# 专题 7.6　角度计算的综合大题专项训练（30 道）

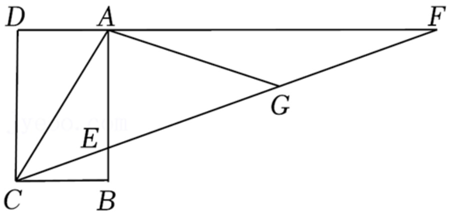
**【北师大版】**

考卷信息：

本套训练卷共 30 题，题型针对性较高，覆盖面广，选题有深度，涵盖了角度计算问题的所有类型！

**一．解答题（共 30 小题）**

1．（2022•金水区校级期末）“三等分一个任意角”是数学史上一个著名问题．今天人们已经知道，仅用圆规和直尺是不可能作出的．有人曾利用如图所示的图形进行探索，其中 $ABCD$ 是长方形，$F$ 是 $DA$ 延长线上一点，$G$ 是 $CF$ 上一点，且 $\angle ACG=\angle AGC$，$\angle GAF=\angle F$．请写出 $\angle ECB$ 和 $\angle ACB$ 的数量关系，并说明理由．




【分析】根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得 $\angle AGC=2\angle F$，从而得到 $\angle ACG=2\angle F$，根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle ECB=\angle F$，再求出 $\angle ACB=3\angle F$，从而得解．

【解答】解：$\angle ACB=3\angle ECB$．

理由如下：在△$AGF$ 中，$\angle AGC=\angle F+\angle GAF=2\angle F$．

∵ $\angle ACG=\angle AGC$，

∴ $\angle ACG=2\angle F$．

∵ $AD\parallel BC$，

∴ $\angle ECB=\angle F$．

∴ $\angle ACB=\angle ACG+\angle BCE=3\angle F$．

故 $\angle ACB=3\angle ECB$．

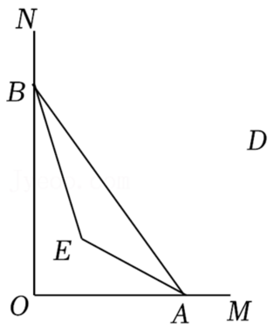
2．（2022 春•渠县期末）$\angle MON=90°$，点 $A$，$B$ 分别在射线 $OM$、$ON$ 上运动（不与点 $O$ 重合）．

（1）如图①，$AE$、$BE$ 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 的平分线，随着点 $A$、点 $B$ 的运动，$\angle AEB=$ <u>135</u> °；

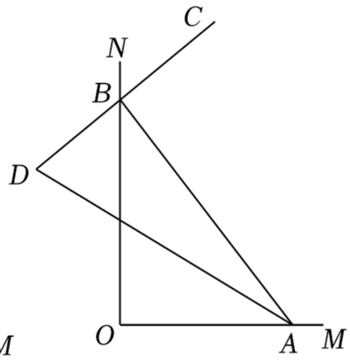
（2）如图②，若 $BC$ 是 $\angle ABN$ 的平分线，$BC$ 的反向延长线与 $\angle OAB$ 的平分线交于点 $D$．

①若 $\angle BAO=60°$，则 $\angle D=$ <u>45</u> °；

②随着点 $A$，$B$ 的运动，$\angle D$ 的大小是否会变化？如果不变，求 $\angle D$ 的度数；如果变化，请说明理由．



图①



图②

【分析】（1）根据三角形的内角和定理和角平分线的定义即可得到结论；

（2）①根据三角形的内角和定理和角平分线的定义即可得到结论；

②由①的思路可得结论．

【解答】解：（1）∵直线 $MN$ 与直线 $PQ$ 垂直相交于 $O$，

∴$\angle AOB=90°$，

∴$\angle OAB+\angle OBA=90°$，

∵$AE$、$BE$ 分别是$\angle BAO$ 和$\angle ABO$ 角的平分线，

∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle OAB$，$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABO$，

∴$\angle BAE+\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle OAB+\angle ABO)=45°$，

∴$\angle AEB=135°$；

故答案为：135；

（2）①∵$\angle AOB=90°$，$\angle BAO=60°$，

∴$\angle ABO=30°$，

∴$\angle ABN=150°$，

∵$BC$ 是$\angle ABN$ 的平分线，

∴$\angle OBD=\angle CBN=\frac{1}{2}\times 150°=75°$，

∵$AD$ 平分$\angle BAO$，

∴$\angle DAB=30°$，

∴$\angle D=180°-\angle ABD-\angle BAD-\angle AOB=180°-75°-30°-30°=45°$，

故答案为：45；

②$\angle D$ 的度数不随 $A$、$B$ 的移动而发生变化，

设$\angle BAD=\alpha$，

∵$AD$ 平分$\angle BAO$，

∴$\angle BAO=2\alpha$，

∵$\angle AOB=90^\circ$，

∴$\angle ABN=180^\circ-\angle ABO=\angle AOB+\angle BAO=90+2\alpha$，

∵$BC$ 平分$\angle ABN$，

∴$\angle ABC=45^\circ+\alpha$，

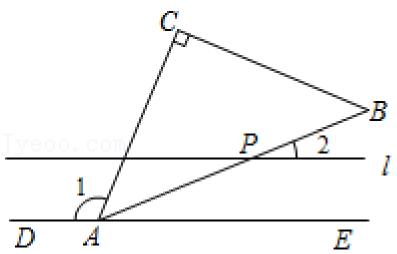
∵$\angle ABC=180^\circ-\angle ABD=\angle D+\angle BAD$，

∴$\angle D=\angle ABC-\angle BAD=45^\circ+\alpha-\alpha=45^\circ$．

3．（2022•永春县期末）在直角三角板 $ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle CAB=\angle B=45^\circ$，将三角板的顶点 $A$ 放置在直线 $DE$ 上．

（1）如图，在 $AB$ 边上任取一点 $P$（不同于点 $A$，$B$），过点 $P$ 作直线 $l\parallel DE$，当$\angle 1=8\angle 2$ 时，求$\angle 2$ 的度数；

（2）将三角板绕顶点 $A$ 转动，并保持点 $B$ 在直线 $DE$ 的上方．过点 $B$ 作 $FH\parallel DE$（$F$ 在 $H$ 的左侧），求$\angle DAC$ 与$\angle FBC$ 之间的数量关系．




【分析】（1）根据平行线的性质可得$\angle 2=\angle BAE$，然后根据平角是 $180^\circ$ 列出关于$\angle 1$ 与$\angle 2$ 的关系式进行计算即可；

（2）分三种情况，点 $C$ 在直线 $FH$ 的上方，点 $C$ 在直线 $FH$ 与直线 $DE$ 之间，点 $C$ 在直线 $DE$ 的下方．

【解答】解：（1）∵$l\parallel DE$，

∴$\angle 2=\angle BAE$，

∵$\angle 1+\angle CAB+\angle BAE=180^\circ$，$\angle 1=8\angle 2$，$\angle CAB=45^\circ$，

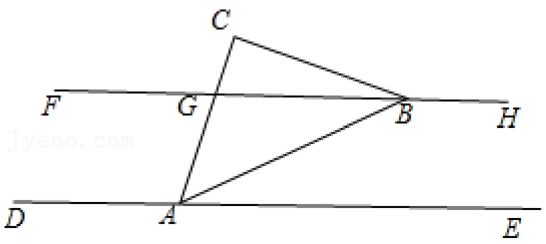
∴$8\angle 2+45^\circ+\angle 2=180^\circ$，

∴$\angle 2=15^\circ$，

∴$\angle 2$ 的度数为 $15^\circ$；

（2）分三种情况：

当点 $C$ 在直线 $FH$ 的上方，如图：




设 $AC$ 与 $FH$ 交于点 $G$，

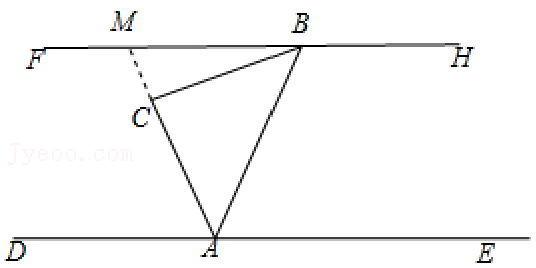
∵$FH\parallel DE$，

∴$\angle DAC=\angle FGC$，

∵$\angle FGC=\angle C+\angle FBC$，$\angle C=90^\circ$，

∴$\angle DAC=90^\circ+\angle FBC$，

当点 $C$ 在直线 $FH$ 与直线 $DE$ 之间，如图：




延长 $AC$ 交 $FH$ 于点 $M$，

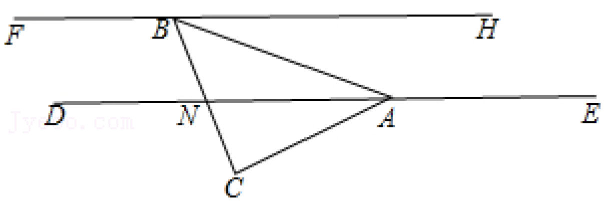
∵$FH\parallel DE$，

∴$\angle DAC=\angle HMC$，

∵$\angle BCA=\angle HMC+\angle FBC$，$\angle BCA=90^\circ$，

∴$\angle DAC+\angle FBC=90^\circ$，

当点 $C$ 在直线 $DE$ 的下方，如图：




设 $BC$ 与 $DE$ 交于点 $N$，

∵$FH\parallel DE$，

∴$\angle FBC=\angle DNC$，

∵∠*DNC*＝∠*C*+∠*DAC*，∠*C*＝90°，

∴∠*FBC*＝90°+∠*DAC*，

综上所述：当点 *C* 在直线 *FH* 的上方，∠*DAC*＝90°+∠*FBC*，

当点 *C* 在直线 *FH* 与直线 *DE* 之间，∠*DAC*+∠*FBC*＝90°，

当点 *C* 在直线 *DE* 的下方，∠*FBC*＝90°+∠*DAC*．

4．（2022 春•亭湖区校级期中）平移是一种常见的图形变换，如图 1，△*ABC* 经过平移后得到△$A_1B_1C_1$，连接 $BA_1$，$AC_1$，若 $BA_1$ 平分∠*ABC*，$C_1A$ 平分∠$A_1C_1B_1$，则称这样的平移为“平分平移”．

（1）如图 1，△*ABC* 经过“平分平移”后得到△$A_1B_1C_1$，请问 *AC* 和 $A_1C_1$ 有怎样的位置关系：__平行__．

（2）如图 2，在△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，∠*ACB*＝60°，△*ABC* 经过“平分平移”后得到△$A_1B_1C_1$，求∠*AOB* 的度数．

（3）如图 3，在（2）的条件下，*BD* 平分∠$ABA_1$，$C_1D$ 平分∠$AC_1A_1$，求∠$BDC_1$ 的度数．

（4）如图 4，△*ABC* 经过“平分平移”后得到△$A_1B_1C_1$，*BD* 平分∠$ABA_1$，$C_1D$ 平分∠$AC_1A_1$，若∠*BAC*＝α，则∠$BDC_1$＝__$45°+\frac{3}{4}\alpha$__．（用含 α 的式子表示）

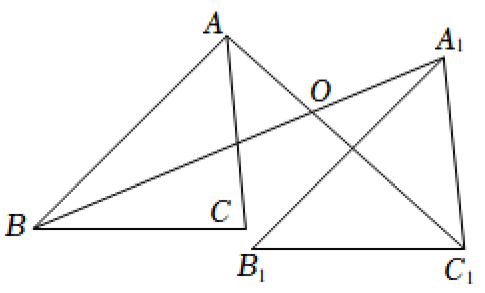



图1

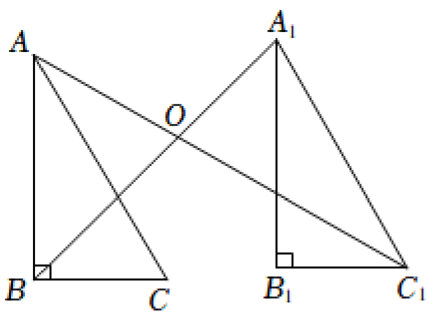



图2

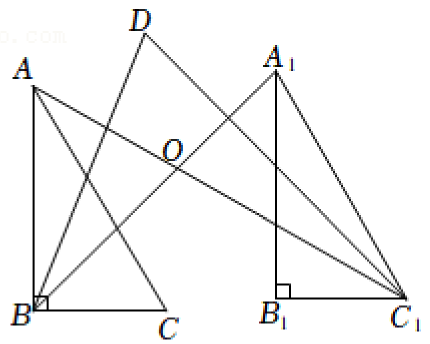



图3

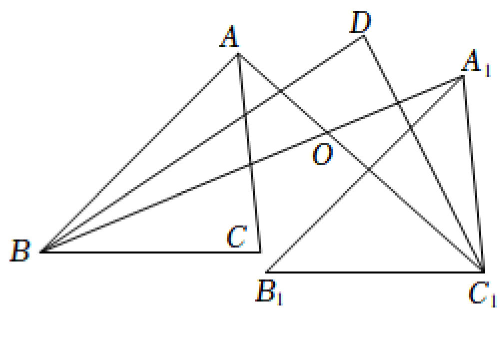



图4

【分析】（1）直接根据平移的性质：平移图形中对应线段平行或在同直线上，便可直接得出结论；

（2）根据角平分线定义求得∠*ABO* 和∠$AC_1A_1$，再根据平行线的性质求得∠*OAC*，根据三角形的内角和

性质依次求得$\angle BAC$，$\angle AOB$；

（3）连接 $DO$，与延长 $DO$ 至 $E$，根据三角形的外角性质便可得到$\angle BOC$、$\angle DBO$、$\angle DCO$、$\angle BDC$ 四角的关系，进而求得结果；

（4）按照前面的方法依次用 α 表示$\angle BOC$，$\angle DBO+\angle DCO$，进而运用（3）中方法便可求得$\angle BDC_1$.

【解答】解：（1）根据平移的性质知，$AC // A_1C_1$，

故答案为：平行；

（2）∵$\angle ABC=90°$，$A_1B$ 平分$\angle ABC$，

∴$\angle ABO=45°$，

由平移知，$\angle ACB=\angle A_1C_1B_1=60°$，

∵$AC_1$ 平分$\angle A_1C_1B_1$，

∴$\angle AC_1A_1=30°$，

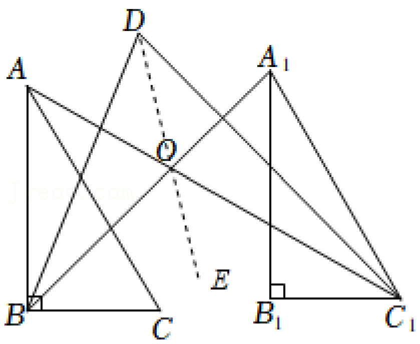
由平移知 $AC // A_1C_1$，

∴$\angle CAC_1=\angle AC_1A_1=30°$，

∵$\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB=30°$，

∴$\angle AOB=180°-\angle ABO-\angle BAO=75°$；

（3）连接连接 $DO$，与延长 $DO$ 至 $E$，如图，




∵$BD$ 平分$\angle ABA_1$，$C_1D$ 平分$\angle AC_1A_1$，

∴$\angle OBD+\angle OC_1D=\frac{1}{2}(\angle ABO+\angle AC_1A_1)=37.5°$，

∵$\angle BOE=\angle OBD+\angle ODB$，$\angle C_1OE=\angle OC_1D+\angle ODC_1$，

∴$\angle BOE+\angle C_1OE=\angle OBD+\angle ODB+\angle OC_1D+\angle ODC_1$，

即$\angle BOC_1=\angle OBD+\angle OC_1D+\angle BDC_1$，

∵$\angle BOC_1=180°-\angle AOB=105°$，

∴$105°=37.5°+\angle BDC_1$，

∴$\angle BDC_1=67.5°$；

（4）∵$\angle BAC=\alpha$，

∴$\angle ABC+\angle ACB=180°-\alpha$，

∵$\angle ACB=\angle AC_1B_1$，$\angle CAC_1=\angle AC_1B_1$，

∴$\angle ABO+\angle AC_1A_1=\angle ABO+\angle CAC_1=\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°-\frac{1}{2}\alpha$，

∴$\angle BOC_1=\angle ABO+\angle BAO=90°-\frac{1}{2}\alpha+\alpha=90°+\frac{1}{2}\alpha$，

∵$BD$ 平分$\angle ABA_1$，$C_1D$ 平分$\angle AC_1A_1$，

∴$\angle OBD+\angle OC_1D=\frac{1}{2}\times(90°-\frac{1}{2}\alpha)=45°-\frac{1}{4}\alpha$

∴$\angle BDC_1=\angle BOC_1-(\angle OBD+\angle OC_1D)=90°+\frac{1}{2}\alpha-(45°-\frac{1}{4}\alpha)=45°+\frac{3}{4}\alpha$.

故答案为：$45°+\frac{3}{4}\alpha$.

5．（2022 春•如皋市期末）如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BD$ 平分$\angle ABC$ 交$\triangle ABC$ 的边 $AC$ 于点 $D$，$E$ 为直线 $AC$ 上一点，过点 $E$ 向直线 $AC$ 的右边作射线 $EF$，使 $EF\parallel BC$，作$\angle CEF$ 的平分线 $EG$ 交射线 $BD$ 于点 $G$.

（1）如图 1，$\angle ABC=40°$，点 $E$ 与点 $A$ 重合，求$\angle G$ 的度数；

（2）若$\angle ABC=\alpha$，

①如图 2，点 $E$ 在 $DC$ 的延长线上，求$\angle G$ 的度数（用含有 α 的式子表示）；

②点 $E$ 在直线 $AC$ 上滑动，当存在$\angle G$ 时，其度数是否发生变化？若不变，请说明理由；若变化，请直接用含 α 的式子表示$\angle G$ 的度数.

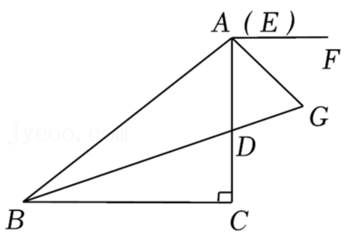


图1

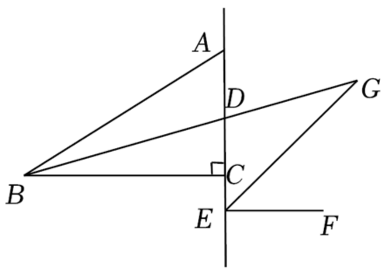
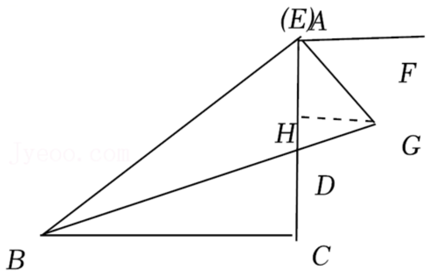


图2

【分析】（1）利用平行线的性质和直角三角形的性质求解；

（2）①利用（1）的结论求解；

②结合以上两问得出结论.




【解答】解：（1）

过点 $G$ 作 $GH\perp AC$ 于点 $H$，

则 $GH\parallel EF\parallel BC$，

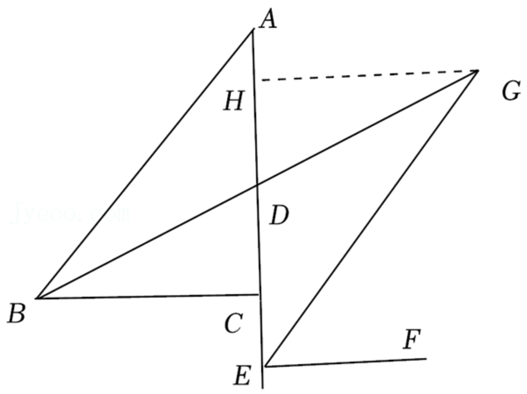
∴ $\angle HGB=\angle GBC$，

∵ $\angle CEF$ 的平分线 $EG$，$BD$ 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=20^\circ$ ，$\angle CEG=\frac{1}{2}\angle FAC=45^\circ$ ，

所以 $\angle G=\angle HGB+\angle CEG=20^\circ+45^\circ=65^\circ$ .

（2）




过点 $G$ 作 $GH\perp AC$ 于点 $H$，

①由（1）知：$\angle HGB=\angle GBC=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle HGE=\angle GEF=45^\circ$ ，

∴ $\angle G=\angle HGE-\angle GBC=45^\circ-\frac{1}{2}\alpha$.

②有变化.

当点 $E$ 在点 $D$ 下方时，由①得：$\angle G=45^\circ-\frac{1}{2}\alpha$.

当点 $E$ 在点 $D$ 上方时，由（1）得：$\angle G=45^\circ+\frac{1}{2}\alpha$.

6. （2022 春•信阳期末）已知：如图 1，在△$ABC$ 中，$CD$ 是 $AB$ 边上的高，$\angle A=\angle DCB$.

（1）试说明 $\angle ACB=90^\circ$ ；

（2）如图 2，如果 $AE$ 是角平分线，$AE$、$CD$ 相交于点 $F$．那么 $\angle CFE$ 与 $\angle CEF$ 的大小相等吗？请说明理由.

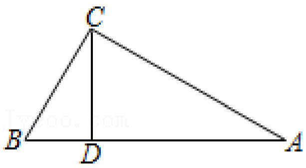


图 1

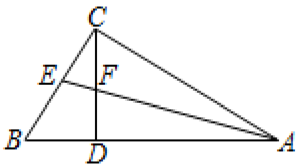


图 2

【分析】（1）根据高定义求出$\angle CDA=90^\circ$，根据三角形内角和定理求出$\angle A+\angle ACD=90^\circ$，再求出答案即可；

（2）根据角平分线的定义得出$\angle CAE=\angle BAE$，根据三角形内角和定理求出$\angle CEF=\angle DFA$，根据对顶角相等求出即可．

【解答】（1）解：∵$CD$是$AB$边上的高，

∴$\angle CDA=90^\circ$，

∴$\angle A+\angle ACD=90^\circ$，

∵$\angle A=\angle DCB$，

∴$\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=\angle ACD+\angle A=90^\circ$；

（2）解：$\angle CFE=\angle CEF$，

理由是：∵$AE$平分$\angle CAB$，

∴$\angle CAE=\angle BAE$，

∵$\angle CDA=\angle BCA=90^\circ$，$\angle DFA=180^\circ-(\angle CDA+\angle BAE)$，$\angle CEA=180^\circ-(\angle BCA+\angle CAE)$，

∴$\angle CEF=\angle DFA$，

∵$\angle DFA=\angle CFE$，

∴$\angle CFE=\angle CEF$．

7. （2022春•鼓楼区期末）【概念认识】

如图①，在$\angle ABC$中，若$\angle ABD=\angle DBE=\angle EBC$，则$BD$，$BE$叫做$\angle ABC$的“三分线”．其中，$BD$是“邻$AB$三分线”，$BE$是“邻$BC$三分线”．

【问题解决】

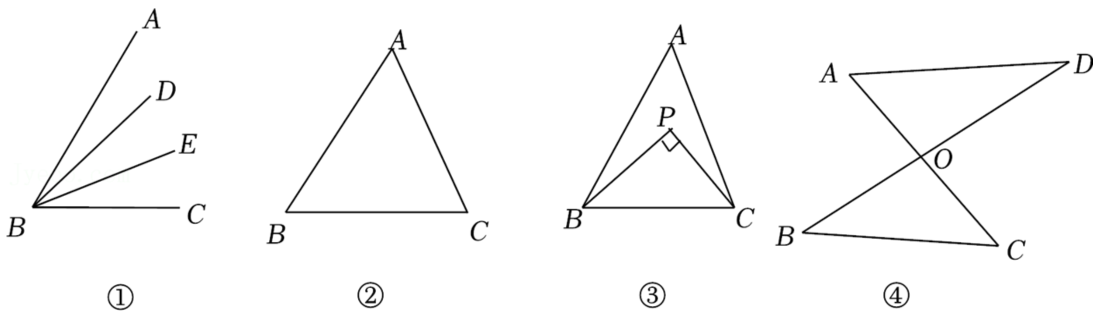
（1）如图②，在$\triangle ABC$中，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=45^\circ$，若$\angle B$的三分线$BD$交$AC$于点$D$，则$\angle BDC=$__85°或100__°；

（2）如图③，在$\triangle ABC$中，$BP$、$CP$分别是$\angle ABC$邻$AB$三分线和$\angle ACB$邻$AC$三分线，且$BP\perp CP$，

求$\angle A$的度数；

【延伸推广】

（3）如图④，直线$AC$、$BD$交于点$O$，$\angle ADB$的三分线所在的直线与$\angle ACB$的三分线所在的直线交于点$P$．若$\angle A=66°$，$\angle B=45°$，$\angle ADB=m°$，直接写出$\angle DPC$的度数．

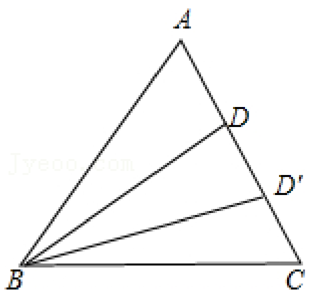



【分析】（1）分为两种情况：当$BD$是“邻$AB$三分线”时，当$BD'$是“邻$BC$三分线”时，根据三角形的外角性质求出即可；

（2）求出$\angle PBC+\angle PCB=90°$，根据$BP$、$CP$分别是$\angle ABC$邻$AB$三分线和$\angle ACB$邻$AC$三分线求出$\angle PBC=\frac{2}{3}\angle ABC$，$\angle PCB=\frac{2}{3}\angle ACB$，求出$\angle ABC+\angle ACB=135°$，再求出$\angle A$即可；

（3）画出符合的所有情况，①当$DP$和$CP$分别是“邻$AD$三分线”、“邻$BC$三分线”时，②当$DP$和$CP$分别是“邻$AD$三分线”、“邻$AC$三分线”时，③当$DP$和$CP$分别是“邻$OD$三分线”、“邻$BC$三分线”时，④当$DP$和$CP$分别是“邻$OD$三分线”、“邻$AC$三分线”时，再根据三角形的内角和定理求出答案即可．

【解答】解：（1）∵$\angle ABC=45°$，$BD$，$BD'$是$\angle ABC$的“三分线”，




∴$\angle ABD=\angle DBD'=\angle D'BC=\frac{1}{3}\angle ABC=\frac{1}{3}\times 45°=15°$，

∵$\angle A=70°$，

∴$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=70°+15°=85°$或$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=70°+30°=100°$，

故答案为：85°或100；

（2）如图③，∵$BP\perp CP$，

∴$\angle BPC=90°$，

∴$\angle PBC+\angle PCB=90°$，

∵$BP$、$CP$ 分别是$\angle ABC$ 邻 $AB$ 三分线和$\angle ACB$ 邻 $AC$ 三分线，

∴$\angle PBC=\frac{2}{3}\angle ABC$，$\angle PCB=\frac{2}{3}\angle ACB$，

∴$\frac{2}{3}\angle ABC+\frac{2}{3}\angle ACB=90°$，

∴$\angle ABC+\angle ACB=135°$，

∴$\angle A=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=180°-135°=45°$；

（3）四种情况：

①如图 1，当 $DP$ 和 $CP$ 分别是“邻 $AD$ 三分线”、“邻 $BC$ 三分线”时，

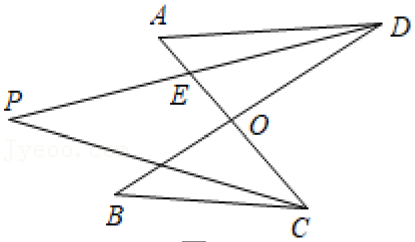



图1

∴$\angle ADE=\frac{1}{3}\angle ADB=\frac{1}{3}m°$，$\angle ACP=\frac{2}{3}\angle ACB$，

∵$\angle AOD=\angle BOC$，

∴$\angle A+\angle ADB=\angle B+\angle ACB$，

∵$\angle A=66°$，$\angle B=45°$，$\angle ADB=m°$，

∴$66°+m°=45°+\angle ACB$，

∴$\angle ACB=21°+m°$，

∴$\angle ACP=\frac{2}{3}\angle ACB=14°+\frac{2}{3}m°$，

∵$\angle AED=\angle CEP$，

∴$\angle A+\angle ADE=\angle DPC+\angle ACP$，

∴$66°+\frac{1}{3}m°=\angle DPC+14°+\frac{2}{3}m°$，

∴$\angle DPC=(52-\frac{1}{3}m)°$；

②如图 2，当 $DP$ 和 $CP$ 分别是“邻 $AD$ 三分线”、“邻 $AC$ 三分线”时，

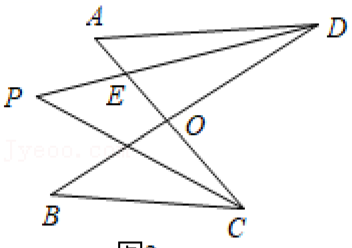



图2

$\therefore \angle ADE=\frac{1}{3}\angle ADB=\frac{1}{3}m^\circ$，$\angle ACP=\frac{1}{3}\angle ACB$，

由①知：$\angle ACB=21^\circ+m^\circ$，

同理得：$66^\circ+\frac{1}{3}m^\circ=\angle DPC+7^\circ+\frac{1}{3}m^\circ$，

$\therefore \angle DPC=59^\circ$；

③如图3，当 $DP$ 和 $CP$ 分别是“邻 $OD$ 三分线”、“邻 $BC$ 三分线”时，

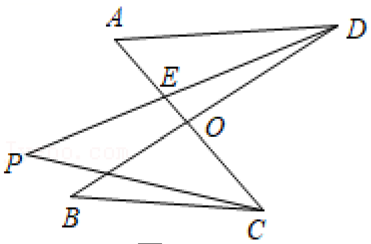



图3

$\therefore \angle ADE=\frac{2}{3}\angle ADB=\frac{2}{3}m^\circ$，$\angle ACP=\frac{2}{3}\angle ACB$，

由①知：$\angle ACB=21^\circ+m^\circ$，

同理得：$66^\circ+\frac{2}{3}m^\circ=\angle DPC+14^\circ+\frac{2}{3}m^\circ$，

$\therefore \angle DPC=52^\circ$；

④如图4，当 $DP$ 和 $CP$ 分别是“邻 $OD$ 三分线”、“邻 $AC$ 三分线”时，

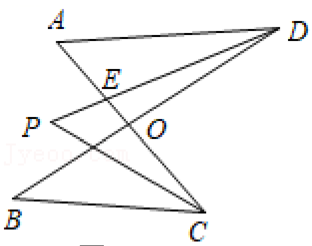



图4

$\therefore \angle ADE=\frac{2}{3}\angle ADB=\frac{2}{3}m^\circ$，$\angle ACP=\frac{1}{3}\angle ACB$，

由①知：$\angle ACB=21^\circ+m^\circ$，

同理得：$66^\circ+\frac{2}{3}m^\circ=\angle DPC+7^\circ+\frac{1}{3}m^\circ$，

∴∠$DPC$=（$59+\frac{1}{3}m$）°；

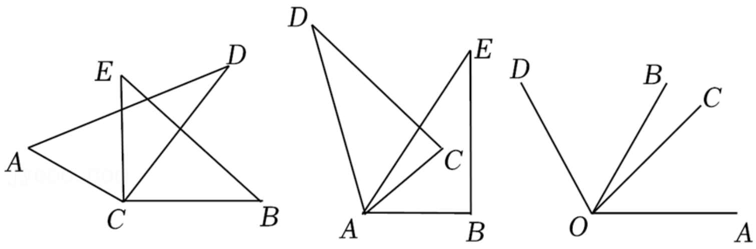
综上，∠$DPC$ 的度数为 59° 或 52° 或（$52-\frac{1}{3}m$）° 或（$59+\frac{1}{3}m$）°．

8．（2022•涡阳县期末）如图（$a$）所示，将两块直角三角尺的直角顶点 $C$ 叠放在一起．

（1）若∠$DCE$=25°，则∠$ACB$=__155__°；若∠$ACB$=130°，则∠$DCE$=__50__°．

（2）如图（$b$）所示，若两个同样的三角板，将 60° 锐角的顶点 $A$ 叠放在一起，则∠$DAB$ 与∠$CAE$ 有何数量关系，请说明理由．

（3）如图（$c$）所示，已知∠$AOB$=α，∠$COD$=β（α，β 都是锐角）．若把它们的顶点 $O$ 叠放在一起，则∠$AOD$ 与∠$BOC$ 有何数量关系，直接写出结论．




图（a） 图（b） 图（c）

【分析】（1）先求出∠$BCD$，再代入∠$ACB$=∠$ACD$+∠$BCD$ 求出即可；先求出∠$BCD$，再代入∠$DCE$=∠$BCE$－∠$BCD$ 求出即可；

（2）根据∠$DAB$=∠$DAE$+∠$CAE$+∠$CAB$ 求出即可；

（3）根据∠$AOD$=∠$AOC$+∠$COB$+∠$BOD$ 求出即可．

【解答】解：（1）∵∠$BCE$=90°，∠$DCE$=25°，

∴∠$BCD$=∠$BCE$－∠$DCE$=65°，

∵∠$ACD$=90°，

∴∠$ACB$=∠$ACD$+∠$BCD$=90°+65°=155°；

∵∠$ACB$=130°，∠$ACD$=90°，

∴∠$BCD$=∠$ACB$－∠$ACD$=130°－90°=40°，

∵∠$BCE$=90°，

∴∠$DCE$=∠$BCE$－∠$BCD$=90°－40°=50°，

故答案为：155，50；

（2）∠$DAB$+∠$CAE$=120°，

理由如下：

∵∠$DAB$＝∠$DAE$+∠$CAE$+∠$CAB$，

∴∠$DAB$+∠$CAE$

＝∠$DAE$+∠$CAE$+∠$CAB$+∠$CAE$

＝∠$DAC$+∠$BAE$

＝120°；

（3）∠$AOD$+∠$BOC$＝α+β，理由如下：

∵∠$AOD$＝∠$AOC$+∠$COB$+∠$BOD$，

∴∠$AOD$+∠$BOC$

＝∠$AOC$+∠$COB$+∠$BOD$+∠$BOC$

＝∠$AOB$+∠$COD$

＝α+β.

9．（2022春•丰泽区期末）已知在△$ABC$中，∠$A$，∠$ABC$，∠$ACB$的度数之比为2：1：6，$CD$平分∠$ACB$，在直角三角形$DEF$中，∠$E$＝90°，∠$F$＝60°．如图1，△$DEF$的边$DF$在直线$AB$上，将△$DEF$绕点$D$逆时针方向旋转，记旋转角为α（0°＜α＜180°），完成下列问题．

（1）在△$ABC$中，∠$ACB$＝<u>120</u>°，∠$BDC$＝<u>100</u>°；

（2）在旋转过程中，如图2，当α＝<u>10</u>°时，$DE$∥$AC$；当α＝<u>100</u>°时，$DE$⊥$AC$；

（3）如图3，当点$C$在△$DEF$内部时，边$DE$，$DF$分别交$BC$，$AC$的延长线于$N$，$M$两点．

①此时，α的取值范围是<u>70°＜α＜100°</u>；

②∠$CMD$与∠$CND$之间有一种始终保持不变的数量关系，请写出该数量关系，并说明理由．

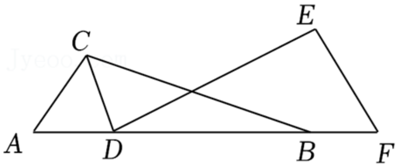


图1

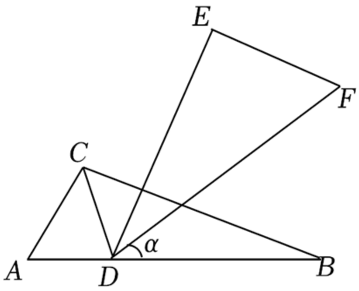


图2

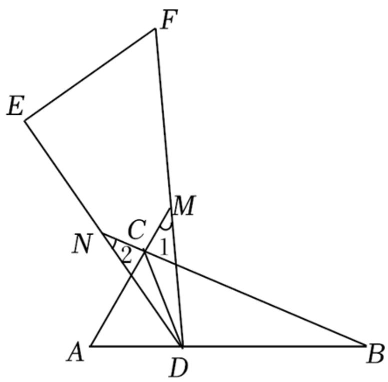


图3

【分析】（1）根据三角形内角和是180°，再按比例分配进行计算即可；

（2）根据平行线的性质以及角的和差关系进行计算即可；由垂直的定义以及三角形的内角和进行计算即可；

（3）①根据“端值”检测计算，即当 $DE$ 与 $CD$ 重合时最小值，当 $DF$ 与 $CD$ 重合时最大值；②连接 $MN$，根据三角形内角和定理进行计算即可．

【解答】解：（1）在△$ABC$ 中，∠$A$，∠$ABC$，∠$ACB$ 的度数之比为 2：1：6，

∴$\angle BAC=180^\circ\times\frac{2}{2+1+6}=40^\circ$，$\angle ABC=180^\circ\times\frac{1}{2+1+6}=20^\circ$，$\angle ACB=180^\circ\times\frac{6}{2+1+6}=120^\circ$，

∵$CD$ 平分∠$ACB$，

∴$\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=60^\circ$，

∴$\angle BDC=\angle ACD+\angle A=60^\circ+40^\circ=100^\circ$，

故答案为：120°，100°；

（2）当 $DE\parallel AC$ 时，$\angle BDE=\angle A=40^\circ$，

∵$\angle E=90^\circ$，$\angle F=60^\circ$．

∴$\angle EDF=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

∴$\alpha=40^\circ-30^\circ=10^\circ$，

即当 $\alpha=10^\circ$ 时，$DE\parallel AC$；

当 $DE\perp AC$ 时，即 $DE$ 与 $AC$ 成 90° 的角，

$\angle EDB=90^\circ+\angle A=130^\circ$，

∴$\alpha=130^\circ-30^\circ=100^\circ$，

即当 $\alpha=100^\circ$ 时，$DE\perp AC$；

故答案为：10，100；

（3）①当 $DE$ 与 $CD$ 重合时，α 为最小值，

∵$\angle BDE=\angle A+\angle ACD=100^\circ$，

∴$\alpha=100^\circ-30^\circ=70^\circ$；

当 $DF$ 与 $CD$ 重合时，α 为最大值，此时 $\alpha=100^\circ$，

∴$70^\circ<\alpha<100^\circ$，

故答案为：$70^\circ<\alpha<100^\circ$；

②$\angle CMD+\angle CND=90^\circ$，理由如下：

如图，连接 $MN$，

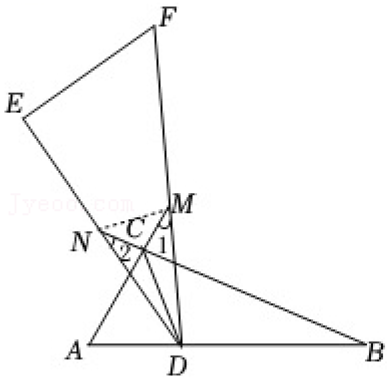
∵$\angle MCN=\angle ACB=120°$，

∴$\angle CMN+\angle CNM=180°-\angle MCN=60°$，

在△$DMN$ 中，

$\angle DMN+\angle DNM=180°-\angle MDN=150°$，

∴$\angle CMD+\angle CND=150°-60°=90°$．




10．（2022 春•大丰区期中）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=140°$，$\angle D=80°$．

（1）如图 1，若$\angle B=\angle C$，则$\angle C=$__70__度；

（2）如图 2，若$\angle ABC$ 的角平分线 $BE$ 交 $DC$ 于点 $E$，且 $BE\parallel AD$，试求出$\angle C$ 的度数；

（3）①如图 3，若$\angle ABC$ 和$\angle DCB$ 的角平分线交于点 $E$，试求出$\angle BEC$ 的度数；

②在①的条件下，若延长 $BA$、$CD$ 交于点 $F$（如图 4）．将原来条件“$\angle A=140°$，$\angle D=80°$”改为“$\angle F=40°$”．其他条件不变．则$\angle BEC$ 的度数为__110°__．

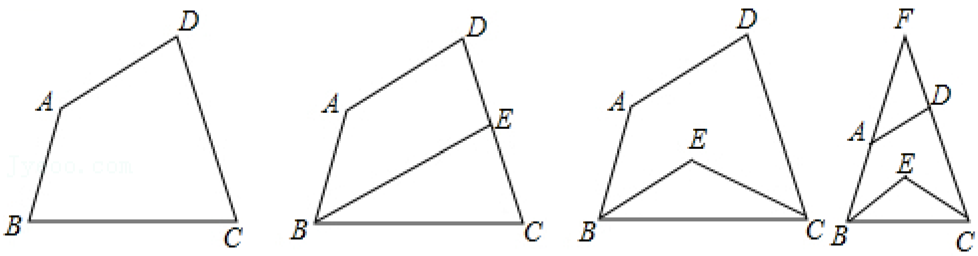



图1　　图2　　图3　　图4

【分析】（1）根据四边形内角和等于 360°求出$\angle B+\angle C$ 的度数，再除以 2 即可求解；

（2）先根据平行线的性质得到$\angle ABC$ 的度数，再根据角平分线定义和四边形内角和即可求解；

（3）①根据四边形内角和求出$\angle ABC+\angle BCD$ 的度数，再根据角平分线定义得到$\angle EBC+\angle ECB$ 的度数，最后根据三角形内角和即可求解，

②根据三角形内角和及角平分线定义即可求解．

【解答】解：（1）∵四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=140°$，$\angle D=80°$，

∴$\angle B+\angle C=360°-(140°+80°)=140°$，

∵$\angle B=\angle C$，

∴$\angle C=70°$．

（2）∵$BE\parallel AD$，

∴$\angle ABE+\angle A=180°$，

∴$\angle ABE=180°-\angle A=180°-140°=40°$，

∵$\angle ABC$的角平分线$BE$交$DC$于点$E$，

∴$\angle ABC=80°$，

∴$\angle C=360°-(140°+80°+80°)=60°$．

（3）①∵四边形$ABCD$中，$\angle A=140°$，$\angle D=80°$，

∴$\angle B+\angle C=360°-(140°+80°)=140°$，

∵$\angle ABC$和$\angle BCD$的角平分线交于点$E$，

∴$\angle EBC+\angle ECB=70°$，

∴$\angle BEC=180°-70°=110°$．

②∵$\angle F=40°$，

∴$\angle FBC+\angle BCF=180°-40°=140°$，

∵$\angle ABC$和$\angle BCD$的角平分线交于点$E$，

∴$\angle EBC+\angle ECB=70°$，

∴$\angle BEC=180°-70°=110°$．

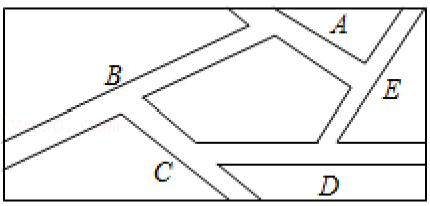
11．（2022春•丰泽区期末）如图，清晨小明沿着一个五边形广场周围的小路，按逆时针方向跑步．

（1）小明每从一条街道转下一条街道时，身体转过的角是哪个角，在图上标出；

（2）他每跑一圈，身体转过的角度之和是多少？

（3）你是怎么得到的？

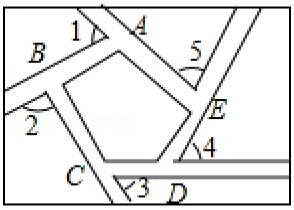
（4）如果广场是六边形、八边形的形状，那么还有类似的结论吗？




**【分析】**（1）根据外角的定义即可求解；

（2）（3）根据多边形的外角和等于360度即可求解．

【解答】解：（1）小明每从一条街道转到下一条街道时，身体转过是∠1，∠2，∠3，∠4，∠5；




（2）他每跑完一圈，身体转过的角度之和是 360 度；

（3）∵∠1+∠*BAE*＝∠2+∠*ABC*＝∠3+∠*BCD*＝∠4+∠*CDE*＝∠5+∠*DEA*＝180°，

∠*BAE*+∠*ABC*+∠*BCD*+∠*CDE*+∠*DEA*＝（5﹣2）×180°＝540°，

∴∠1+∠2+∠3+∠4+∠5＝5×180°﹣540°＝360°；

（4）如果广场是六边形、八边形的形状，那么他每跑完一圈，身体转过的角度之和都是 360 度．

12．（2022 春•井研县期末）已知在四边形 *ABCD* 中，∠*A*＝*x*，∠*C*＝*y*，（0°＜*x*＜180°，0°＜*y*＜180°）．

（1）∠*ABC*+∠*ADC*＝__360°﹣*x*﹣*y*__（用含 *x*、*y* 的代数式表示）；

（2）如图 1，若 *x*＝*y*＝90°，*DE* 平分∠*ADC*，*BF* 平分与∠*ABC* 相邻的外角，请写出 *DE* 与 *BF* 的位置关系，并说明理由．

（3）如图 2，∠*DFB* 为四边形 *ABCD* 的∠*ABC*、∠*ADC* 相邻的外角平分线所在直线构成的锐角，

①当 *x*＜*y* 时，若 *x*+*y*＝140°，∠*DFB*＝30°，试求 *x*、*y*．

②小明在作图时，发现∠*DFB* 不一定存在，请直接指出 *x*、*y* 满足什么条件时，∠*DFB* 不存在．

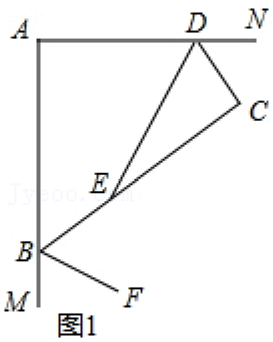


图1

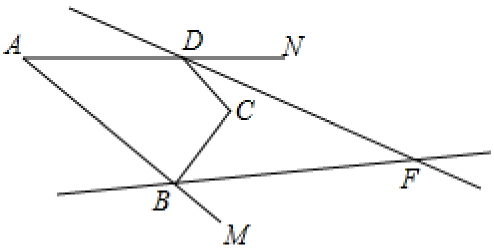


图2

【分析】（1）利用四边形内角和定理得出答案即可；

（2）利用角平分线的性质结合三角形外角的性质得出即可；

（3）①利用角平分线的性质以及三角形内角和定理，得出$\angle DFB=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x=30°$，进而得出 *x*，*y* 的值；

②当 *x*＝*y* 时，∠*ABC*、∠*ADC* 相邻的外角平分线所在直线互相平行，此时∠*DFB* 不存在．

【解答】解：（1）∠*ABC*+∠*ADC*＝360°﹣*x*﹣*y*；

故答案为：360°－$x$－$y$；

（2）如图1，延长 $DE$ 交 $BF$ 于 $G$

∵$DE$ 平分∠$ADC$，$BF$ 平分∠$MBC$，

∴∠$CDE=\frac{1}{2}$∠$ADC$，∠$CBF=\frac{1}{2}$∠$CBM$，

又∵∠$CBM$＝180°－∠$ABC$＝180°－（180°－∠$ADC$）＝∠$ADC$，

∴∠$CDE$＝∠$CBF$，

又∵∠$BED$＝∠$CDE$+∠$C$＝∠$CBF$+∠$BGE$，

∴∠$BGE$＝∠$C$＝90°，

∴$DG$⊥$BF$（即 $DE$⊥$BF$）；

（3）①由（1）得：∠$CDN$+∠$CBM$＝$x+y$，

∵$BF$、$DF$ 分别平分∠$CBM$、∠$CDN$，

∴∠$CDF$+∠$CBF=\frac{1}{2}$（$x+y$），

如图2，连接 $DB$，则∠$CBD$+∠$CDB$＝180°－$y$，

得∠$FBD$+∠$FDB$＝180°－$y+\frac{1}{2}$（$x+y$）＝180°$-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x$，

∴∠$DFB=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x$＝30°，

解方程组：$\begin{cases}x+y=140°\\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x=30°\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=40°\\ y=100°\end{cases}$；

②当 $x$＝$y$ 时，∠$ABC$、∠$ADC$ 相邻的外角平分线所在直线互相平行，此时∠$DFB$ 不存在．

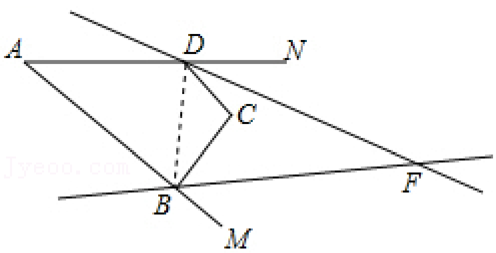



图2

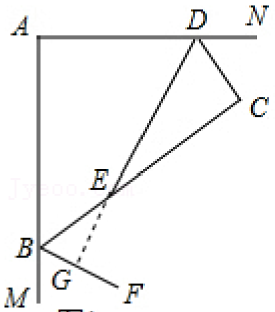


图1

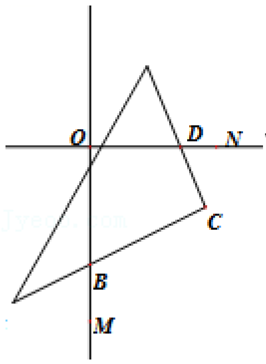
13．（2022春•长春期末）如图1，直线 $OM\perp ON$，垂足为 $O$，三角板的直角顶点 $C$ 落在 $\angle MON$ 的内部，三角板的另两条直角边分别与 $ON$、$OM$ 交于点 $D$ 和点 $B$．

【片断一】（1）小孙说：由四边形内角和知识很容易得到 $\angle OBC+\angle ODC$ 的值．

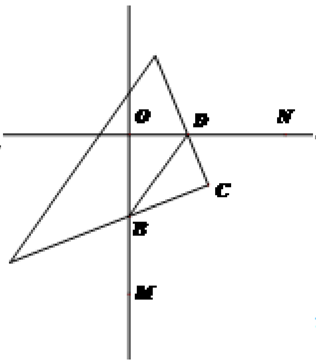
如果你是小孙，得到的正确答案应是：$\angle OBC+\angle ODC=$ $\underline{\quad 180 \quad}$°．

【片断二】（2）小悟说：连结 $BD$（如图2），若 $BD$ 平分 $\angle OBC$，那么 $BD$ 也平分 $\angle ODC$．请你说明当 $BD$ 平分 $\angle OBC$ 时，$BD$ 也平分 $\angle ODC$ 的理由．

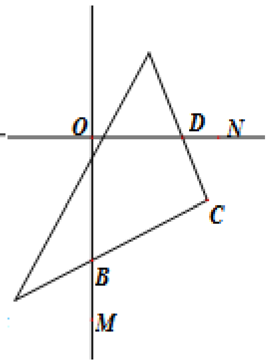
【片断三】（3）小空说：若 $DE$ 平分 $\angle ODC$、$BF$ 平分 $\angle MBC$，我发现 $DE$ 与 $BF$ 具有特殊的位置关系．请你先在备用图中补全图形，再判断 $DE$ 与 $BF$ 有怎样的位置关系并说明理由．



（图1）



（图2）



（备用图）

【分析】（1）根据四边形的性质，可得答案；

（2）根据三角形内角和定理和角平分线的定义即可求解；

（3）根据补角的性质，可得 $\angle CBM=\angle ODC$，根据相似三角形的判定与性质，可得答案．

【解答】解：（1）由四边形内角的性质，得 $\angle OBC+\angle ODC=180°$，

故答案为：180；

（2）∵$BD$ 平分 $\angle OBC$，

∴$\angle OBD=\angle CBD$，

∵$OM\perp ON$，

∴$\angle DOB=90°$，

∴$\angle OBD+\angle ODB=90°$，

∵$\angle C=90°$，

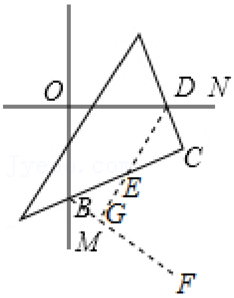
∴$\angle CBD+\angle CDB=90°$，

∴$\angle ODB=\angle CDB$，

∴$BD$ 平分$\angle ODC$；

（3）$DE\perp BF$，

理由：如图，延长 $DE$ 交 $BF$ 于 $G$，




，

∵$\angle ODC+\angle OBC=\angle CBM+\angle OBC=180$，

∴$\angle CBM=\angle ODC$，

$\frac{1}{2}\angle CBM=\angle EBG=\frac{1}{2}\angle ODC=\angle EDC$，

∵$\angle BEG=\angle DEC$，

∴$\triangle DEC\backsim\triangle BEG$，

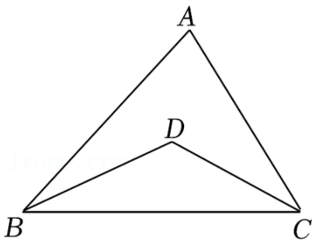
∴$\angle BGE=\angle DCE=90°$，

∴$DE\perp BF$.

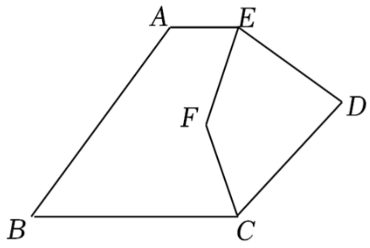
14．（2022 春•无锡期中）阅读并解决下列问题：

（1）如图①，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线交于点 $D$，则$\angle BDC=$__120°__.

（2）如图②，五边形 $ABCDE$ 中，$AE\parallel BC$，$EF$ 平分$\angle AED$，$CF$ 平分$\angle BCD$，若$\angle EDC=72°$，求$\angle EFC$ 的度数.




图①




图②

【分析】（1）首先根据三角形的内角和定理，求出∠$ABC$、∠$ACB$ 的度数和是多少；然后根据∠$ABC$、∠$ACB$ 的平分线交于点 $D$，求出∠$DBC$、∠$DCB$ 的度数和是多少; 最后在△$BCD$ 中，根据三角形的内角和定理，求出∠$BDC$ 的度数是多少即可．

（2）首先根据 $AE$∥$BC$，可得∠$A$+∠$B$＝180°，再用五边形的内角和减去 180°，求出∠$AED$、∠$EDC$、∠$BCD$ 的度数和；然后根据∠$EDC$＝70°，求出∠$AED$、∠$EDC$ 的度数和；最后根据 $EF$ 平分∠$AED$，$CF$ 平分∠$BCD$，求出∠$FED$、∠$FCD$ 的度数和；再用四边形 $CDEF$ 的内角和减去∠$FED$、∠$FCD$、∠$EDC$ 的度数和，求出∠$EFC$ 的度数．

【解答】解：（1）∵∠$A$＝60°，

∴∠$ABC$+∠$ACB$＝180°﹣60°＝120°，

∵∠$ABC$、∠$ACB$ 的平分线交于点 $D$，

∴∠$ABD$＝∠$DBC$，∠$DCB$＝∠$ACD$，

∴∠$DBC$+∠$DCB$＝120°÷2＝60°，

∴∠$BDC$＝180°﹣60°＝120°，

故答案为：120°；

（2）∵$AE$∥$BC$，

∴∠$A$+∠$B$＝180°，

∵五边形 $ABCDE$ 的内角和是 540°，

∴∠$AED$+∠$EDC$+∠$BCD$＝540°﹣180°＝360°，

∵∠$EDC$＝72°，

∴∠$AED$+∠$BCD$＝360°﹣72°＝288°，

∵$EF$ 平分∠$AED$，$CF$ 平分∠$BCD$，

∴∠$FED$+∠$FCD$＝288°÷2＝144°，

∴∠$EFC$＝360°﹣（∠$FED$+∠$FCD$+∠$EDC$）＝360°﹣（144°+72°）＝144°

15．（2022 春•冠县期末）某同学在学习过程中，对教材的一个有趣的问题做如下探究：

【习题回顾】

已知：如图 1，在△*ABC* 中，角平分线 *BO*、*CO* 交于点 *O*．求∠*BOC* 的度数．

（1）若∠*A*＝40°，请直接写出∠*BOC*＝__110__；

【变式思考】

（2）若∠*A*＝α，请猜想∠*BOC* 与 α 的关系，并说明理由；

【拓展延伸】

（3）已知：如图 2，在△*ABC* 中，角平分线 *BO*、*CO* 交于点 *O*，*OD*⊥*OB*，交边 *BC* 于点 *D*，点 *E* 在 *CB* 的延长线上，作∠*ABE* 的平分线交 *CO* 的延长线于点 *F*．若∠*F*＝β，猜想∠*BAC* 与 β 的关系，并说明理由．

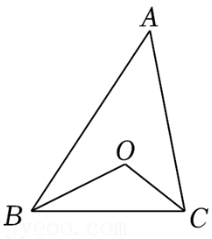



图1

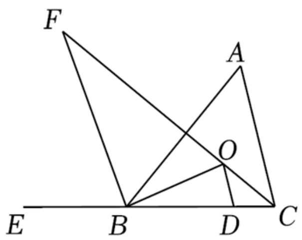



图2

【分析】（1）利用三角形内角和和角平分线的性质，即可求得角度的大小．

（2）将定角换成动角，同样利用三角形内角和和角平分线的性质，将角之间的关系表示出来．

（3）在（2）结论基础上，通过角平分线的性质可求证 *FB*∥*OD*，进而得出∠*COD*＝∠*F*＝β，再由∠*BAC*＝2∠*BOC*﹣180°以及∠*BOD*＝90°即可证明结论．

【解答】解：（1）∵∠*A*＝40°，

∴∠*ABC*+∠*ACB*＝180°﹣40°＝140°，

∵角平分线 *BO*、*CO* 分别平分∠*ABC*、∠*ACB*，

∴$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

∴$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=70°$，

在△*OBC* 中，∠*BOC*＝180°﹣（∠*OBC*+∠*OCB*）＝110°，

故答案为：110．

（2）∵∠*A*＝α，

∴∠*ABC*+∠*ACB*＝180°﹣∠α，

∵$BO$、$CO$ 是角平分线，

∴$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=90°-\frac{1}{2}\angle\alpha$，

∴$\angle BOC=180°-\angle OBC-\angle OCB=90°+\frac{1}{2}\angle\alpha$，

（3）$\angle BAC=2\beta$.

理由：由（2）结论可知：$\angle BOC=90°+\frac{\angle BAC}{2}$，

∴$\angle BAC=2\angle BOC-180°$.

∵$OB$、$BF$ 分别平分$\angle ABC$ 和$\angle ABE$，

∴$\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ABF=\frac{1}{2}\angle ABE$，

∴$\angle OBF=\angle ABO+\angle ABF=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ABE)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

∵$OD\perp OB$，

∴$\angle BOD=90°$.

∵$BF\parallel OD$，

∴$\angle COD=\angle F=\beta$.

∴$\angle BOC=\angle BOD+\angle COD=90°+\beta$，

∵$\angle BAC=2\angle BOC-180°$，

∴$\angle BAC=2\angle BOC-180°=2\beta$.

∴$\angle BAC=2\beta$.

16．（2022 春•淅川县期末）[规律探索]探索三角形的内（外）角平分线形成的角的规律：

在三角形中，由三角形的内角平分线外角平分线所形成的角存在一定的规律．

规律 1：三角形的两个内角的平分线形成的钝角等于 90°加上第三个内角度数的一半；

规律 2：三角形的两个外角的平分线形成的锐角等于 90°减去与这两个外角不相邻的内角度数的一半．

[问题呈现]如图①，点 $P$ 是△$ABC$ 的内角平分线 $BP$ 与 $CP$ 的交点，点 $M$ 是△$ABC$ 的外角平分线 $BM$ 与 $CM$ 的交点，则$\angle P=90°+\frac{1}{2}\angle A$，$\angle M=90°-\frac{1}{2}\angle A$．

说明$\angle P=90°+\frac{1}{2}\angle A$ 如下：

∵$BP$、$CP$ 是△$ABC$ 的角平分线，

∴$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC$．

∴$\angle A+2（\angle 1+\angle 2）=180°$．…………①

∴$\angle 1+\angle 2=90°-\frac{1}{2}\angle A$．

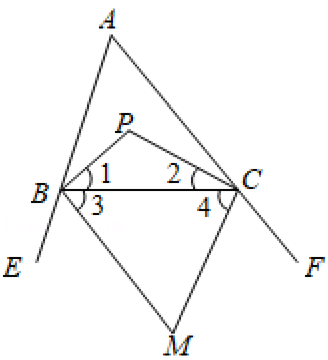
∴$\angle P=180°-（\angle 1+\angle 2）=90°+\frac{1}{2}\angle A$．

请你仔细阅读理解上面的说理过程，完成下列问题：

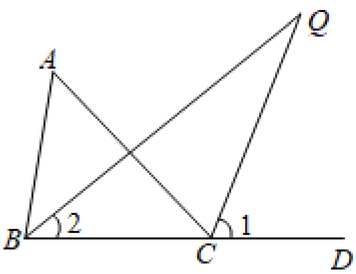
（1）上述说理过程中步骤①的依据是 <u>三角形内角和等于 180°</u>．

（2）结合图①，写出说明$\angle M=90°-\frac{1}{2}\angle A$的说理过程．

[拓展延伸]如图②，点 $Q$ 是△$ABC$ 的内角平分线 $BQ$ 与△$ABC$ 的外角（$\angle ACD$）平分线 $CQ$ 的交点．若$\angle A=50°$，则$\angle Q$的大小为 <u>25</u> 度．




图①




图②

【分析】【问题呈现】（1）根据三角形内角和定理解答；

（2）根据角平分线的定义得到$\angle 3=\frac{1}{2}\angle EBC$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle FCB$，根据三角形的内角和定理得到结论；

【拓展延伸】根据角平分线的定义得到$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ACD$，$2=\frac{1}{2}\angle ABC$，根据三角形的外角的性质得到$\angle A=\angle ACD-\angle ABC=2（\angle 1-\angle 2）$，求得$\angle Q=\angle 1=\angle 2$，推出$\angle A=2\angle Q$，于是得到结论．

【解答】解：【问题呈现】

（1）证明过程中步骤（2）的依据是三角形内角和等于 180°，

故答案为：三角形内角和等于 180°；

（2）∵$BM$、$CM$ 是△$ABC$ 的外角平分线，

∴$\angle 3=\frac{1}{2}\angle EBC$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle FCB$，

∴$\angle ABC=180°-2\angle 3$，$\angle ACB=180°-2\angle 4$，

∴$\angle A+（180°-2\angle 3）+（180°-2\angle 4）=180°$，

∴$\angle 3+\angle 4=90°+\frac{1}{2}\angle A$，

∵$\angle 3+\angle 4+\angle M=180°$，

∴$\angle M=180°-(90°+\frac{1}{2}\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle A$；

【拓展延伸】

∵$CQ$ 平分$\angle ACD$，

∴$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ACD$，

∵$BQ$ 平分$\angle ABC$，

∴$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC$，

∵$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，

∴$\angle A=\angle ACD-\angle ABC=2(\angle 1-\angle 2)$，

∵$\angle 1=\angle 2+\angle Q$，

∴$\angle Q=\angle 1=\angle 2$，

∴$\angle A=2\angle Q$，

即$\angle Q=\frac{1}{2}\angle A=25$，

故答案为：25．

17．（2022•驿城区校级期末）在图 1 中，已知△$ABC$ 中，$\angle B>\angle C$，$AD\perp BC$ 于 $D$，$AE$ 平分$\angle BAC$，$\angle B=70°$，$\angle C=40°$，求$\angle DAE$ 的度数．

（2）在图 2 中，$\angle B=x$，$\angle C=y$，其他条件不变，若把“$AD\perp BC$ 于 $D$”改为“$F$ 是 $AE$ 上一点，$FD\perp BC$ 于 $D$”，试用 $x$、$y$ 表示$\angle DFE=$\_\_$\frac{1}{2}(x-y)$__；

（3）在图 3 中，当点 $F$ 是 $AE$ 延长线上一点，其余条件不变，则（2）中的结论还成立吗？若成立，请说明为什么；若不成立，请写出成立的结论，并说明为什么．

（4）在图 3 中，分别作出$\angle BAE$ 和$\angle EDF$ 的角平分线，交于点 $P$，如图 4．试用 $x$、$y$ 表示$\angle P=$\_\_$\frac{1}{4}(3x-y)$__．