

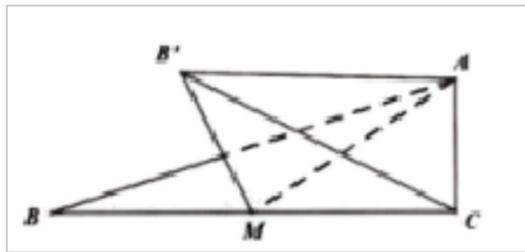
广东省中山一中等七校联合体 2025 届高考冲刺数学模拟试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是边 BC 的中点, 将 $\triangle ABM$ 沿着 AM 翻折成 $\triangle AB'M$, 且点 B' 不在平面 AMC 内, 点 P 是线段 $B'C$ 上一点. 若二面角 $P-AM-B'$ 与二面角 $P-AM-C$ 的平面角相等, 则直线 AP 经过 $\triangle AB'C$ 的 ()



- A. 重心 B. 垂心 C. 内心 D. 外心

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 1, c = 2\sqrt{3}, b \sin A = a \sin \frac{B}{3}$, 则 $\sin C$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{57}}{19}$

3. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 + \frac{ax}{e^x} - a$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 (其中 $x_1 < x_2 < x_3$), 则 $\left(1 - \frac{x_1}{e^{x_1}}\right)^2 \left(1 - \frac{x_2}{e^{x_2}}\right) \left(1 - \frac{x_3}{e^{x_3}}\right)$ 的值为 ()

- A. 1 B. -1 C. a D. $-a$

4. 已知直线 $y = k(x - 1)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 直线 $y = 2k(x - 2)$ 与抛物线 $D: y^2 = 8x$ 交于 M, N 两点, 设 $\lambda = |AB| - 2|MN|$, 则 ()

- A. $\lambda < -16$ B. $\lambda = -16$ C. $-12 < \lambda < 0$ D. $\lambda = -12$

5. 若函数 $f(x) = x \ln x - ax^2$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $0, \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}, 1$ C. $1, 2$ D. $2, e$

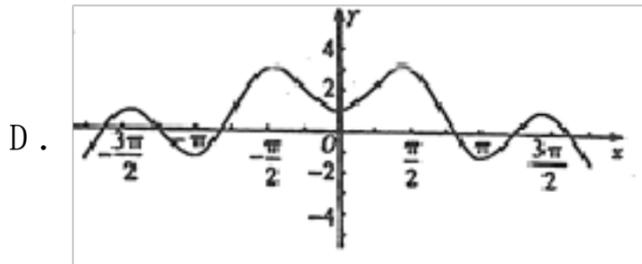
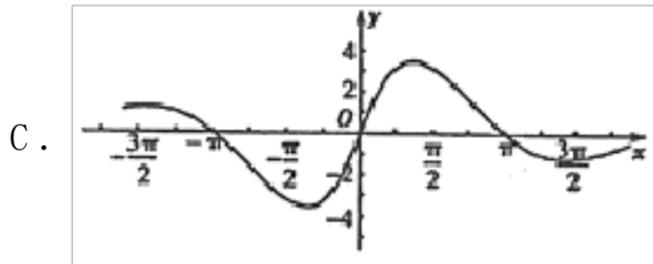
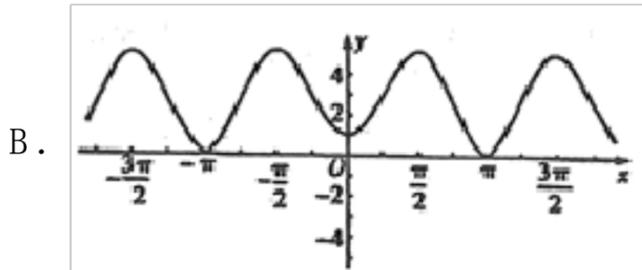
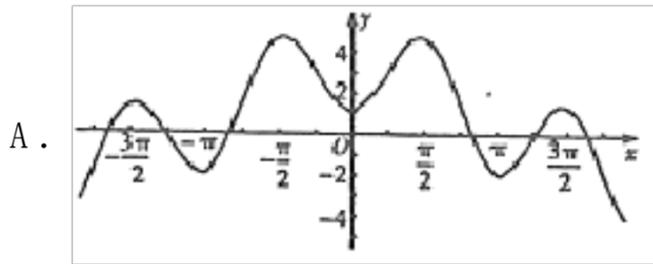
6. 设 $a = \log_8 0.2, b = \log_{0.3} 4, c = 4^{0.3}$, 则 ()

- A. $c > b > a$ B. $a > b > c$ C. $a > c > b$ D. $b > a > c$

7. 已知 $a = 5^{\frac{1}{5}}, b = \log_4 \sqrt{5}, c = \log_5 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

8. 函数 $f(x) = 6|\sin x| \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 的图象大致为 ()



9. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

10. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为矩形, $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E 在线段 BC 上, 以 AD 为直径的圆过点 E . 若 $SA = \sqrt{3}AB = 3$, 则 $\triangle SED$ 的面积的最小值为 ()

- A. 9 B. 7 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

11. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 过抛物线 C 上两点 A, B 分别作抛物线的两条切线 PA, PB , P 为两切线的交点 O 为坐标原点若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 则直线 OA 与 OB 的斜率之积为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. 3 C. $\frac{1}{8}$ D. 4

12. 已知 $y = ax + b$ 与函数 $f(x) = 2 \ln x - 5$ 和 $g(x) = x^2 - 4$ 都相切, 则不等式组 $\begin{cases} x - ay - 3 \leq 0 \\ x - by - 2 \leq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域在

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$ 内的面积为 ()

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 12

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, 6)$, $\vec{b} = (3, m)$, 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $m =$ _____.

14. 二项式 $(\sqrt{x} + \frac{1}{2x})^n$ 的展开式中所有项的二项式系数之和是 64, 则展开式中的常数项为 _____.

15. 在直角坐标系中, 某等腰直角三角形的两个顶点坐标分别为 $(1, 1)$, $(2, 2)$, 函数

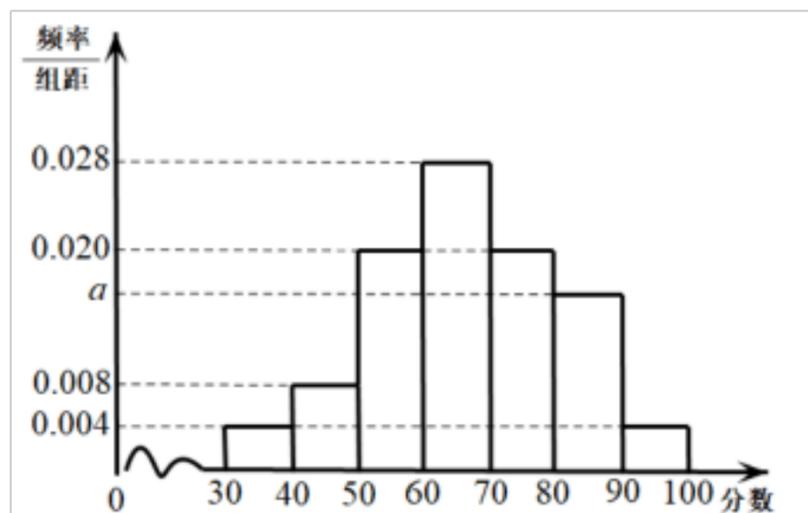
$f(x) = A \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}$ 的图象经过该三角形的三个顶点, 则 $f(x)$ 的解析式为

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值和最大值分别是_____.

16. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值和最大值分别是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 改革开放 40 年，我国经济取得飞速发展，城市汽车保有量在不断增加，人们的交通安全意识也需要不断加强.为了解某城市不同性别驾驶员的交通安全意识，某小组利用假期进行一次全市驾驶员交通安全意识调查.随机抽取男女驾驶员各 50 人，进行问卷测评，所得分数的频率分布直方图如图所示在 80 分以上为交通安全意识强.



1 求 a 的值，并估计该城市驾驶员交通安全意识强的概率；

2 已知交通安全意识强的样本中男女比例为 4 : 1，完成下列 2 × 2 列联表，并判断有多大把握认为交通安全意识与性别有关；

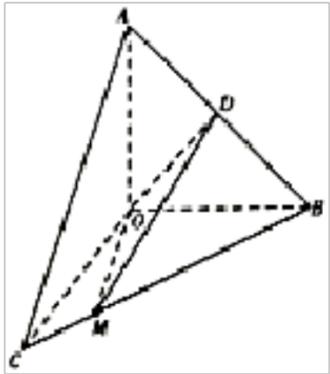
	安全意识强	安全意识不强	合计
男性			
女性			
合计			

3 用分层抽样的方式从得分在 50 分以下的样本中抽取 6 人，再从 6 人中随机选取 2 人对未来一年内的交通违章情况进行跟踪调查，求至少有 1 人得分低于 40 分的概率.

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.010	0.005	0.001
k	6.635	7.879	10.828

18. (12分) 如图, 在直角 $\triangle AOB$ 中, $OA = OB = 2$, $\triangle AOC$ 通过 $\triangle AOB$ 以直线 OA 为轴顺时针旋转 120° 得到 ($\angle BOC = 120^\circ$). 点 D 为斜边 AB 上一点. 点 M 为线段 BC 上一点, 且 $MB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



(1) 证明: $MO \perp$ 平面 AOB ;

(2) 当直线 MD 与平面 AOB 所成的角取最大值时, 求二面角 $B-CD-O$ 的正弦值.

19. (12分) 在平面直角坐标系中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 曲线 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho = 4\cos\theta;$$

(1) 求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交点分别为 A, B , 点 $P(1, 0)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 - x \ln x - b - 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $b = -1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $c = e^{2a-b}$ 求 c 的最大值.

21. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且满足 $a_n^2 - n - 1 = a_{n-1}^2 - 2n^2 - n - 0$.

(1) 求 a_1, a_2 及 a_n 的通项公式;

(2) 求数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(\sqrt{3}, 0)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , 试问在 x 轴上是否存在定点 Q 使得直线 QA 与直线 QB 恰关于 x 轴对称? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据题意 P 到两个平面的距离相等，根据等体积法得到 $S_{\triangle PBM} = S_{\triangle PCM}$ ，得到答案。

【详解】

二面角 $P-AM-B$ 与二面角 $P-AM-C$ 的平面角相等，故 P 到两个平面的距离相等。

故 $V_{P-ABM} = V_{P-ACM}$ ，即 $V_{A-PBM} = V_{A-PCM}$ ，两三棱锥高相等，故 $S_{\triangle PBM} = S_{\triangle PCM}$ ，

故 $BP = CP$ ，故 P 为 CB 中点。

故选：A。

【点睛】

本题考查了二面角，等体积法，意在考查学生的计算能力和空间想象能力。

2、B

【解析】

利用两角差的正弦公式和边角互化思想可求得 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，可得出 $B = \frac{\pi}{6}$ ，然后利用余弦定理求出 b 的值，最后利用

正弦定理可求出 $\sin C$ 的值。

【详解】

$$\therefore b \sin A = a \sin \frac{\pi}{3} = B = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos B = \frac{1}{2} a \sin B,$$

$$\text{即 } \sin A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos B = \frac{1}{2} \sin A \sin B, \text{ 即 } 3 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin A \cos A,$$

$$\therefore \sin A \neq 0, \quad 3 \sin B = \sqrt{3} \cos B, \text{ 得 } \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore 0 < B < \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由余弦定理得 } b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7},$$

由正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 因此, $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查三角形中角的正弦值的计算, 考查两角差的正弦公式、边角互化思想、余弦定理与正弦定理的应用, 考查运算求解能力, 属于中等题.

3、A

【解析】

令 $\frac{x}{e^x} = t$, 构造 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 要使函数 $f(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 + \frac{ax}{e^x} - a$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 (其中 $x_1 < x_2 < x_3$), 则方程 $t^2 + at - a = 0$ 需

要有两个不同的根 t_1, t_2 , 则 $\Delta = a^2 + 4a > 0$, 解得 $a > 0$ 或 $a < -4$, 结合 $g(x) = \frac{x}{e^x}$ 的图象, 并分 $a > 0$, $a < -4$ 两个情况分类

讨论, 可求出 $\left(1 - \frac{x_1}{e^{x_1}}\right)^2 \left(1 - \frac{x_2}{e^{x_2}}\right) \left(1 - \frac{x_3}{e^{x_3}}\right)$ 的值.

【详解】

令 $\frac{x}{e^x} = t$, 构造 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 求导得 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 当 $x < 1$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $x < 0$ 时, $g(x) < 0$, $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, $g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{e}$, 可画

出函数 $g(x)$ 的图象 (见下图), 要使函数 $f(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 + \frac{ax}{e^x} - a$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 (其中 $x_1 < x_2 < x_3$), 则方程

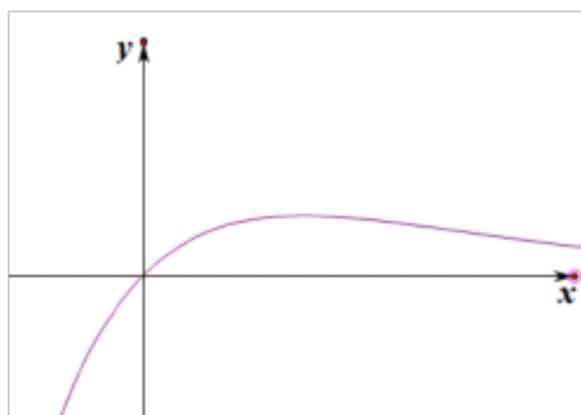
$t^2 + at - a = 0$ 需要有两个不同的根 t_1, t_2 (其中 $t_1 < t_2$), 则 $\Delta = a^2 + 4a > 0$, 解得 $a > 0$ 或 $a < -4$, 且 $\begin{cases} t_1 + t_2 = -a \\ t_1 \cdot t_2 = -a \end{cases}$,

若 $a > 0$, 即 $\begin{cases} t_1 + t_2 = -a < 0 \\ t_1 \cdot t_2 = -a < 0 \end{cases}$, 则 $t_1 < 0 < t_2 < \frac{1}{e}$, 则 $x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3$, 且 $g(x_2) = g(x_3) = t_2$,

故 $\left(1 - \frac{x_1}{e^{x_1}}\right)^2 \left(1 - \frac{x_2}{e^{x_2}}\right) \left(1 - \frac{x_3}{e^{x_3}}\right) = (1 - t_1)^2 (1 - t_2)^2 = [1 - (t_1 + t_2) + t_1 t_2]^2 = (1 + a - a)^2 = 1$,

若 $a < -4$, 即 $\begin{cases} t_1 + t_2 = -a > 4 \\ t_1 \cdot t_2 = -a > 4 \end{cases}$, 由于 $g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{e}$, 故 $t_1 + t_2 < \frac{2}{e} < 4$, 故 $a < -4$ 不符合题意, 舍去.

故选 A.



【点睛】

解决函数零点问题, 常常利用数形结合、等价转化等数学思想.

4、D

【解析】

分别联立直线与抛物线的方程，利用韦达定理，可得 $|AB| = 4 \frac{4}{k^2}$ ， $|AB| = 4 \frac{4}{k^2}$ ，然后计算，可得结果.

【详解】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 - 2k^2 x + k^2 = 0$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = 2 + \frac{4}{k^2},$$

因为直线 $y = k(x-1)$ 经过 C 的焦点，

$$\text{所以 } |AB| = x_1 + x_2 + p = 4 + \frac{4}{k^2}.$$

$$\text{同理可得 } |MN| = 8 + \frac{2}{k^2},$$

$$\text{所以 } 4 + 16 = 12$$

故选：D.

【点睛】

本题考查的是直线与抛物线的交点问题，运用抛物线的焦点弦求参数，属基础题。

5、A

【解析】

试题分析：由题意得 $f(x) = \ln x + 1 - 2ax = 0$ 有两个不相等的实数根，所以 $f(x) = \frac{1}{x} - 2a = 0$ 必有解，则 $a > 0$ ，

$$\text{且 } f\left(\frac{1}{2a}\right) = 0, \therefore 0 < a < \frac{1}{2}.$$

考点：利用导数研究函数极值点

【方法点睛】函数极值问题的常见类型及解题策略

(1) 知图判断函数极值的情况.先找导数为 0 的点，再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号.

(2) 已知函数求极值.求 $f'(x)$ → 求方程 $f'(x) = 0$ 的根 → 列表检验 $f'(x)$ 在 $f'(x) = 0$ 的根的附近两侧的符号 → 下结论.

(3) 已知极值求参数.若函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$ ，且在该点左、右两侧的导数值符号相反.

6、D

【解析】

结合指数函数及对数函数的单调性,可判断出 $1 < a < 0, b > 1, c < 1$,即可选出答案.

【详解】

由 $\log_{0.3} 4 > \log_{0.3} \frac{10}{3} > 1$,即 $b > 1$,

又 $1 > \log_8 0.125 > \log_8 0.2 > \log_8 1 = 0$,即 $1 > a > 0$,

$4^{0.3} > 1$,即 $c < 1$,

所以 $b > a > c$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了几个数的大小比较,考查了指数函数与对数函数的单调性的应用,属于基础题.

7、A

【解析】

根据指数函数的单调性,可得 $a = 5^{\frac{1}{5}} > 1$,再利用对数函数的单调性,将 b, c 与 $1, \frac{1}{2}$ 对比,即可求出结论.

【详解】

由题知 $a = 5^{\frac{1}{5}} > 5^0 = 1, 1 < b = \log_4 \sqrt{5} = \log_4 2 < \frac{1}{2}$,

$c = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$,则 $a > b > c$.

故选:A.

【点睛】

本题考查利用函数性质比较大小,注意与特殊数的对比,属于基础题..

8、A

【解析】

用偶函数的图象关于 y 轴对称排除 C,用 $f(0) = 0$ 排除 B,用 $f(\frac{1}{2}) = 4$ 排除 D.故只能选 A.

【详解】

因为 $f(-x) = 6^{|\sin(-x)|} \frac{(-x)^2}{\sqrt{1 - (-x)^2}} = 6^{|\sin x|} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 为偶函数,图象关于 y 轴对称,故可以排除 C;

因为 $f(\frac{1}{2}) = 6^{|\sin \frac{\pi}{2}|} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = 1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}} = 1 \frac{1}{0}$, 故排除 B,

因为 $f(\frac{1}{2}) = 6^{|\sin \frac{\pi}{2}|} \frac{(\frac{1}{2})^2}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}} = 6 \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{4} - \frac{4}{2}}} = 6 \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{44} - \frac{4}{42}}} = 6 \frac{4}{\sqrt{5}} = 6 \frac{4}{2} = 6 \cdot 2 = 4$ 由图象知, 排除 D.

故选: A

【点睛】

本题考查了根据函数的性质, 辨析函数的图像, 排除法, 属于中档题.

9、C

【解析】

根据并集的求法直接求出结果.

【详解】

$\because A = \{x \mid 1 < x < 2\}, B = \{x \mid 1\}$,

$\therefore A \cup B = (1, 2)$,

故选 C.

【点睛】

考查并集的求法, 属于基础题.

10、C

【解析】

根据线面垂直的性质以及线面垂直的判定, 根据勾股定理, 得到 BE, EC 之间的等量关系, 再用 BE, EC 表示出 $\diamond SED$

的面积, 利用均值不等式即可容易求得.

【详解】

设 BE = x, EC = y, 则 BC = AD = x + y.

因为 SA \perp 平面 ABCD, ED \perp 平面 ABCD, 所以 SA \perp ED.

又 AE \perp ED, SA \cap AE = A, 所以 ED \perp 平面 SAE, 则 ED \perp SE.

易知 AE = $\sqrt{x^2 - 3}$, ED = $\sqrt{y^2 - 3}$.

在 Rt $\triangle AED$ 中, AE² + ED² = AD²,

即 $x^2 - 3 + y^2 - 3 = (x + y)^2$, 化简得 xy = 3.

在 Rt SED 中, $SE = \sqrt{x^2 - 12}$, $ED = \sqrt{y^2 - 3} = \sqrt{\frac{9}{x^2} - 3}$.

所以 $S_{SED} = \frac{1}{2} SE \cdot ED = \frac{1}{2} \sqrt{3x^2 - \frac{108}{x^2}} \leq 45$.

因为 $3x^2 - \frac{108}{x^2} \leq 2\sqrt{3x^2 \cdot \frac{108}{x^2}} = 36$,

当且仅当 $x = \sqrt{6}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立, 所以 $S_{SED} = \frac{1}{2} \sqrt{36 - 45} = \frac{9}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查空间几何体的线面位置关系及基本不等式的应用, 考查空间想象能力以及数形结合思想, 涉及线面垂直的判定和性质, 属中档题.

11、A

【解析】

设出 A, B 的坐标, 利用导数求出过 A, B 的切线的斜率, 结合 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 可得 $x_1 x_2 = -1$. 再写出 OA, OB 所在直线的斜率, 作积得答案.

【详解】

解: 设 $A(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, $B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$,

由抛物线 C: $x^2 = 4y$, 得 $y = \frac{1}{4}x^2$, 则 $y' = \frac{1}{2}x$.

$\therefore k_{AP} = \frac{1}{2}x_1$, $k_{BP} = \frac{1}{2}x_2$,

由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 可得 $\frac{1}{4}x_1 x_2 = 1$, 即 $x_1 x_2 = -4$.

又 $k_{OA} = \frac{x_1}{4}$, $k_{OB} = \frac{x_2}{4}$,

$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{x_1 x_2}{16} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$.

故选: A.

点睛: (1) 本题主要考查抛物线的简单几何性质, 考查直线和抛物线的位置关系, 意在考查学生对这些基础知识的掌握能力和分析推理能力. (2) 解答本题的关键是解题的思路, 由于与切线有关, 所以一般先设切点, 先设

$A(2a, a^2)$, $B(2b, b^2)$, $a \neq b$, 再求切线 PA, PB 方程,

求点 P 坐标, 再根据 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$ 得到 $ab = 1$, 最后求直线 OA 与 OB 的斜率之积. 如果先设点 P 的坐标, 计算量就大一些.

12、B

【解析】

根据直线 $y = ax + b$ 与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都相切, 求得 a, b 的值, 由此画出不等式组所表示的平面区域以及圆

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 由此求得正确选项.

【详解】

$f'(x) = \frac{2}{x}, g'(x) = 2x$. 设直线 $y = ax + b$ 与 $f(x)$ 相切于点 $A(x_0, 2\ln x_0 - 5)$, 斜率为 $\frac{2}{x_0}$, 所以切线方程为

$y - 2\ln x_0 - 5 = \frac{2}{x_0}(x - x_0)$, 化简得 $y = \frac{2}{x_0}x - 2\ln x_0 - 3$ ①. 令 $g'(x) = 2x = \frac{2}{x_0}$, 解得 $x = \frac{1}{x_0}, g = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} = 4$,

所以切线方程为 $y = \frac{1}{x_0^2} - 4 = \frac{2}{x_0}x - \frac{1}{x_0}$, 化简得 $y = \frac{2}{x_0}x - \frac{1}{x_0^2} - 4$ ②. 由①②对比系数得 $2\ln x_0 - 3 = \frac{1}{x_0^2} - 4$,

化简得 $2\ln x_0 - \frac{1}{x_0^2} + 1 = 0$ ③. 构造函数 $h(x) = 2\ln x - \frac{1}{x^2} + 1, h'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$, 所以 $h(x)$ 在

$(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 所以 $h(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值也即是最小值, 而 $h(1) = 0$, 所以 $h(x) = 0$ 有唯一

解. 也即方程③有唯一解 $x_0 = 1$. 所以切线方程为 $y = 2x - 3$. 即 $a = 2, b = -3$. 不等式组 $\begin{cases} x - ay - 3 \leq 0 \\ x - by - 2 \leq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x - 2y - 3 \leq 0 \\ x - 3y - 2 \leq 0 \end{cases}$

画出其对应的区域如下图所示. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ 可化为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 24$, 圆心为 $A(1, 1)$. 而方程

组 $\begin{cases} x - 2y - 3 \leq 0 \\ x - 3y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 的解也是 $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$. 画出图像如下图所示, 不等式组 $\begin{cases} x - 2y - 3 \leq 0 \\ x - 3y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域在

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ 内的部分如下图所示. 直线 $x - 2y - 3 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 直线 $x - 3y - 2 = 0$ 的斜率

为 $\frac{1}{3}$. 所以 $\tan \angle BAC = \tan \angle AED = \frac{AED}{ADE} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 1$, 所以 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 而圆 A 的半径为 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 所

以阴影部分的面积是 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (2\sqrt{6})^2 = 3\pi$.

故选: B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/937165133013010006>