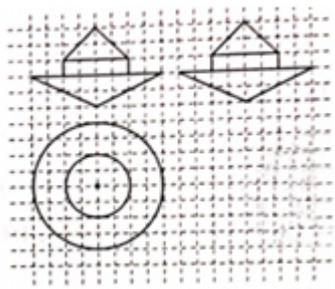
6. 阿基米德（公元前 287 年—公元前 212 年）是古希腊伟大的哲学家、数学家和物理学家，他和高斯、牛顿并列被称为世界三大数学家。据说，他自己觉得最为满意的一个数学发现就是“圆柱内切球体的体积是圆柱体积的三分之二，并且球的表面积也是圆柱表面积的三分之二”。他特别喜欢这个结论，要求后人在他的墓碑上刻着一个圆柱容器里放了一个球，如图，该球顶天立地，四周碰边，表面积为 54π 的圆柱的底面直径与高都等于球的直径，则该球的体积为 ()



- A. 4π B. 16π C. 36π D. $\frac{64\pi}{3}$

7.

陀螺是中国民间较早的娱乐工具之一，但陀螺这个名词，直到明朝刘侗、于奕正合撰的《帝京景物略》一书中才正式出现.如图所示的网格纸中小正方形的边长均为1，粗线画出的是一个陀螺模型的三视图，则该陀螺模型的表面积为()



- A. $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 4)\pi$ B. $(8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 4)\pi$
 C. $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 16)\pi$ D. $(8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 16)\pi$

8. 已知 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, $\vec{AP} = \vec{PQ}$, 过点 P 作与 AP 垂直的直线 l 交直线 QB 于点 M , 若点 M 的横坐标为 x , 则 $|x|$ 的取值范围是()

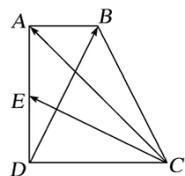
- A. $|x| \geq 1$ B. $|x| > 1$ C. $|x| \geq 2$ D. $|x| \geq \sqrt{2}$

9. 设 \vec{a} , \vec{b} 是非零向量, 若对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都有 $|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a} - \lambda\vec{b}|$ 成立, 则

- A. $\vec{a} // \vec{b}$ B. $\vec{a} \perp \vec{b}$ C. $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$ D. $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$

10. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB // DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = 2AB$, E 为 AD 的中点, 若

$\vec{CA} = \lambda\vec{CE} + \mu\vec{DB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的值为()



- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

11. 已知 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 是平面内三个单位向量, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{c}| + |3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}|$ 的最小值()

- A. $\sqrt{29}$ B. $\sqrt{29} - 3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{19} - 2\sqrt{3}$ D. 5

12. 已知数列 $a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$ 是首项为 8, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 则 a_3 等于()

- A. 64 B. 32 C. 2 D. 4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点且 $\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AP}$, 在 $\triangle ABC$ 内任取一点, 则此点取自 $\triangle PBC$ 内的概率是_____

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{5}{4}$, 则该双曲线的渐近线方程为 _____.

15. 设集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

16. 已知关于 x 的不等式 $(ax - a^2 - 4)(x - 4) > 0$ 的解集为 A , 且 A 中共含有 n 个整数, 则当 n 最小时实数 a 的值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 中国古建筑中的窗饰是艺术和技术的统一体, 给人以美的享受. 如图 (1) 为一花窗; 图 (2) 所示是一扇窗中的一格, 呈长方形, 长 30 cm, 宽 26 cm, 其内部窗芯 (不含长方形边框) 用一种条形木料做成, 由两个菱形和六根枝条构成, 整个窗芯关于长方形边框的两条对称轴成轴对称. 设菱形的两条对角线长分别为 x cm 和 y cm, 窗芯所需条形木料的长度之和为 L .

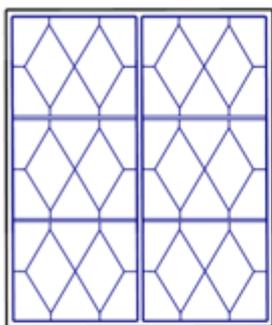


图 1

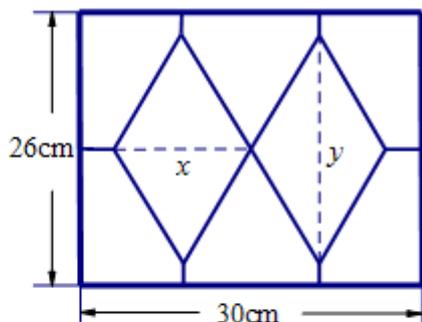


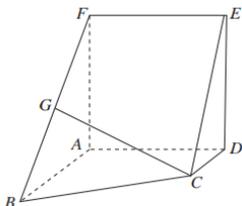
图 2

(1) 试用 x, y 表示 L ;

(2) 如果要求六根枝条的长度均不小于 2 cm, 每个菱形的面积为 130 cm^2 , 那么做这样一个窗芯至少需要多长的条形木料 (不计榫卯及其它损耗)?

18. (12 分) 如图所示的几何体中, 面 $ADEF \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ADEF$ 为正方形, 四边形 $ABCD$ 为梯形,

$AB \parallel CD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $AB = AD = 2CD = 4$, G 为 BF 中点.



(1) 证明: $CG \parallel$ 面 $ADEF$;

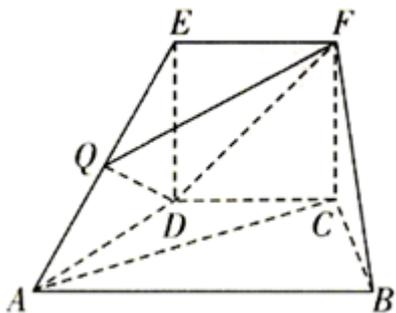
(2) 求二面角 $A-BF-C$ 的余弦值.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - ax + 1} (a \geq 0)$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 试求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线;

(2) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

20. (12分) 在如图所示的几何体中, 面 $CDEF$ 为正方形, 平面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB = 2BC$, 点 Q 为 AE 的中点.



(1) 求证: $AC \parallel$ 平面 DQF ;

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AC \perp FB$, 求 BC 与平面 DQF 所成角的正弦值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^{ax} \sin x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $a = 1$, 对 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 恒有 $f(x) \geq bx$ 成立, 求实数 b 的最小值.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若 $m > n > 0$, 且 $m^n = n^m$, 求证: $mn > e^2$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据单位圆以及角度范围，可得 m ，然后根据三角函数定义，可得 $\sin \theta, \cos \theta$ ，最后根据两角和的正弦公式，二倍角公式，简单计算，可得结果.

【详解】

由题可知： $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + m^2 = 1$ ，又 θ 为锐角

所以 $m > 0$ ， $m = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

根据三角函数的定义： $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

所以 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -\frac{3}{5}$

由 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\theta \sin \frac{\pi}{4}$

所以 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

故选：A

【点睛】

本题考查三角函数的定义以及两角和正弦公式，还考查二倍角的正弦、余弦公式，难点在于公式的计算，识记公式，简单计算，属基础题.

2、A

【解析】

对于①，根据基尼系数公式 $\text{Gini} = \frac{a}{S}$ ，可得基尼系数越小，不平等区域的面积 a 越小，国民分配越公平，所以①正确.

对于②，根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线，由图得 $\forall x \in (0,1)$ ，均有 $f(x) < x$ ，可得 $\frac{f(x)}{x} < 1$ ，所以②错误.对

于③，因为 $a = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ ，所以 $\text{Gini} = \frac{a}{S} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ ，所以③错误.对于④，因为

$$a = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } Gini = \frac{a}{S} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \textcircled{4} \text{ 正确. 故选 A.}$$

3、D

【解析】

由题意, 设第 n 次爬行后仍然在上底面的概率为 P_n . ①若上一步在上面, 再走一步要想不掉下去, 只有两条路, 其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$; ②若上一步在下面, 则第 $n-1$ 步不在上面的概率是 $1-P_{n-1}$. 如果爬上来, 其概率是 $\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$, 两种事件又是互斥的, 可得 $P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1-P_{n-1})$, 根据求数列的通项知识可得选项.

【详解】

由题意, 设第 n 次爬行后仍然在上底面的概率为 P_n .

①若上一步在上面, 再走一步要想不掉下去, 只有两条路, 其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1} (n \geq 2)$;

②若上一步在下面, 则第 $n-1$ 步不在上面的概率是 $1-P_{n-1} (n \geq 2)$. 如果爬上来, 其概率是 $\frac{1}{3}(1-P_{n-1}) (n \geq 2)$,

两种事件又是互斥的, $\therefore P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1-P_{n-1})$, 即 $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}$, $\therefore P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(P_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$,

\therefore 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 而 $P_1 = \frac{2}{3}$, 所以 $P_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$,

\therefore 当 $n=10$ 时, $P_{10} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 + \frac{1}{2}$,

故选: D.

【点睛】

本题考查几何体中的概率问题, 关键在于运用递推的知识, 得出相邻的项的关系, 这是常用的方法, 属于难度题.

4、A

【解析】

根据 $a \cos B + (b+3c) \cos A = 0$, 利用正弦定理边化为角得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$, 整理为

$\sin C(1+3 \cos A) = 0$, 根据 $\sin C \neq 0$, 得 $\cos A = -\frac{1}{3}$, 再由余弦定理得 $bc = 3$, 又 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$, 代入公式

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right)^2 \right]} \text{ 求解.}$$

【详解】

由 $a \cos B + (b + 3c) \cos A = 0$ 得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$,

即 $\sin(A + B) + 3 \sin C \cos A = 0$, 即 $\sin C(1 + 3 \cos A) = 0$,

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos A = -\frac{1}{3}$,

由余弦定理 $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A = \frac{2}{3}bc = 2$, 所以 $bc = 3$,

由 $\triangle ABC$ 的面积公式得 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} (3^2 - 1^2)} = \sqrt{2}$

故选: A

【点睛】

本题主要考查正弦定理和余弦定理以及类比推理, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题.

5、B

【解析】

函数 $y = f(x)$ 的图象恒在 x 轴的上方, $\frac{e^x}{a} - x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 即 $\frac{e^x}{a} > x$, 即函数 $y = \frac{e^x}{a}$ 的图象在直线 $y = x$

上方, 先求出两者相切时 a 的值, 然后根据 a 变化时, 函数 $y = \frac{e^x}{a}$ 的变化趋势, 从而得 a 的范围.

【详解】

由题 $\frac{e^x}{a} - x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 即 $\frac{e^x}{a} > x$,

$y = \frac{e^x}{a}$ 的图象永远在 $y = x$ 的上方,

设 $y = \frac{e^x}{a}$ 与 $y = x$ 的切点 (x_0, y_0) , 则 $\begin{cases} \frac{e^{x_0}}{a} = 1 \\ \frac{e^{x_0}}{a} = x_0 \end{cases}$, 解得 $a = e$,

易知 a 越小, $y = \frac{e^x}{a}$ 图象越靠上, 所以 $0 < a < e$.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数图象与不等式恒成立的关系，考查转化与化归思想，首先函数图象转化为不等式恒成立，然后不等式恒成立再转化为函数图象，最后由极限位置直线与函数图象相切得出参数的值，然后得出参数范围.

6、C

【解析】

设球的半径为 R ，根据组合体的关系，圆柱的表面积为 $S = 2\pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 54\pi$ ，解得球的半径 $R = 3$ ，再代入球的体积公式求解.

【详解】

设球的半径为 R ，

根据题意圆柱的表面积为 $S = 2\pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 54\pi$ ，

解得 $R = 3$ ，

所以该球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积和体积，还考查了对数学史了解，属于基础题.

7、C

【解析】

根据三视图可知，该几何体是由两个圆锥和一个圆柱构成，由此计算出陀螺的表面积.

【详解】

最上面圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$ ，底面周长为 $2\pi \times 2 = 4\pi$ ，侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\pi = 4\sqrt{2}\pi$ ，下面圆锥的母线长为 $2\sqrt{5}$ ，底面周长为 $2\pi \times 4 = 8\pi$ ，侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 8\pi = 8\sqrt{5}\pi$ ，没被挡住的部分面积为 $\pi \times 4^2 - \pi \times 2^2 = 12\pi$ ，中间圆柱的侧面积为 $2\pi \times 2 \times 1 = 4\pi$. 故表面积为 $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 16)\pi$ ，故选 C.

【点睛】

本小题主要考查中国古代数学文化，考查三视图还原为原图，考查几何体表面积的计算，属于基础题.

8、A

【解析】

由题意得 $\|MB\| - \|MA\| = \|BQ\| = 2\|OP\|$ ，即可得点 M 的轨迹为以 A, B 为左、右焦点， $a = 1$ 的双曲线，根据双曲线的性质即可得解.

【详解】

如图，连接 OP ， AM ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/928136123122006143>