重庆市乌江新高考协作体2024届高考模拟监测（二）

数学试题

（分数：150分，时间：120分钟）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. “$a+b<-2$，且$ab>1$”是“$a<-1$，且$b<-1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

2. 复数$z=\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}^3\right)\left(\mathrm{i}^4-2\mathrm{i}\right)$的实部为（　　）

A. 1　　B. 3　　C. -2　　D. -1

3. 2024年3月22日国家文物局在北京公布2023年《全国十大考古新发现》，安徽省皖南地区郎溪县磨盘山遗址成功入选并排名第三，经初步确认，该遗址现存马家浜文化区、崧泽文化区、良渚文化区、钱山漾文化区四大区域，总面积约6万平方米.该遗址延续时间长、谱系完整，是长江下游地区少有的连续时间近4000年的中心性聚落.对认识多元化一体中华文明在皖南地区的演进方式具有重要的价值，南京大学历史学院赵东升教授团队现在对该遗址四大区域进行考古发掘，现安排包含甲、乙在内的6名研究生同学到这4个区域做考古志愿者，每人去1个区域，每个区域至少安排1个人，则甲、乙两人安排在相同区域的方法种数为（　　）

A. 96　　B. 144　　C. 240　　D. 360

4. 若正四面体$P-ABC$的棱长为$2\sqrt{3}$，M为棱PA上的动点，则当三棱锥$M-ABC$的外接球的体积最小时，三棱锥$M-ABC$的体积为（　　）

A. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

5. 假设变量 x 与变量 Y 的 n 对观测数据为 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\cdots,\left(x_n,y_n\right)$，两个变量满足一元线性回归模型 $\begin{cases}Y=bx+e,\\E\left(e\right)=0,D\left(e\right)=\sigma^2\end{cases}$.要利用成对样本数据求参数 b 的最小二乘估计 $\hat{b}$，即求使 $Q(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-bx_i\right)^2$ 取最小值时的 b 的值，则（　　）

A. $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$　　B. $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}$

C. $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}}$　　D. $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$

6. 设 $a=\dfrac{1}{10}$，$b=\ln1.21$，$c=10\sin\dfrac{1}{100}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

7. 已知圆 C：$x^2+\left(y-3\right)^2=4$，过点 $\left(0,4\right)$ 的直线 l 与 x 轴交于点 P，与圆 C 交于 A，B 两点，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[0,1\right]$　　B. $\left[0,1\right)$　　C. $\left[0,2\right]$　　D. $\left[0,2\right)$

8. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，点 D 为 AC 的中点，满足 $\overrightarrow{DO}=\dfrac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC},\lambda\in\mathbf{R}$，若 $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 2 分.

9. 指示函数是一个重要的数学函数，通常用来表示某个条件的成立情况.已知 U 为全集且元素个数有限，对于 U 的任意一个子集 S，定义集合 S 的指示函数 $1_S\left(x\right),1_S\left(x\right)=\begin{cases}1,x\in S\\0,x\in\complement_U S\end{cases}$ 若 $A,B,C\subseteq U$，则（　　）

注：$\sum_{x\in M} f(x)$ 表示M中所有元素x所对应的函数值$f\left(x\right)$之和（其中M是$f\left(x\right)$定义域的子集）.

A. $\sum_{x\in A} 1_A(x) < \sum_{x\in U} 1_A(x)$

B. $1_{A\cap B}(x) \le 1_A(x) \le 1_{A\cup B}(x)$

C. $\sum_{x\in U} 1_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in U}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)$

D. $\sum_{x\in U}\left(1-1_A(x)\right)\left(1-1_B(x)\right)\left(1-1_C(x)\right) = \sum_{x\in U} 1_U(x) - \sum_{x\in U} 1_{A\cup B\cup C}(x)$

10. 已知圆$O: x^2+y^2=1$，圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=4, a\in\mathrm{R}$，则（　　）

A. 两圆的圆心距$|OC|$的最小值为1

B. 若圆O与圆C相切，则$a=\pm 2\sqrt{2}$

C. 若圆O与圆C恰有两条公切线，则$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

D. 若圆O与圆C相交，则公共弦长的最大值为2

11. 已知集合$A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|x^2-2x-8<0\right\}$，集合$B=\left\{x\middle|9^x>3^m, m\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\right\}$，若$A\cap B$有且仅有3个不同元素，则实数$m$的值可以为（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，点$P$是四边形$ABCD$所在平面上一点，满足$\overrightarrow{PA}+10\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+10\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{0}$.设$s,t$分别为四边形$ABCD$与$\triangle PAB$的面积，则$\frac{t}{s}=$______.

13. 若关于x的方程$m+\mathrm{e}\ln m=\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}\left(\ln x-x\right)$有解，则实数$m$的最大值为________.

14. 四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=\sqrt{2}$，$AB=1$．四棱锥$P-ABCD$的各个顶点均在球O的表面上，$B\in l$，$l\perp OB$，则直线l与平面PAC所成夹角的范围为________.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$.

（1）求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(\mathrm{e}, f\left(\mathrm{e}\right)\right)$处的切线方程；

（2）当$x\ge 1$时，$xf\left(x\right)\le a\left(x^2-1\right)$，求 a 的取值范围.

16. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$2b+c-2a\cos C=0$.

（1）求角A；

（2）射线AB绕A点旋转90°交线段BC于点E，且$AE=1$，求$\triangle ABC$的面积的最小值.

17. 某汽车厂商生产某型号具有自动驾驶功能的汽车，该型号汽车配备两个相互独立的自动驾驶系统（记为系统A和系统B），该型号汽车启动自动驾驶功能后，先启动这两个自动驾驶系统中的一个，若一个出现故障则自动切换到另一个系统.为了确定先启动哪一个系统，进行如下试验：每一轮对系统A和B分别进行测试试验，一轮的测试结果得出后，再安排下一轮试验.当一个系统出现故障的次数比另一个系统少2次时，就停止试验，并认为出现故障少的系统比另一个系统更稳定.为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若系统A不出现故障且系统B出现故障，则系统A得1分，系统B得-1分；若系统A出现故障且系统B不出现故障，则系统A得-1分，系统B得1分；若两个系统都不出现故障或都出现故障，则两个系统均得0分.系统A、B出现故障的概率分别记为α和β，一轮试验中系统A的得分为X分.

（1）求X的分布列；

（2）若系统A和B在试验开始时都赋予2分，$p_i\left(i=0,1,2,3,4\right)$表示“系统A的累计得分为i时，最终认为系统A比系统B更稳定”的概率，则$p_0=0,p_4=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}\left(i=1,2,3\right)$，其中$a=P\left(X=-1\right),b=P\left(X=0\right),c=P\left(X=1\right)$.现根据$p_2$的值来决定该型号汽车启动自动驾驶功能后先启动哪个系统，若$p_2\le 0.1$，则先启动系统B；若$p_2\ge 0.9$，则先启动系统A；若$0.1<p_2<0.9$，则随机启动两个系统中的一个，且先启动系统A的概率为p_2.

①证明：$p_2=\dfrac{(1-\alpha)^2\beta^2}{\alpha^2(1-\beta)^2+(1-\alpha)^2\beta^2}$；

②若$\alpha=0.001,\beta=0.002$，由①可求得$p_2\approx 0.8$，求该型号汽车启动自动驾驶功能后无需自动切换到另一个自动驾驶系统的概率.

18. 双曲线$C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a,b>0)$的焦点为$F_1,F_2$（$F_1$在$F_2$下方），虚轴的右端点为A，过点$F_2$且垂直于$y$轴的直线$l$交双曲线于点$P$（$P$在第一象限），与直线$AF_1$交于点$B$，记$\triangle ABF_2$的周长为$m$,$\triangle BPF_1$的周长为$n$,$|m-n|=4$.

（1）若C的一条渐近线为$y=\sqrt{2}x$，求C的方程；

（2）已知动直线l'与C相切于点T，过点T且与l'垂直的直线分别交x轴，y轴于M,N两点，Q为线段MN上一点，设$\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{MN},\lambda\in(0,1)$为常数．若$||QF_2|-|QF_1||$为定值，求$\lambda b$的最大值．

19. 人类对地球形状的认识经历了漫长的历程．古人认为宇宙是“天圆地方”的，以后人们又认为地球是个圆球.17世纪，牛顿等人根据力学原理提出地球是扁球的理论，这一理论直到1739年才为南美和北欧的弧度测量所证实．其实，之前中国就曾进行了大规模的弧度测量，发现纬度越高，每度子午线弧长越长的事实，这同地球两极略扁，赤道隆起的理论相符．地球的形状类似于椭球体，椭球体的表面为椭球面，在空间直角坐标系下，椭球面$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\left(a>0,b>0,c>0\right)$，这说明椭球完全包含在由平面$x=\pm a,y=\pm b,z=\pm c$所围成的长方体内，其中$a,b,c$按其大小，分别称为椭球的长半轴、中半轴和短半轴．某椭球面与坐标面$z=0$的截痕是椭圆$E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（1）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$在其上一点$Q\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程为$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$．过椭圆$E$的左焦点$F_1$作直线$l$与椭圆$E$相交于$A,B$两点，过点$A,B$分别作椭圆的切线，两切线交于点$M$，求$\vee ABM$面积的最小值．

（2）我国南北朝时期的伟大科学家祖暅于5世纪末提出了祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”．祖暅原理用现代语言可描述为：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等．当$b=c$时，椭球面Γ围成的椭球是一个旋转体，类比计算球的体积的方法，运用祖暅原理求该椭球的体积．

参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. “$a+b<-2$，且$ab>1$”是“$a<-1$，且$b<-1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，利用不等式的基本性质，结合充分、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】若 $a<-1$，且 $b<-1$，根据不等式的加法和乘法法则可得 $a+b<-2$，且 $ab>1$，即必要性成立；

当 $a=-3, b=-\frac{1}{2}$，满足 $a+b<-2$，且 $ab>1$，但是 $b=-\frac{1}{2}>-1$，故充分性不成立，

所以“$a+b<-2$，且 $ab>1$”是“$a<-1$，且 $b<-1$”的必要不充分条件.

故选：B

2. 复数 $z=\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}^{3}\right)\left(\mathrm{i}^{4}-2\mathrm{i}\right)$ 的实部为（　　）

A. 1　　B. 3　　C. -2　　D. -1

【答案】B

【解析】

【分析】通过复数的运算将复数化简成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式，即可得到实部.

【详解】由 $z=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，可得复数 z 的实部为 3，

故选：B.

3. 2024 年 3 月 22 日国家文物局在北京公布 2023 年《全国十大考古新发现》，安徽省皖南地区郎溪县磨盘山遗址成功入选并排名第三，经初步确认，该遗址现存马家浜文化区、崧泽文化区、良渚文化区、钱山漾文化区四大区域，总面积约 6 万平方米.该遗址延续时间长、谱系完整，是长江下游地区少有的连续时间近 4000 年的中心性聚落.对认识多元化一体中华文明在皖南地区的演进方式具有重要的价值，南京大学历史学院赵东升教授团队现在对该遗址四大区域进行考古发掘，现安排包含甲、乙在内的 6 名研究生同学到这 4 个区域做考古志愿者，每人去 1 个区域，每个区域至少安排 1 个人，则甲、乙两人安排在相同区域的方法种数为（　　）

A. 96　　B. 144　　C. 240　　D. 360

【答案】C

【解析】

【分析】6 名同学分成 4 组，再把 4 组人分到 4 个区域，

【详解】先将 6 名同学分成 4 组，则 4 个组的人数为 $1,1,2,2$ 或 $1,1,1,3$，

当甲、乙在 2 人组，再从另外 4 人任选 2 人组成一组，其余的一人一组，有 C_4^2 种分组方法；

当甲、乙在3人组，甲、乙与另外4人中的1人组成一组，其余的一人一组，有C_4^1种分组方法，

再把4组人分到4个区域，所以安排方法种数为$\left(C_4^2+C_4^1\right)A_4^4=240$.

故选：C.

4. 若正四面体$P-ABC$的棱长为$2\sqrt{3}$，M为棱PA上的动点，则当三棱锥$M-ABC$的外接球的体积最小时，三棱锥$M-ABC$的体积为（　　）

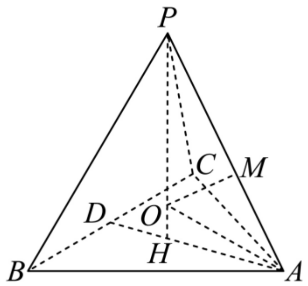
A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

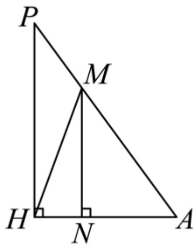
【答案】A

【解析】

【分析】首先根据几何性质分析外接球的球心位置，再构造长度的等量关系，即可求解三棱锥的体积.

【详解】如图，





在正四面体$P-ABC$中，假设$PH\perp$底面ABC，则点H为$\triangle ABC$外心.

在PH上取一点O，满足$OA=OM$，则O为三棱锥$M-ABC$的外接球球心.

$\therefore$当OA取得最小值时，OM最小，三棱锥$M-ABC$的外接球体积最小，此时点O与点H重合.

作$MN\perp AH$，垂足为N，$\therefore MN//PH$，

$\therefore MN$为三棱锥$M-ABC$的高.

由正四面体$P-ABC$的棱长为$2\sqrt{3}$，易知$AH=2=MH$，

所以$PH=\sqrt{PA^2-AH^2}=2\sqrt{2}$，$PA=2\sqrt{3}$，$AH=2$.

由$\frac{PH}{AH}=\frac{MN}{AN}=\sqrt{2}$，设$AN=x$，则$MN=\sqrt{2}x$，$HN=2-x$.

由$HM^2=MN^2+HN^2$，得$2^2=\left(2-x\right)^2+\left(\sqrt{2}x\right)^2$，解得$x=\frac{4}{3}$.

$\therefore MN=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. $\therefore V_{三棱锥M-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

故选：A

【点睛】关键点点睛：关键是确定外接球的球心位置.

5. 假设变量x与变量Y的n对观测数据为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，两个变量满足一元线性回归模型$\begin{cases}Y=bx+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2\end{cases}$.要利用成对样本数据求参数$b$的最小二乘估计$\hat{b}$，即求使$Q(b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-bx_i\right)^2$取最小值时的$b$的值，则（　　）

A. $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

B. $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$

C. $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$

D. $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简为二次函数形式，根据二次函数性质得到最值.

【详解】因为$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-bx_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2-2bx_iy_i+b^2x_i^2\right)$

$=b^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2b\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$，

上式是关于b的二次函数，

因此要使Q取得最小值，当且仅当b的取值为$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是化简为二次函数形式，利用其性质得到最值时的b.

6. 设$a=\dfrac{1}{10}$，$b=\ln1.21$，$c=10\sin\dfrac{1}{100}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

【答案】B

【解析】

【分析】令 $g(x)=x-\sin x$，求导可证明 $x>\sin x$，进而可得 $10\sin\frac{1}{100}<10\times\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$，可判断 $a>c$，令 $f(x)=x-\ln(1+x)^2=x-2\ln(1+x)$，求导可证 $x<2\ln(1+x)=\ln(1+x)^2$，令 $x=\frac{1}{10}$，可判得 $a<b$.

【详解】令 $g(x)=x-\sin x$，可得 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $g(x)=x-\sin x$ 在 R 上单调递增，

当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)$，所以 $x>\sin x$，

所以 $10\sin\frac{1}{100}<10\times\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$，所以 $a>c$，

令 $f(x)=x-\ln(1+x)^2=x-2\ln(1+x)$，求导可得 $f'(x)=1-\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$，

当 $0<x<1$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)<f(0)$，

即 $x-2\ln(1+x)<0-2\ln 1=0$，所以 $x<2\ln(1+x)=\ln(1+x)^2$，

令 $x=\frac{1}{10}$，可得 $\frac{1}{10}<\ln(1+0.1)^2=\ln 1.21$，即 $a<b$，

所以 $c<a<b$.

故选：B.

7. 已知圆 C：$x^2+(y-3)^2=4$，过点 $(0,4)$ 的直线 l 与 x 轴交于点 P，与圆 C 交于 A，B 两点，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ 的取值范围是（　　）

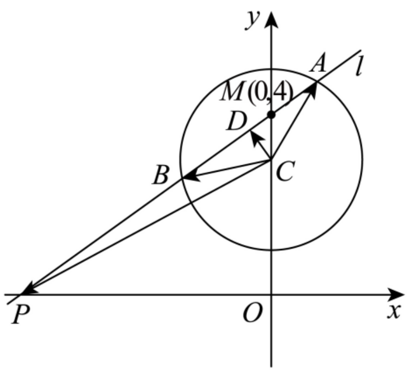
A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$　　C. $[0,2]$　　D. $[0,2)$

【答案】D

【解析】

【分析】作出线段 AB 的中点 D，将 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ 转化为 $2\overrightarrow{CD}$，利用垂径定理，由图化简得 $\overrightarrow{CP}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=2|\overrightarrow{CD}|^2$，只需求 $|\overrightarrow{CD}|$ 的范围即可，故又转化成求过点 $M\ (0,4)$ 的弦 AB 长的范围问题.

【详解】



如图，取线段 AB 的中点 D，连接 CD，则 $CD \perp AB$，

由 $\overrightarrow{CP} \cdot \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=2\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP}) \cdot \overrightarrow{CD}=2|\overrightarrow{CD}|^{2}$，

因直线 l 经过点 $M(0,4)$，考虑临界情况，

当线段 AB 中点 D 与点 M 重合时（此时 $CM \perp AB$），弦长 AB 最小，此时 CD 最长，

为 $|CD|_{\max}=|CM|=4-3=1$，（但此时直线 l 与 x 轴平行，点 P 不存在）；

当线段 AB 中点 D 与点 C 重合时，点 P 与点 O 重合，CD 最短为 0（此时符合题意）.

故 $\overrightarrow{CP} \cdot \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ 的范围为 $[0,2)$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键在于结合圆 C 的弦 AB 想到取其中点 D，将 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ 转化为 $2\overrightarrow{CD}$，利用垂径定理，将所求式转化成 $2|\overrightarrow{CD}|^{2}$，而求 $|\overrightarrow{CD}|$ 范围即求弦 AB 的长的范围即可.

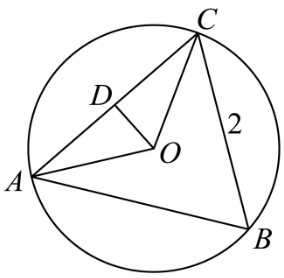
8. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，点 D 为 AC 的中点，满足 $\overrightarrow{DO}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbf{R}$，若 $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为（　　）

A. 2　　　　B. 4　　　　C. $4\sqrt{2}$　　　　D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】首先由 $\overrightarrow{DO}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbf{R}$，$DO \perp AC$，结合余弦定理得出 $c^{2}=\frac{b^{2}}{2}+4$，进一步由三角形面积公式、同角三角函数关系恒等式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{16}\left(b^{2}-32\right)^{2}+64}$，由此即可得解.

【详解】


因为 $\overrightarrow{DO}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbf{R}$，$DO \perp AC$，

所以 $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC}=\frac{2\lambda}{3}cb\cos\angle BAC-\frac{\lambda}{2}b^{2}=0, \lambda \in \mathbf{R}$，

从而 $4cb\cos\angle BAC=3b^2$，即 $4cb\cdot\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2cb}=3b^2$，

所以 $c^2+b^2-4=\dfrac{3b^2}{2}$，所以 $c^2=\dfrac{b^2}{2}+4$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2-(bc)^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-\frac{\left(\frac{3b^2}{2}\right)^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2\left(\frac{b^2}{2}+4\right)-\frac{9b^4}{16}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{b^4}{16}+4b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{16}\left(b^2-32\right)^2+64}\le\frac{1}{2}\sqrt{64}=4,$$

等号成立当且仅当 $b=4\sqrt{2},c=2\sqrt{5}$，

综上所述，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 4.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：关键是依次得出 $c^2=\dfrac{b^2}{2}+4$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{1}{16}\left(b^2-32\right)^2+64}$，由此即可顺利得解.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 2 分.

9. 指示函数是一个重要的数学函数，通常用来表示某个条件的成立情况.已知 U 为全集且元素个数有限，对于 U 的任意一个子集 S，定义集合 S 的指示函数 $1_S(x)$, $1_S(x)=\begin{cases}1, x\in S\\0, x\in \complement_U S\end{cases}$ 若 $A,B,C\subseteq U$，则（　　）

注：$\sum\limits_{x\in M}f(x)$ 表示 M 中所有元素 x 所对应的函数值 $f(x)$ 之和（其中 M 是 $f(x)$ 定义域的子集）.

A. $\sum\limits_{x\in A}1_A(x)<\sum\limits_{x\in U}1_A(x)$

B. $1_{A\cap B}(x)\le 1_A(x)\le 1_{A\cup B}(x)$

C. $\sum\limits_{x\in U}1_{A\cup B}(x)=\sum\limits_{x\in U}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)$

D. $\sum_{x\in U}\left(1-1_A(x)\right)\left(1-1_B(x)\right)\left(1-1_C(x)\right)=\sum_{x\in U}1_U(x)-\sum_{x\in U}1_{A\cup B\cup C}(x)$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据$1_S\left(x\right)$的定义$1_S\left(x\right)=\begin{cases}1, x\in S\\0, x\in \complement_U S\end{cases}$，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于 A，由于$A\subseteq U$,所以$\sum_{x\in U}1_A(x)=\sum_{x\in A}1_A(x)+\sum_{x\in \complement_u A}1_A(x)=\sum_{x\in A}1_A(x),$

故$\sum_{x\in A}1_A(x)=\sum_{x\in U}1_A(x)$，故 A 错误，

对于 B，若$x\in A\cap B$,则$1_{A\cap B}(x)=1,1_A(x)=1,1_{A\cup B}(x)=1$，此时满足$1_{A\cap B}(x)\le 1_A(x)\le 1_{A\cup B}(x)$，

若$x\in A$且$x\notin B$时，$1_{A\cap B}(x)=0,1_A(x)=1,1_{A\cup B}(x)=1$，

若$x\in B$且$x\notin A$时，$1_{A\cap B}(x)=0,1_A(x)=0,1_{A\cup B}(x)=1$，

若$x\notin A$且$x\notin B$时，$1_{A\cap B}(x)=0,1_A(x)=0,1_{A\cup B}(x)=0$，

综上可得$1_{A\cap B}(x)\le 1_A(x)\le 1_{A\cup B}(x)$，故 B 正确，

对于 C，$\sum_{x\in U}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)=\sum_{x\in\left(A\cap\complement_U B\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)+\sum_{x\in\left(B\cap\complement_U A\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)$

$+\sum_{x\in\left(A\cap B\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)+\sum_{x\in\complement_U\left(A\cup B\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)$

$=\sum_{x\in\left(A\cap\complement_U B\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)+\sum_{x\in\left(B\cap\complement_U A\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)+\sum_{x\in\left(A\cap B\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)+\sum_{x\in\complement_U\left(A\cup B\right)}0$

$=\sum_{x\in\left(A\cup B\right)}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)$

而$\sum_{x\in U}1_{A\cup B}(x)=\sum_{x\in A\cup B}1_{A\cup B}(x)+\sum_{x\in\complement_U\left(A\cup B\right)}1_{A\cup B}(x)=\sum_{x\in A\cup B}1_{A\cup B}(x)$,

由于$1_{(A\cup B)}\left(x\right)=\begin{cases}1, x\in A\cup B\\0, x\in\complement_U\left(A\cup B\right)\end{cases}$，所以$1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)=1_{A\cup B}(x)$

故$\sum_{x\in U}1_{A\cup B}(x)=\sum_{x\in U}\left(1_A(x)+1_B(x)-1_A(x)1_B(x)\right)$,C 正确，

$\sum_{x\in U}1_U(x)-\sum_{x\in U}1_{A\cup B\cup C}(x)=\sum_{x\in\complement_U\left(A\cup B\cup C\right)}1_U(x)$,

当$x\in A\cup B\cup C$时，此时$1_A\left(x\right),1_B\left(x\right),1_C\left(x\right)$中至少一个为 1，所以

$\left(1-1_A(x)\right)\left(1-1_B(x)\right)\left(1-1_C(x)\right)=0$，

当$x\notin\left(A\cup B\cup C\right)$时，此时$1_A\left(x\right),1_B\left(x\right),1_C\left(x\right)$均为 0，所以$\left(1-1_A(x)\right)\left(1-1_B(x)\right)\left(1-1_C(x)\right)=1$，

故$\sum_{x\in U}\left(1-1_A(x)\right)\left(1-1_B(x)\right)\left(1-1_C(x)\right)=\sum_{x\in\complement_U(A\cup B\cup C)}\left(1-1_A(x)\right)\left(1-1_B(x)\right)\left(1-1_C(x)\right)=\sum_{x\in\complement_U(A\cup B\cup C)}1_U(x)$,故 D 正确，

故选：BCD

【点睛】关键点点睛：充分利用$1_S(x)$的定义$1_S(x)=\begin{cases}1,x\in S\\0,x\in\complement_U S\end{cases}$以及$\sum_{x\in M}f(x)$的定义，由此可得

$x\notin(A\cup B\cup C)$时，此时$1_A(x),1_B(x),1_C(x)$均为 0，$x\in A\cup B\cup C$时，此时$1_A(x),1_B(x),1_C(x)$中至少一个为 1，结合$1_S(x)$的定义化简求解.

10. 已知圆$O:x^2+y^2=1$，圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=4,a\in\mathrm{R}$，则（　　）

A. 两圆的圆心距$|OC|$的最小值为 1

B. 若圆O与圆C相切，则$a=\pm2\sqrt{2}$

C. 若圆O与圆C恰有两条公切线，则$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

D. 若圆O与圆C相交，则公共弦长的最大值为 2

【答案】AD

【解析】

【分析】根据两点的距离公式，算出两圆的圆心距$d\geq1$，从而判断出 A 项的正误; 根据两圆相切、相交的性质，列式算出a的取值范围，判断出 B,C 两项的正误；当圆O的圆心在两圆的公共弦上时，公共弦长有最大值，从而判断出 D 项的正误.

【详解】根据题意，可得圆$O:x^2+y^2=1$的圆心为$O(0,0)$，半径$r=1$，

圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=4$的圆心为$C(a,1)$，半径$R=2$.

对于 A，因为两圆的圆心距$d=|OC|=\sqrt{a^2+1}\geq1$，所以 A 项正确；

对于 B，两圆内切时，圆心距$d=|OC|=R-r=1$，即$\sqrt{a^2+1}=1$，解得$a=0$.

两圆外切时，圆心距$d=|OC|=R+r=3$，即$\sqrt{a^2+1}=3$，解得$a=\pm2\sqrt{2}$.

综上所述，若两圆相切，则$a=0$或$a=\pm2\sqrt{2}$，故 B 项不正确；

对于 C，若圆O与圆C恰有两条公切线，则两圆相交，$d=|OC|\in(R-r,R+r)$，

即$\sqrt{a^2+1}\in(1,3)$，可得$1<\sqrt{a^2+1}<3$，解得$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$且$a\neq0$，故 C 项不正确；