2024-2025学年北京市延庆区第一中学高二上学期10月月考数学试题

一、单选题：本题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，其终边经过点 $P(1,2)$，则 $\sin\alpha=(\quad)$

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(k,-2),\overrightarrow{b}=(-1,k)$，且 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 方向相反，则 $k=(\quad)$

A. $\pm\sqrt{2}$　　B. 0　　C. $-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2,b=3,\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，则 $\angle A=(\quad)$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$

4. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，且角 α，β 的终边关于 y 轴对称，则 $\cos\beta=(\quad)$

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

5. 设 l，m 是两条不同的直线，α 是一个平面，则下列命题正确的是

A. 若 $l\perp m$，$m\subset\alpha$，则 $l\perp\alpha$　　B. 若 $l\perp\alpha$，$l//m$，则 $m\perp\alpha$

C. 若 $l//\alpha$，$m\subset\alpha$，则 $l//m$　　D. 若 $l//\alpha$，$m//\alpha$，则 $l//m$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{3},BC=2$，则“$AB=2$”是“$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$”的$(\quad)$

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30°，则该长方体的体积为

A. 8　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $8\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)=t\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0,t>0)$ 的最小正周期为 π，最大值为 $\sqrt{2}$，则函数 $f(x)$ 的图象$(\quad)$

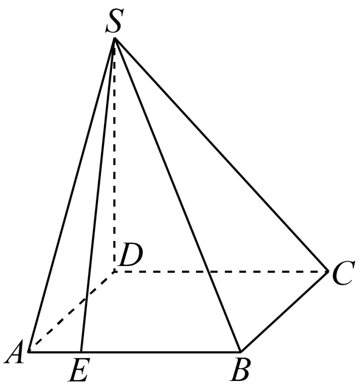
A. 关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 对称　　B. 关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 对称

C. 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 对称　　D. 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{8},0\right)$ 对称

9. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3,BC=4,\angle C=90^\circ$ .P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是$(\quad)$

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$　　C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

10. 在《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马．如图，已知四棱锥$S-ABCD$为阳马，且$AB=AD$，$SD\perp$底面$ABCD$.若E是线段AB上的点(不含端点)，设SE与AD所成的角为α，SE与底面$ABCD$所成的角为β，二面角$S-AE-D$的平面角为γ，则(　)



A. $\beta<\gamma<\alpha$　　B. $\beta<\alpha<\gamma$　　C. $\alpha<\gamma<\beta$　　D. $\alpha<\beta<\gamma$

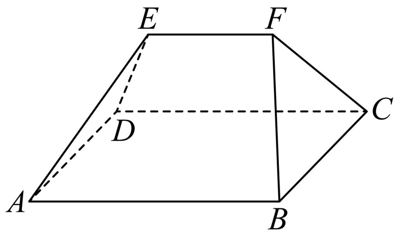
二、填空题：本题共5小题，每小题5分，共25分。

11. 向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1,\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$|\vec{a}-2\vec{b}|=$__________.

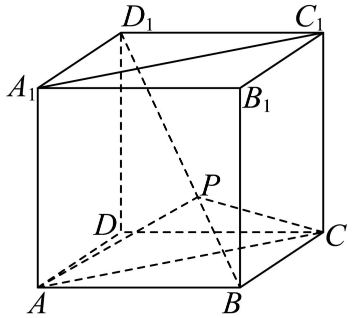
12. 在$\triangle ABC$中，点M,N满足$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$.若$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+y=$__________.

13. 已知α是任意角，且满足$\cos\left(\alpha+k\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha$，则常数$k$的一个取值为__________.

14. 楔体形构件在建筑工程上有广泛的应用.如图,某楔体形构件可视为一个五面体$ABCDEF$,其中面$ABCD$为正方形.若$AB=6cm$，$EF=3cm$，且EF与面$ABCD$的距离为$2cm$,则该楔体形构件的体积为__________.



15. 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是该正方体对角线BD_1上的动点，给出下列四个结论：



① $AC\perp B_1P$；

②$\triangle APC$ 面积的最小值是 $\sqrt{2}$；

③只存在唯一的点 P，使 $BD_1\perp$ 平面 APC；

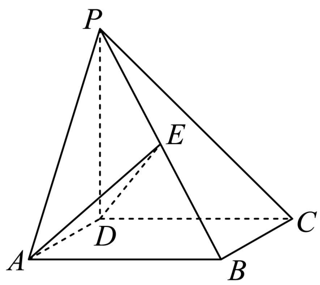
④当 $BP=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，平面 $ACP//$ 平面 A_1C_1D.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 72 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16.（本小题 12 分）

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形， $PD\perp$ 平面 $ABCD, PD=AB=1, E$ 是 PB 的中点.



(1) 求直线 BD 与直线 PC 所成角的大小；

(2) 求点 B 到平面 ADE 的距离.

17.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=sin^2x+2\sin x\cos x-cos^2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最值：

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 单调递增，求 m 的取值范围.

18.（本小题 12 分）

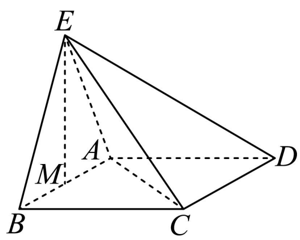
在 $\triangle ABC$ 中， $\cos 2A=-\dfrac{1}{2}, a=7, c=8$ 且 $\angle C$ 为锐角．求：

(1) 求 $\angle A$ 的大小；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（本小题 12 分）

如图，正三角形 ABE 与菱形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直， $AB=2,\angle ABC=60^\circ, M$ 是 AB 的中点.

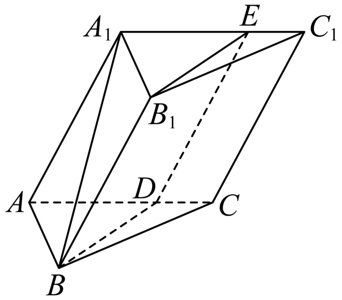


(1) 求二面角 $A-BE-C$ 的余弦值；

(2) 在线段 EC 上是否存在点 P，使得直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 45°？若存在，求出 $\dfrac{EP}{EC}$ 的值；若不存在，说明理由.

20.（本小题 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 ACC_1A_1 是边长为 4 的菱形，$AB=BC=\sqrt{13}$，点 D 为棱 AC 上动点（不与 A，C 重合），平面 BDB_1 与棱 A_1C_1 交于点 E.



(1) 求证：$BB_1//DE$；

(2) 若 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3}{4}$，从条件①、条件②、条件③中选择两个条件作为已知，求直线 C_1D 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值.

条件①：$A_1B=\sqrt{21}$

条件②：二面角 A_1-AC-B 为直二面角

条件③：$\angle ACC_1=\dfrac{2\pi}{3}$.

21.（本小题 12 分）

定义向量 $\overrightarrow{OM}=(a,b)$ 的“伴随函数”为 $f(x)=a\sin x+b\cos x$；函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的“伴随向量”为 $\overrightarrow{OM}=(a,b)$.

(1) 写出函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin x$ 的“伴随向量”为 $\overrightarrow{ON}$，并求 $\left|\overrightarrow{ON}\right|$；

(2) 已知 $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{ON}\right|=1$, $\overrightarrow{OM}$ 的“伴随函数”为 $f(x)$, $\overrightarrow{ON}$ 的“伴随函数”为 $g(x)$，设 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OM}+\mu\overrightarrow{ON}(\lambda>0,\mu>0)$，且 $\overrightarrow{OP}$ 的伴随函数为 $h(x)$，其最大值为 p.

①若 $\lambda=\mu=1$，求 p 的取值范围；

②求证：向量 $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{ON}$ 的充要条件是 $p=|\lambda-\mu|$.

答案和解析

1.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查了三角函数的定义，属于基础题.

根据三角函数的定义即可求解.

【解答】

解：由三角函数的定义可知$\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：A.

2.【答案】D

【解析】【分析】相反向量是共线向量，根据共线向量的概念求解即可.

【详解】由题可知$\vec{a}$与$\vec{b}$是共线向量且方向相反，

所以$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，$\lambda<0$且$\vec{b}\neq\vec{0}$，

所以$\begin{cases} k=-\lambda \\ -2=\lambda k \end{cases}$，解得$k=\sqrt{2},k=-\sqrt{2}$(舍去)

故选：D.

3.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了正弦定理在解三角形中的应用，属于基础题.

先求出$\sin B$，再借助正弦定理求解即可.

【解答】

解：在$\triangle ABC$中，由$\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$得$\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$，

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{3}{\frac{3}{4}}$，解得$\sin A=\dfrac{1}{2}$，

又$a<c$，故$\angle A<\angle C$，$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：A.

4.【答案】B

【解析】【分析】首先根据对称性，求α,β的关系，根据诱导公式，即可求解.

【详解】因为角α，β的终边关于y轴对称，所以$\alpha+\beta=\pi+2k\pi$，$k\in Z$，

即$\beta=-\alpha+\pi+2k\pi$，$\cos\beta=\cos(-\alpha+\pi+2k\pi)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

故选：B

5.【答案】B

【解析】【分析】

本题主要考查了立体几何中线面之间的位置关系及其中的公理和判定定理，也蕴含了对定理公理综合运用能力的考查，属基础题

根据题意，依次分析选项综合可得答案．

【解答】

解：A，根据线面垂直的判定定理，要垂直平面内两条相交直线才行，不正确；

B：由线面垂直的性质可知：平行线中的一条垂直于这个平面，则另一条也垂直这个平面．故正确．

C：$l//\alpha$，$m\subset\alpha$，则$l//m$或l，m异面，故不正确．

D：平行于同一平面的两直线可能平行，异面，相交，不正确．

故选：B.

6.【答案】C

【解析】【分析】利用三角形面积公式以及余弦定理可判断“$AB=2$”和“$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$”之间的逻辑推理关系，即得答案.

【详解】由已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=\frac{\pi}{3}, BC=2$，

若$AB=2$，则$\triangle ABC$为正三角形，故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

若$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}, \therefore bc=4$，

又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$4=b^2+c^2-bc, \therefore (b+c)^2-3bc=4, \therefore b+c=4$，

解得$b=c=2$，故$AB=2$，

所以“$AB=2$”是“$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$”的充分必要条件，

故选：C

7.【答案】C

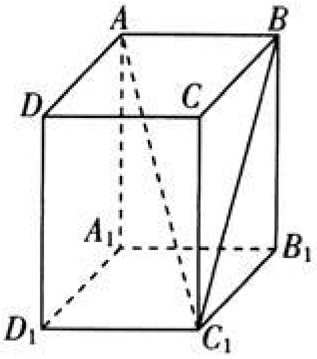
【解析】【分析】

本题考查直线与平面所成的角，以及长方体体积的计算，属于基础题.

先得到$\angle AC_1B$即为直线AC_1与平面BB_1C_1C所成的角，得到$BC_1=2\sqrt{3}$.再根据长方体体积公式计算，即可得到答案.

【解答】

解：如图，连接BC_1.



$\because AB\perp$平面BB_1C_1C，

$\therefore \angle AC_1B$即为直线AC_1与平面BB_1C_1C所成的角.

$\therefore \angle AC_1B=30^{\circ}$.又$AB=BC=2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC_1$中，$\tan 30^{\circ}=\dfrac{AB}{BC_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore BC_1=2\sqrt{3}$.

$\because BC=2$，$\therefore CC_1=2\sqrt{2}$.

$\therefore$长方体的体积$V=2\times 2\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

故选C.

8.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查三角恒等变换的综合应用以及求正弦型函数的对称轴、对称中心，属于中档题.

先利用辅助角公式化简为正弦型函数，再根据周期性求出ω，根据最值求出t，再根据正弦型函数的对称性逐一判断即可.

【解答】

解：$f(x)=t\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{t^2+1}\sin(\omega x+\varphi)$，

其中$\tan\varphi=\dfrac{1}{t}$，$t>0$，

因为函数的最小正周期为π，

所以 $\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$ ，解得 $\omega=2$ ，

因为函数的最大值为 $\sqrt{2}$ ，

所以 $\sqrt{t^2+1}=\sqrt{2}$ ，

解得 $t=1$ （$t=-1$ 舍去），

所以 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ，

因为 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ ，

所以函数图象不关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 对称，也不关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 对称，

故 A、B 错误；

因为 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\sqrt{2}$ ，

所以函数图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 对称，不关于点 $\left(\dfrac{\pi}{8},0\right)$ 对称，

故 C 正确，D 错误.

故选：C.

9.【答案】D

【解析】【分析】

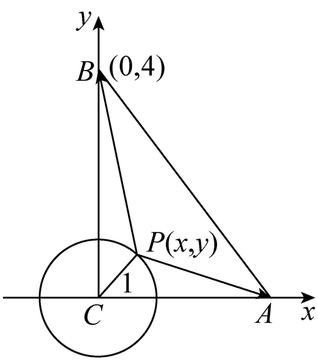
本题考查平面向量的数量积计算

法一：建立平面直角坐标系，利用数量积的坐标运算求解

法二：利用平面向量的线性运算与数量积运算进行求解

【解答】

解：法一：建立如图所示坐标系，



由题易知，设 $C(0,0)$ ， $A(3,0)$ ， $B(0,4)$ ， $\because PC=1$ ， $\therefore$ 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ ， $\theta\in[0,2\pi)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)\cdot(-\cos\theta,4-\sin\theta)=-3\cos\theta-4\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=1-5\sin(\theta+\varphi)(\sin\varphi=\frac{3}{5},\cos\varphi=\frac{4}{5})\in[-4,6]$

法二：注意：$<\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CB}>=|\frac{\pi}{2}-<\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CA}>|$，且$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})$

$=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=1-3\cos<\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CA}>-4\cos<\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CB}>+0$

$=1-3\cos<\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CA}>-4\sin<\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CA}>$

$=1-5\sin[<\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}>+\varphi]$

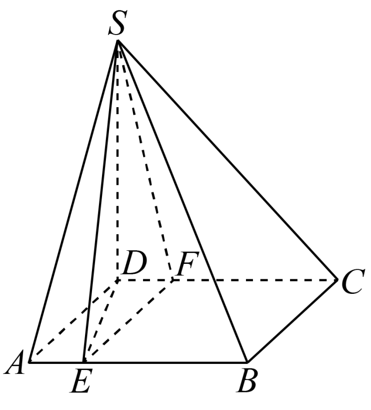
其中，$\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan\varphi=\frac{3}{4}$.

$\therefore-4\leqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant6$

10.【答案】A

【解析】【分析】根据给定条件作出 SE 与 AD、与底面 $ABCD$ 所成的角，确定二面角 $S-AE-D$ 的平面角，再推理计算作答.

【详解】四棱锥 $S-ABCD$ 中，E 是线段 AB 上的点（不含端点），过 E 作 $EF//AD$ 交 CD 于 F，连接 DE，SF，如图，



则 $\angle SEF$ 是 SE 与 AD 所成的角，即 $\alpha=\angle SEF$，因 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，则 $\angle SED$ 是 SE 与底面 $ABCD$ 所成的角，即 $\beta=\angle SED$，

而 $AB\subset$ 底面 $ABCD$，则 $SD\perp AB$，又 $ABCD$ 是长方形，即 $AD\perp AB$，而 $SD\cap AD=D$，$SD,AD\subset$ 平面 SAD，

则 $AB\perp$ 平面 SAD，又 $SA\subset$ 平面 SAD，即有 $SA\perp AB$，于是得 $\angle SAD$ 是二面角 $S-AE-D$ 的平面角，

$\gamma=\angle SAD$，

$Rt\triangle SAD$ 中，$\tan\gamma=\tan\angle SAD=\dfrac{SD}{AD}$，$Rt\triangle SED$ 中，$\tan\beta=\tan\angle SED=\dfrac{SD}{ED}$，

由 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，$EF\subset$ 底面 $ABCD$ 可得 $SD\perp EF$，而 $AD\perp CD$，则有 $EF\perp CD$，

因 $SD\cap CD=D$，$SD,CD\subset$ 平面 SCD，则 $EF\perp$ 平面 SCD，又 $SF\subset$ 平面 SCD，

有 $EF\perp SF$，$\tan\alpha=\tan\angle SEF=\dfrac{SF}{EF}=\dfrac{SF}{AD}$，

因 $AD<ED,SD<SF$，即有 $\dfrac{SD}{ED}<\dfrac{SD}{AD}<\dfrac{SF}{AD}$，因此，$\tan\beta<\tan\gamma<\tan\alpha$，而正切函数在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上递增，

所以 $\beta<\gamma<\alpha$.

故选：A

11.【答案】2

【解析】【分析】先求 $|\vec{a}-2\vec{b}|^2$，即可得解.

【详解】$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4-4\times2\times1\times\dfrac{1}{2}+4=4$，

所以 $|\vec{a}-2\vec{b}|=2$.

故答案为：2.

12.【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】【分析】

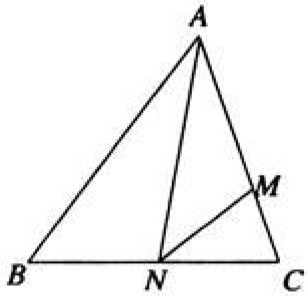
本题考查了向量的基本运算及平面向量的基本定理.关键是由 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$ 知 M 为 AC 上靠近 C 的三等分点，

由 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$ 知 N 为 BC 的中点，由 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，即可求出 $x+y$.

【解答】

解：由 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$ 知 M 为 AC 上靠近 C 的三等分点，由 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$ 知 N 为 BC 的中点，作出草图如下：



则有 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

又因为 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

所以 $x=\frac{1}{2}$， $y=-\frac{1}{6}$.

所以 $x+y=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

故答案为 $\frac{1}{3}$.

13.【答案】 -3(答案不唯一)

【解析】【分析】

本题主要考查了诱导公式，属于基础题.

由已知结合诱导公式进行化简即可求解.

【解答】

解：因为 $\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{6})=\sin\alpha$，

令 $k\cdot\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，则 $k=-3$.

故答案为：-3(答案不唯一).

14.【答案】 $30cm^3$

【解析】【分析】作辅助线，将五面体分割为三棱柱与四棱锥，再利用锥体与柱体的体积关系计算该几何体的体积.

【详解】由五面体 $ABCDEF$ 可知，四边形 $DCFE$ 与四边形 $ABFE$ 都为平面四边形.

如图所示，分别取 AB，DC 的中点 G，H，连接 EG，EH，GH，