1.3.3　函数的最大（小）值与导数

K知识

1．函数的最值与导数

一般地，如果在区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条________的曲线，那么它必有最大值与最小值.

2．求函数最值的步骤

求函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值的步骤如下：

（1）求函数$y=f(x)$在(a,b)内的________；

（2）将函数$y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a),f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

K知识参考答案：

1．连续不断　　2．极值

K重点

K—重点	利用导数求函数最值的方法、函数最值的应用
K—难点	函数的最大值、最小值与函数的极大值、极小值的区别与联系，恒成立问题
K—易错	求最值时，易忽略函数的定义域

一　K重点　求函数的最值

求函数最值的步骤是：⑴求函数$y=f(x)$在$(a，b)$内的极值；⑵将函数$y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$进行比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值．其中准确求出函数的极值是解题的关键．需注意：⑴要在定义域（给定区间）内列表；⑵极值不一定是最值，一定要将极值与区间端点值比较，必要时需进行分类讨论.

例1　已知函数$f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，其中$a,b\in\mathbf{R}$，$e=2.718\,28\ldots$为自然对数的底数．设$g(x)$是函数$f(x)$的导函数，求函数$g(x)$在区间$[0,1]$上的最小值.

【答案】见解析.

【解析】由 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，有$g(x)=f'(x)=e^x-2ax-b$，所以$g'(x)=e^x-2a$.

因此，当$x\in[0,1]$时，$g'(x)\in[1-2a,e-2a]$.

当$a\le\frac{1}{2}$时，$g'(x)\ge 0$，所以$g(x)$在区间$[0,1]$上单调递增.

因此$g(x)$在$[0,1]$上的最小值是$g(0)=1-b$；

当$a\ge\frac{e}{2}$时，$g'(x)\le 0$，所以$g(x)$在区间$[0,1]$上单调递减.

因此$g(x)$在$[0,1]$上的最小值是$g(1)=e-2a-b$；

当$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$时，令$g'(x)=0$，得$x=\ln(2a)\in(0,1)$.

所以函数$g(x)$在区间$[0,\ln(2a)]$上单调递减，在区间$(\ln(2a),1]$上单调递增.

于是，$g(x)$在$[0,1]$上的最小值是$g(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)-b$.

综上所述，当$a\le\frac{1}{2}$时，$g(x)$在$[0,1]$上的最小值是$g(0)=1-b$；

当$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$时，$g(x)$在$[0,1]$上的最小值是$g(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)-b$；

当$a\ge\frac{e}{2}$时，$g(x)$在$[0,1]$上的最小值是$g(1)=e-2a-b$.

【名师点睛】（1）若所给区间是开区间，则函数不一定有最大值和最小值；（2）函数的最大（小）值最多只能有一个，而最大（小）值点却可以有多个.

二 K重点 函数最值的应用

由函数的最值确定参数的问题一般采用待定系数法，由已知条件列出含参数的方程或者方程组，从而求得参数的值.

例 2 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+a\ln x,a\in\mathbf{R}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（2）当$x\in[\frac{1}{2},1]$时，$f(x)$ 的最小值是0，求实数a 的值.

【答案】（1）见解析；（2）$a=\dfrac{2}{\ln 2}$．

【解析】（1）$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{ax-1}{x^2}$，$x>0$，

当$a\le 0$时，$f'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

则 $f(x)$ 的单调递减区间为$(0,+\infty)$；

当$a>0$时，令$f'(x)<0$，得$0<x<\dfrac{1}{a}$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为$(0,\dfrac{1}{a})$．

（2）当$a\le 1$时，$f(x)$在$[\dfrac{1}{2},1]$上单调递减，则$f(x)_{\min}=f(1)=1\ne 0$；

当$a\ge 2$时，$f(x)$在$[\dfrac{1}{2},1]$上单调递增，

则$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{2})=2+a\ln\dfrac{1}{2}=0$，解得$a=\dfrac{2}{\ln 2}\ge 2$；

当$1<a<2$时，$f(x)$在$[\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{a}]$上单调递减，在$[\dfrac{1}{a},1]$上单调递增，

则$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{a})=a+a\ln\dfrac{1}{a}=0$，解得$a=e$，舍去．

综上，得$a=\dfrac{2}{\ln 2}$．

【名师点睛】本题中的参数a对函数的单调性有影响，从而影响函数的最值，因此需要对a进行分类讨论．

三 K难点 恒成立问题

利用函数的最值解决不等式恒成立问题是函数最值的重要应用．要使不等式 $f(x)<a$ 在区间$[m，n]$上恒成立，可先在区间$[m，n]$上求出函数的最大值$f(x)_{max}$，只要$a>f(x)_{max}$，则上面的不等式恒成立．同理，要使不等式 $f(x)>a$ 在区间$[m，n]$上恒成立，可先在区间$[m，n]$上求出函数的最小值 $f(x)_{min}$，只要 $f(x)_{min}>a$，则不等式 $f(x)>a$ 恒成立.

例 3 若函数$f(x)=ke^x-\dfrac{1}{2}x^2$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，则实数$k$的取值范围是

A．$(\dfrac{1}{e},+\infty)$　　B．$(0,+\infty)$

C．$[\dfrac{1}{e},+\infty)$　　D．$[0,+\infty)$

【答案】C

【解析】因为 $f(x)=ke^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=ke^x-x$．

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=ke^x-x\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $k\ge\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{max}=g(1)=\frac{1}{e}$，所以 $k\ge\frac{1}{e}$.

故实数 k 的取值范围是 $[\frac{1}{e},+\infty)$．故选 C.

例 4 已知函数 $f(x)=e^x-x$．

（1）求 $f(x)$ 的极小值；

（2）对 $\forall x\in(0,+\infty), f(x)>ax$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）极小值为1；（2）$(-\infty,e-1)$．

【解析】（1）$f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$．

当 x 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

则 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1$．

（2）当 $x>0$ 时，$\frac{e^x}{x}-1>a$ 恒成立．

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-1, x>0$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=1$．

当 x 变化时，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

则$g(x)_{min}=g(1)=e-1$，故实数a 的取值范围是$(-\infty,e-1)$.

【名师点睛 】对于由不等式恒成立求参的问题，可采用分离参数法，即将参数移至不等式的一端，化成 $a\geq f(x)$ 或$a\leq f(x)$ 的形式，然后利用导数求出函数 $f(x)$ 的最值，则由$a\geq f(x)_{max}$ 或$a\leq f(x)_{min}$ 即可求出参数a 的取值范围.

四 K 易错 因未验根而致误

例 5 已知$f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$在$x=-1$时有极值 0，求常数 a，b 的值.

【错解】因为$f(x)$在$x=-1$时有极值 0 且$f'(x)=3x^2+6ax+b$，

所以$\begin{cases}f'(-1)=0\\f(-1)=0\end{cases}$，即$\begin{cases}3-6a+b=0\\-1+3a-b+a^2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=2\\b=9\end{cases}$.

【错因分析】解出 a，b 的值后，未验证$x=-1$两侧函数的单调性而导致产生增根.

【正解】因为$f(x)$在$x=-1$时有极值 0，且$f'(x)=3x^2+6ax+b$.

所以$\begin{cases}f'(-1)=0\\f(-1)=0\end{cases}$，即$\begin{cases}3-6a+b=0\\-1+3a-b+a^2=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=2\\b=9\end{cases}$.

当$a=1$，$b=3$时，$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq0$，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$ 上为增函数，无极值，故舍去.

当$a=2$，$b=9$时，$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$.

当$x\in(-\infty,-3)$时，$f(x)$为增函数；

当$x\in(-3,-1)$时，$f(x)$为减函数；

当$x\in(-1,+\infty)$时，$f(x)$为增函数.

所以$f(x)$在$x=-1$时取得极小值，

因此$a=2$，$b=9$.

【名师点睛】可导函数在$x=x_0$处的导数为 0 是该函数在$x=x_0$处取得极值的必要不充分条件，而并非充要条件，故由$f'(x)=0$求出的参数需要检验，以免出错.

K好题

K 基 础

1．下列说法正确的是

A．函数在其定义域内若有最值与极值，则其极大值便是最大值，极小值便是最小值

B．闭区间上的连续函数一定有最值，也一定有极值

C．若函数在其定义域上有最值，则一定有极值；反之，若有极值，则一定有最值

D．若函数在给定区间上有最值，则有且仅有一个最大值，一个最小值，但若有极值，则可有多个极值

2．定义在闭区间$[a,b]$上的函数$y=f(x)$有唯一的极值点$x=x_0$，且$y_{极小值}=f(x_0)$，则下列说法正确的是

A．函数$f(x)$有最小值$f(x_0)$　　B．函数$f(x)$有最小值，但不一定是$f(x_0)$

C．函数$f(x)$的最大值也可能是$f(x_0)$　　D．函数$f(x)$不一定有最小值

3．函数$f(x)=x^3-3x(|x|<1)$

A．有最大值，但无最小值　　B．有最大值，也有最小值

C．无最大值，但有最小值　　D．既无最大值，也无最小值

4．函数$y=2x^3-3x^2-12x+5$在$[-2,1]$上的最大值，最小值分别是

A．12，-8　　B．1，-8

C．12，-15　　D．5，-16

5．已知$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\cos x$，$x\in[-1,1]$，则其导函数$f'(x)$是

A．仅有最小值的奇函数　　B．既有最大值又有最小值的偶函数

C．仅有最大值的偶函数　　D．既有最大值又有最小值的奇函数

6．已知$f(x)=2x^3-6x^2+m$（m 为常数）在区间$[-2,2]$上有最大值 3，那么此函数在$[-2,2]$上的最

小值为

A. -5　　　　B. -11

C. -29　　　　D. -37

7．若函数 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$，则

A．最大值为1，最小值为$\frac{1}{2}$　　　　B．最大值为1，无最小值

C．最小值为$\frac{1}{2}$，无最大值　　　　D．既无最大值也无最小值

8．函数 $f(x)=e^x-x$ 在$[-1,1]$上的最小值是_______________.

9．函数$y=\frac{\ln x}{x}$ 的最大值为_______________.

10．函数 $f(x)=x(1-x^2)$ 在[0，1]上的最大值为_______________.

11．函数 $f(x)=x^4-2x^2-5$ 在$[-1,2]$上的最小值为_______________.

12．已知函数$f(x)=a\ln x-bx^2$，$a,b\in R$．若$f(x)$ 的图象在$x=1$处与直线$y=-\frac{1}{2}$相切.

（1）求a,b 的值；

（2）求 $f(x)$ 在$[\frac{1}{e},e]$上的最大值.

13．已知函数$f(x)=\ln x+a(1-x)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于$2a-2$ 时，求实数 a 的取值范围.

14．函数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+m$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 内没有极值点，求实数 a 的取值范围；

（2）若对任意的 $a\in[3,6]$，不等式 $f(x)\le 1$ 在 $x\in[-2,2]$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

K 能 力

15．已知函数 $f(x)=x^3-3x-1$，若对于区间[－3，2]上的任意 x_1，x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le t$，则实数 t 的最小值是

A．20

B．18

C．3

D．0

16．函数 $f(x)=\begin{cases}2x^3+3x^2+1(x\le 0)\\ e^{ax}(x>0)\end{cases}$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 2，则 a 的取值范围是

A．$[\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$

B．$[0,\frac{1}{2}\ln 2]$

C. $(-\infty,0)$　　　　　　　　　　D. $(-\infty,\frac{1}{2}\ln 2]$

17．已知$f(x)=x^3-6x^2+k$在[1，5]上有最小值为0，则$f(x)$在[1，5]上的最大值为______________.

18．已知$f(x)=-(x-1)^2+m, g(x)=xe^x$，若$\exists x_1,x_2\in R$，使得$f(x_1)\geq g(x_2)$成立，则实数$m$的取值范围是______________.

19．已知函数 $f(x)=e^x-x^2-1$，若 $f(x)\geq kx$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为______________.

20．已知函数$g(x)$的导函数$g'(x)=e^x$，且$g(0)g'(1)=e$，其中e为自然对数的底数．若存在$x\in[0,+\infty)$，使得不等式$\sqrt{x}g(x)<x-m+3$成立，则实数m的取值范围为______________.

21．已知函数$f(x)=ax^3+bx+c$在$x=2$处取得极值$c-16$.

（1）求 a，b 的值；

（2）若 $f(x)$ 有极大值 28，求 $f(x)$ 在$[-3,3]$上的最小值.

22. 已知函数$f(x)=\ln x-ax(a\in R,x>0)$.

（1）当$a=2$时，求函数$f(x)$的单调区间；

（2）当$a>0$时，求函数$f(x)$在$[1,2]$上的最小值.

23. 已知函数$f(x)=(x-2)\ln x-ax+1$.

（1）若$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递增，求实数a的取值范围；

（2）若存在正数x_0，使得$f(x_0)\le 1-\ln x_0$成立，求实数a的取值范围.

真 题

24. (2017 新课标全国III理）已知函数$f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一零点，则$a=$

A. $-\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　　　D. 1

25. (2018 新课标全国 I 理）已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则$f(x)$的最小值是________________.

26. (2018 江苏）若函数$f(x)=2x-ax^2+1(a\in R)$在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点，则$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值与最小值的和为________________.

27. (2017 新课标全国III节选）已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，当$a<0$时，证明$f(x)\le -\frac{3}{4a}-2$.

28. (2017 北京）已知函数$f(x)=e^x\cos x-x$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）求函数$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

29. (2017 新课标全国Ⅰ)已知函数$f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）若 $f(x)\ge 0$，求 a 的取值范围.