

安徽省六安第一中学 2024-2025 学年高三上学期第四次月考(11
月) 数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

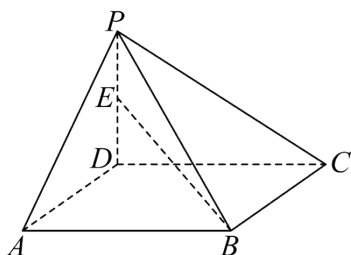
一、单选题

1. 已知 α, β 是两个不同的平面, m, n 是两条不同的直线, 下列命题不正确的是 ()

- A. 若 $m // n, m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$ B. 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha // \beta$
C. 若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $m // \alpha, \alpha \cap \beta = n$, 则 $m // n$

2. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, E 为 PD 的中点, 若

$\vec{PA} = \vec{a}, \vec{PB} = \vec{b}, \vec{PC} = \vec{c}$, 则用基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 表示向量 \vec{BE} 为 ()



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

3. 某学校高二年级选择“物化生”, “物化地”和“史地政”组合的同学人数分别为 240, 90 和 120. 现采用分层抽样的方法选出 30 位同学进行某项调查研究, 则“史地政”组合中选出的同学人数为 ()

- A. 8 B. 12 C. 16 D. 6

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$, 则 $a_8 =$ ()

- A. 48 B. 80 C. 63 D. 65

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_3 = 3$, 前 n 项和为 S_n , 若 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n}$, 则与 T_9 最接近的整数是 ()

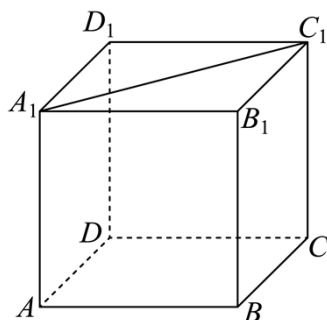
- A. 5 B. 4 C. 2 D. 1

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - a\right)n + 2, n > 8 \\ a^{n-7}, n \leq 8 \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$, 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n > a_{n+1}$, 则

实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{20}\right)$ C. $\left(\frac{13}{20}, 1\right)$ D. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

7. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是线段 A_1C_1 上一个动点, 则下列结论正确的有 ()



- A. 不存在 M 点使得异面直线 BM 与 AC 所成角为 90°
 B. 存在 M 点使得异面直线 BM 与 AC 所成角为 30°
 C. 存在 M 点使得二面角 $M - BD - C$ 的平面角为 45°
 D. 当 $4A_1M = A_1C_1$ 时, 平面 BDM 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$

8. 已知一圆柱的轴截面为正方形, 母线长为 $2\sqrt{6}$, 在该圆柱内放置一个棱长为 a 的正四面体, 并且正四面体在该圆柱内可以任意转动, 则 a 的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

二、多选题

9. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法-商功》中, 后人称为“三角垛”. “三角垛”最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, ..., 设第 n 层有 a_n 个球, 从上往下 n 层球的总数为 S_n , 则 ()



A. $S_3 = a_4$ B. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{2}$ C. $a_{n+1} - a_n = n+1$ D. $a_{10} = 55$

10. 在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置, 使得

二面角 $P-BD-C$ 是锐角, 则三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的表面积可以是 ()

A. 58π B. 45π C. 48π D. 55π

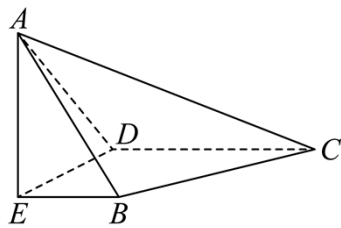
11. 对于棱长为 1 (单位: m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计), 下列说法正确的是 ()

- A. 底面半径为 1m, 高为 1m 的圆锥形罩子 (无底面) 能够罩住水平放置的该正方体
- B. 以该正方体同一顶点出发的三条棱作为圆锥的母线, 则此圆锥的母线与底面所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. 该正方体内能同时整体放入两个底面半径为 0.5m, 高为 0.8m 的圆锥
- D. 该正方体内能整体放入一个体积为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{17} \text{m}^3$ 的圆锥

三、填空题

12. 已知一组数据 1, 2, 0, -1, x , 1 的平均数是 1, 则这组数据的中位数为_____.

13. 已知四棱锥 $A-EBCD$, $AE \perp$ 平面 $BCDE$, 底面 $EBCD$ 是 $\angle E$ 为直角, $EB \parallel DC$ 的直角梯形, 如图所示, 且 $CD = 2EB = 2AE = 4$, $DE = 2\sqrt{3}$, 点 F 为 AD 的中点, 则 F 到直线 BC 的距离为_____.



14. 若在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3, BC = 2, AA_1 = 4$. 则四面体 ABB_1C_1 与四面体 A_1C_1BD 公共部分的体积为_____.

四、解答题

15. 设三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 且 $\sin(B+C) = 2\sqrt{3}\sin^2 \frac{A}{2}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2)若 $b=3$, BC 边上的高为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 求三角形 ABC 的周长.

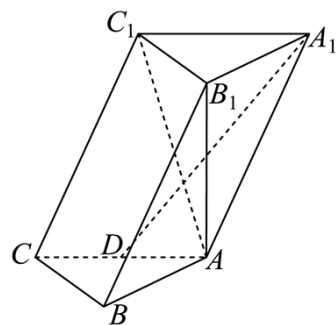
16. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3^n + b$.

(1)求 b, a_1 的值;

(2)设 $c_n = a_{2n} + 2n - 1, n=1, 2, 3, \dots$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

17. 如图所示, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC = AB_1 = 2, AB_1 \perp$ 平面 ABC ,

$AC_1 \perp AC, D$ 点是 AC 的中点



(1)证明: $AC \perp B_1C_1$;

(2)求 A_1D 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.

18. 如图 1, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD = 8, BC = 4, \angle DAB = 60^\circ$, 点 E, F 在以 AD

为直径的半圆上, 且 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{PD}$, 将半圆沿 AD 翻折如图 2.

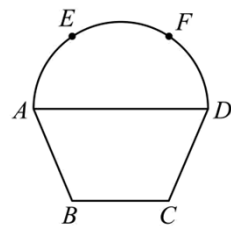


图1

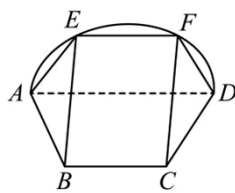


图2

(1)求证: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$;

(2)当多面体 $ABE - DCF$ 的体积为 32 时, 求平面 ABE 与平面 CDF 夹角的余弦值.

19. 若存在非零常数 t , 使得数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_1 a_2 a_3 \dots a_n = t (n \geq 1, n \in \mathbf{N})$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“ $H(t)$ 数列”.

(1)判断数列: 1, 3, 5, 11, 152 是否为“ $H(2)$ 数列”, 并说明理由;

(2)若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的“ $H(t)$ 数列”, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足

$\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 a_3 \dots a_n + \log_2 b_n$, 求 t 的值和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是“ $H(t)$ 数列”, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 > 1, t > 0$, 证明:

$$t > S_{n+1} - S_n - e^{S_n - n}$$

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	C	C	C	D	D	ACD	AD
题号	11									
答案	BCD									

1. D

【分析】利用空间线面位置关系逐项分析判断即可.

【详解】若 $m // n, m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$, 故 A 选项正确;

由 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 可以推出 $\alpha // \beta$, 故 B 选项正确;

由平面与平面垂直的判定定理可知, 若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$, 故 C 选项正确;

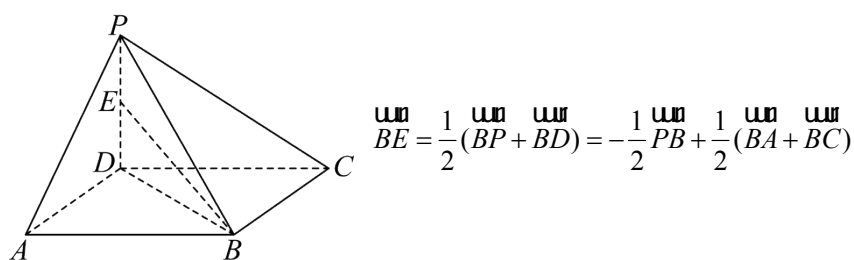
$m // \alpha, \alpha \perp \beta = n$, 则 $m // n$ 或 m, n 异面, 故 D 不正确.

故选: D.

2. C

【分析】根据空间向量的加法、减法、数乘运算求解即可.

【详解】连接 BD , QE 为 PD 的中点,



$$\vec{BE} = \frac{1}{2}(\vec{BP} + \vec{BD}) = -\frac{1}{2}\vec{PB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{PB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{PB} + \frac{1}{2}(\vec{PA} - \vec{PB}) + \frac{1}{2}(\vec{PC} - \vec{PB})$$

$$= -\frac{3}{2}\vec{PB} + \frac{1}{2}\vec{PA} + \frac{1}{2}\vec{PC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

故选: C.

3. A

【分析】根据分层抽样的定义列出式子, 进行求解.

【详解】由题意得, 史地政”组合中选出的同学人数为 $30 \times \frac{120}{240+90+120} = 8$.

故选: A

4. C

【分析】首先递推公式变形, 结合等差数列的定义, 即可求解.

【详解】数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n+1}+1$, 则: $a_{n+1}+1=a_n+1+2\sqrt{a_n+1}+1$,

整理得: $(\sqrt{a_{n+1}+1})^2=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$, 所以: $\sqrt{a_{n+1}+1}=\sqrt{a_n+1}+1$,

即: $\sqrt{a_{n+1}+1}-\sqrt{a_n+1}=1$ (常数),

所以数列 $\{\sqrt{a_n+1}\}$ 是以 $\sqrt{a_1+1}=1$ 为首项, 1为公差的等差数列.

则: $\sqrt{a_n+1}=1+(n-1)=n$, 整理得: $a_n=n^2-1$ (首项符合通项), 则: $a_n=n^2-1$,

所以: $a_8=64-1=63$.

故选: C

5. C

【分析】求出等差数列的前 n 项, 然后由裂项相消法求得 T_n 即可得 T_9 , 从而得出结论.

【详解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d=\frac{a_3-a_1}{2}=\frac{3-1}{2}=1$,

所以 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

则 $T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\dots+\frac{1}{S_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$, $T_9=2\times\frac{9}{10}=\frac{9}{5}$,

则与 T_9 最接近的整数是2.

故选: C.

6. C

【分析】根据分段函数的单调性列出不等式组求解即可.

【详解】由对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n>a_{n+1}$ 知, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,

所以只需满足
$$\begin{cases} \frac{1}{2}-a < 0 \\ 0 < a < 1 \\ a_8 = a > a_9 = \frac{13}{2}-9a \end{cases}, \text{解得 } \frac{13}{20} < a < 1,$$

故选: C

7. D

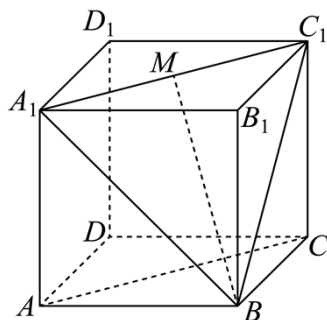
【分析】异面直线 BM 与 AC 所成的角可转化为直线 BM 与 A_1C_1 所成角, 由当 M 为 A_1C_1 的中

点时判断选项A; 当 M 与 A_1 或 C_1 重合时, 直线 BM 与 AC 所成的角最小判断选项B; 当 M

与 C_1 重合时，二面角 $M-BD-C$ 的平面角最小判断选项 C；对于 D，由 $4A_1M = A_1C_1$ ，过 M 作 $EF \parallel D_1B_1$ ，得到四边形 $EFBD$ 即为平面 BDM 截正方体所得的截面判断。

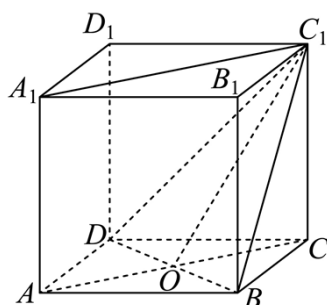
【详解】解：异面直线 BM 与 AC 所成的角可转化为直线 BM 与 A_1C_1 所成角，

如图所示：



当 M 为 A_1C_1 的中点时， $BM \perp A_1C_1$ ，此时 BM 与 AC 所成的角为 90° ，所以 A 错误；

如图所示：

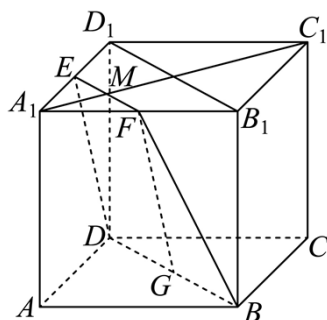


当 M 与 A_1 或 C_1 重合时，直线 BM 与 AC 所成的角最小，为 60° ，所以 B 错误；

当 M 与 C_1 重合时，二面角 $M-BD-C$ 的平面角最小， $\tan \angle C_1OC = \sqrt{2} > 1$ ，所以 $\angle C_1OC > 45^\circ$ ，

所以 C 错误；

对于 D，如图所示：



过 M 作 $EF \parallel D_1B_1$ ，交 A_1B_1 于 F ，交 A_1D_1 于 E 点，

因为 $4A_1M = A_1C_1$ ，所以 E, F 分别是 A_1D_1, A_1B_1 的中点，

又 $B_1D_1 \parallel BD$ ，所以 $EF \parallel DB$ ，四边形 $EFBD$ 即为平面 BDM 截正方体所得的截面，

因为 $EF = \frac{1}{2}D_1B_1 = \sqrt{2}$ ，且 $BF = DE = \sqrt{BB_1^2 + B_1F^2} = \sqrt{5}$ ，

所以四边形 $EFBD$ 是等腰梯形，作 $FG \perp DB$ 交 BD 于 G 点，

所以 $BG = \frac{1}{2}(BD - EF) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $FG = \sqrt{FB^2 - BG^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

所以梯形的面积为 $\frac{1}{2}(BD + EF) \times FG = \frac{9}{2}$ ，所以 D 正确。

故选：D

8. D

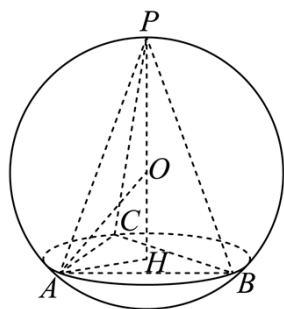
【分析】先通过圆柱的轴截面为正方形，可得该圆柱的内切球半径，再去研究球的内接正四面体，从而转化为研究正四面体的外接球问题即可。

【详解】因为圆柱的轴截面为正方形，母线长为 $2\sqrt{6}$ ，

所以圆柱的内切球半径为 $\sqrt{6}$ ，

若该圆柱内放置一个棱长为 a 的正四面体，并且正四面体在该圆柱内可以任意转动，

则该正四面体内接于该圆柱的内切球时，棱长 a 最大，如图该正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 a ，



设点 P 在面 ABC 内的射影为 H ，即 $PH \perp$ 面 ABC ，则球心 O 在 PH 上，

且 $OP = OA = \sqrt{6}$ ， $AH = \frac{2}{3}AB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，

所以 $PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，

所以 $OH = PH - OP = \frac{\sqrt{6}}{3}a - \sqrt{6}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/935003213033012004>