解读探究预测

加强教考衔接，实现平稳过渡

--2024年1月“九省联考”数学试题带来的备考启示

一、命制背景和试题定位

2024年1月19日至1月21日，江西、安徽、黑龙江、甘肃、吉林、贵州、广西壮族自治区等第四批高考综合改革省份将要首考落地，为实现平稳过渡，相关省份组织进行了一场盛大联考——高考改革适应性演练测试，称之七省联考，后加入河南、新疆（或者称之为“九省联考”）参考考试人数为万众瞩目的410万人。

2024年适应性测试数学试卷由教育部教育考试院命制，试题遵循中国高考评价体系规定的考查内容和要求，充分发挥高考的核心功能，深化必备知识和关键能力的考查。试卷合理控制难度，与以往全国卷相比，减少试题数量，适度降低计算量，加强思维考查力度，试题设计追求创新，打破固化形式，有利于充分发挥服务人才选拔的功能。**本次考试的突出变化如下：**

1.数学试题不分文理。新高考改革第四批七省区将于2024年进入文理不分科的数学新高考模式。

2.题型结构发生变化。最明显的一个变化是题目数量的减少，全卷由过去的22个题减少到19个题。其中单项选择题数量不变，还是8个小题，多项选择题、填空题和解答题各减少1个小题，多项选择题和填空题分别由4个小题减少到3个小题，解答题由6个小题减少到5个小题，考生的作答时间随之变得更加充分。

3.考题的顺序安排也打破常规，有所变化。2024年测试卷的试卷结构特点是灵活、科学地确定试题的内容、顺序和难度。

4.题目分值发生巨大变化。最后两个压轴题保持较高的难度、能力要求和思维要求，以保持对高分段考生良好的区分，并且分值由过去的12分增加到17分，占分比例和重要性显著增加。由于整体难度的调整，考查思路的变化，需要考生灵活运用数学工具去分析、解决问题，综合考查考生的逻辑推理能力，对考生运用所学知识找到合理的解题策略提出了较高要求，突出了选拔功能。

二、传达信号意图解读

1. 调整试卷结构的主要目的是给学生更多的思考时间，从而加强对思维能力的考查。总题数从 22 个变成了 19 个，减少了 13.6%。除单选题的个数和分数（8 个，40 分）不变外，其他题型在个数和分数上均有所调整，将原来的 4 个多选题（20 分）、4 个填空题（20 分）、6 个解答题（70 分）分别减少为 3 个多选题（18 分）、3 个填空题（15 分）、5 个解答题（77 分），其中只有解答题增加了分数。由于调整试卷结构以后整卷题量减少，更有利于考生发挥创新能力——特别是在解答题中加强对思维的考查，也有利于提升压轴题的思维量与难度，注重考查思维过程和思维品质，服务拔尖创新人才选拔。

2024年新高考改革方向引领				
单选	1-8	每题5分	40分	73分
多选	9-11	每题6分	18分	
填空	12-14	每题5分	15分	
大题	15	立体几何	13分	77分
	16	圆锥曲线	15分	
	17	概率	15分	
	18	导数	17分	
	19	新题型（数列数论+竞赛方向）	17分	

2. 与以往试题相比，各个题目的考查内容、排列顺序进行了大幅度的调整。以往压轴的函数试题在测试卷安排在解答题的第 1 题，难度大幅度降低；概率与统计试题也降低了难度，安排在解答题的第 2 题；在压轴题安排了新情境试题。这些变化对于打破学生机械应试的套路模式，对促使学生全面掌握主干知识、提升基本能力具有积极的导向作用。

3. 引导考生“多想少算”，有利于考查理性思维和核心素养的水平。符合国家对高考改革的要求。　数学高考一直强调“多想一点，少算一点”的理念，从重考查知识回忆向重考查思维过程转变。在测试卷中，这一理念在解析几何的考核中体现得极其充分。这样的命题方式提醒考生“多想少算”，考查了思维能力，有效地避免了以前在解析几何的考核中计算量“居高不下”的现象，并且在考查考生数学运算素养的同时也考查了逻辑推理素养，也比较自然地体现了各核心素养的交融性。

4. 引导考生从小处着手，掌握基本概念和常规计算；从大处着眼，建构高中数学的知识体系。2024 年测试卷各个主题的题目数量和分值比例大致与课程标准规定的课时一致（函数、几何与代数、概率与统计分别约占 40%、40%、20%），符合课程标准的要求：在数学高考的命题中，要关注试卷的整体性和内容的分布。测试卷题目的设置层次递进有序，难度结构合理，大部分为常规题目。中低难度的题目平和清新，重点突出；高难度的题目不偏不怪，中规中矩，体现了良好的区分性。第 1、2、3、4、10、12、15 题（共 44 分）属于简单

题，主要考查基本概念和基本运算。特别是，第 1 题考查样本数据的中位数，第 10 题考查复数的共轭运算，既是基本内容，又略显新颖。

5. 客观选择题考查内容比较

卷别 题号内容	24 年 九省联考	23 年 四省联考	23 年 全国 I 卷	23 年 全国 II 卷	22 年新高考全 国 I 卷	22 年新高考全 国 II 卷
1	中位数	复数运算	集合交集	复数运算	集合交集	集合交集
2	椭圆离心率	集合运算	复数运算（共轭、乘除）	集合子集	复数运算（共轭、乘除）	复数（乘法）
3	等差数列	概率	平面向量（垂直）	分层抽样	平面向量	等差数列（文化）
4	线线、线面关系	平面向量坐标运算	函数单调性	函数性质偶函数	台体体积（南水北调）	平面向量
5	排列组合	椭圆性质	椭圆离心率	直线与椭圆	概率	排列
6	平面向量线性运算与平行线间的距离	锥体体积与不等式	直线与圆	函数与导数单调性	三角函数（周期、对称）	三角函数化简
7	三角函数诱导公式	导数定义	等差数列 充要条件	三角函数诱导公式	指数、对数比较大小	立体几何（正三棱台外接球）
8	双曲线、向量、离心率	指数、对数运算与不等式	三角函数	等比数列前 n 项和	立体几何（正四棱锥、球体积）	函数性质
9	三角函数性质	函数奇偶性、单调性	样本数据	圆锥与二面角	立体几何（正方体线线、线面角）	函数图象性质
10	复数相关运算	立体几何线线、线面、面面关系	对数运算	直线与抛物线	函数零点、极值点、对称	抛物线
11	抽象函数性质	单位圆与正弦线、余弦线追及问题	抽象函数性质	函数与导数极值	抛物线	立体几何（体积）
12	无	线面垂直判定定理、性质定理	立体几何	概率实际应用	函数与导数	不等式

6. 客观填空题考查内容比较

卷别 题号内容	24年 九省联考	23年 四省联考	23年 全国Ⅰ卷	23年 全国Ⅱ卷	22年新高考 全国Ⅰ卷	22年新高考 全国Ⅱ卷
13	12集合交集	正态分布	排列组合	平面向量运算	二项式定理展开式	正态分布
14	13、锥体表面积、体积、球体表面积、体积	圆心与抛物线最短距离	台体体积	台体体积	圆的公切线	解析几何：曲线的切线方程
15	14、不等关系	数列递推公式	函数零点	直线与圆	函数与导数	解析几何：直线与圆关系
16	无	逻辑推理	双曲线离心率向量	三角函数图像性质	椭圆	解析几何：直线与椭圆

7.主观题考查内容比较

卷别 题号内容	24年 九省联考	23年 四省联考	23年 全国Ⅰ卷	23年 全国Ⅱ卷	22年新高考 全国Ⅰ卷	22年新高考 全国Ⅱ卷
17	15函数与导数、切线、单调性	圆柱内接锥体，几何体体积、二面角	解三角形	解三角形	数列与不等式	等差、对比数列
18	16概率、数学期望	Y=Asin（ωx＋Φ）图像性质	立体几何：线线平行与二面角	等差数列前n项和、不等式	三角函数	解三角形
19	17、立体几何线面垂直、二面角	数列通项公式、前n项和公式、错位相减法	函数与导数：单调性、不等式	概率应用	立体几何 点到直线距离、二面角	统计：数据分析
20	**18、抛物线**	**数学期望、超几何发布、估计值**	等差数列、通项公式	立体几何：线线垂直、二面角	概率统计	立体几何：线面平行、二面角
21	19、离散对数	双曲线方程、有关证明	概率、两点分布	双曲线	双曲线	双曲线方程（开放题、答案不唯一）
22	无	函数与导数、单调性、零点、创新函数	抛物线、不等式	函数与导数、不等式	函数与导数、等差数列	函数与导数（单调性、不等式证明）

三、七省联考（“九省联考”）数学试题考查问题的特点

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．样本数据 16，24，14，10，20，30，12，14，40 的中位数为（　　）

A．14　　　　B．16　　　　C．18　　　　D．20

【考查目标】样本数据中位数

【解题思路】排序再找中位数

【命题考向趋势】样本数据涉及到的概念【备考复习建议】样本数据相关概念

1.B 【解析】将这些数据从小到大排列可得：10，12，14，14，16，20，24，30，40，则其中位数为 16.

2．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．2

【考查目标】椭圆性质、离心率

【解题思路】 a、b、c 关系及离心率公式

【命题考向趋势】椭圆的基本性质

【备考复习建议】灵活掌握椭圆基本性质

2.A【解析】由题意得 $e=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

【知识链接】椭圆离心率专题

求离心率常用公式公式 1：$\mathrm{e}=\frac{c}{a}$

公式 2:$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

公式 3:已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,两焦点分别为 F_1,F_2,设焦点三角形 PF_1F_2

$\angle PF_1F_2=\alpha,\angle PF_2F_1=\beta$,则椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$

证明:$\angle PF_1F_2=\alpha,\angle PF_2F_1=\beta$,

由正弦定理得:$\dfrac{|F_1F_2|}{\sin(180^o-\alpha-\beta)}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\dfrac{|PF_1|}{\sin\beta}$

由等比定理得:$\dfrac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\alpha+\sin\beta}$,即 $\dfrac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}$

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$

公式 4:以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 两焦点 F_1,F_2 及椭圆上任一点 P(除长轴两端点外)为顶点 $\Delta F_1PF_2,\angle PF_1F_2=\alpha,\angle PF_2F_1=\beta$,则 $e=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

证明:由正弦定理有 $\dfrac{|PF_1|}{\sin\beta}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\theta}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};\therefore\dfrac{c}{a}=e=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

公式 5:点 F 是椭圆的焦点,过 F 的弦 AB 与椭圆焦点所在轴的夹角为 $\theta,\theta\in 0,\dfrac{\pi}{2}$,$k$ 为直线 AB 的斜率,且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$,则 $e=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$ 当曲线焦点在 y 轴上时,e

$=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$

注:$\lambda=\dfrac{AF}{BF}$ 或者 $\lambda=\dfrac{BF}{AF}$ 而不是 $\dfrac{AF}{AB}$ 或 $\dfrac{BF}{AB}$

3．记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,a_3+a_7=6,a_{12}=17$,则 $S_{16}=$（　　）

A．120　　B．140　　C．160　　D．180

【考查目标】等差数列通项公式及前 n 项和公式

【解题思路】公式应用

【命题考向趋势】等差数列通项公式及前 n 项和公式综合运用

【备考复习建议】对等差数列通项公式及前 n 项和公式的理解

3. C【解析】因为 $a_3+a_7=2a_5=6$，所以 $a_5=3$，所以 $a_5+a_{12}=3+17=20$，

所以 $S_{16}=\dfrac{(a_1+a_{16})\times16}{2}=8(a_5+a_{12})=160$

【知识链接】

1.等差数列的前 n 项和公式

公式一 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

证明: (倒序相加法) $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$ ①, $S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$②, 由①+②得 $2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_1)$, 因为 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_n+a_1$, 所以 $2S_n=n(a_1+a_n)$, 由此得 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

公式二: $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

证明: 将 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 可得 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$.

2.前 n 项和与函数关系

由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$, 令 $A=\dfrac{d}{2},B=a_1-\dfrac{d}{2}$,则 ;

$S_n=An^2+Bn(A,B$ 为常数).

(1) 当 $d=0$ 即 $A=0$ 时, $S_n=Bn=na_1,S_n$ 是关于 n 的一个一次函数;它的图像是 在直线 $y=a_1x$ 上的一群孤立的点.

(2) 当 $d\neq0$ 即 $A\neq0$ 时, S_n 是关于 n 的一个常数项为零的二次函数;它的图像是在抛物线 $y=Ax^2+Bx$ 上的一群孤立的点.

①当 $d>0$ 时, S_n 有最小值;

②当 $d<0$ 时, S_n 有最大值.

4．设 α,β 是两个平面，m,l 是两条直线，则下列命题为真命题的是（　　）

A．若 $\alpha\perp\beta,m//\alpha,l//\beta$，则 $m\perp l$　　B．若 $m\subset\alpha,l\subset\beta,m//l$，则 $\alpha//\beta$

C．若 $\alpha\cap\beta=m,l//\alpha,l//\beta$，则 $m//l$　　D．若 $m\perp\alpha,l\perp\beta,m//l$，则 $\alpha\perp\beta$

【考查目标】空间线面的位置关系

【解题思路】空间线面位置关系简图或利用周边环境想象思考【命题考向趋势】空间线面的位置关系

【备考复习建议】理解空间线面位置关系

4. C【解析】对于 A，m,l 可能平行，相交或异面，故 A 错误，

对于 B，α,β 可能相交或平行，故 B 错误，

对于 D，α,β 可能相交或平行，故 D 错误，

由线面平行性质得 C 正确，

5．甲、乙、丙等 5 人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有 2 人，则不同排法共有（　　）

A．20 种　　B．16 种　　C．12 种　　D．8 种

【考查目标】排列组合

【解题思路】先排乙丙，再排甲

【命题考向趋势】排列组合应用【备考复习建议】排列组合灵活应用

5. B【解析】因为乙和丙之间恰有 2 人，所以乙丙及中间 2 人占据首四位或尾四位，

①当乙丙及中间 2 人占据首四位，此时还剩末位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两个位置两人全排列有 A_2^2 种排法，

所以有 $A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$ 种方法；

②当乙丙及中间 2 人占据尾四位，此时还剩首位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两个位置两人全排列有 A_2^2 种排法，

所以有 $A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$ 种方法；

由分类加法计数原理可知，一共有 $8+8=16$ 种排法，

【知识链接】

一、分类与计数原理

1、分类加法计数原理的概念

完成一件事可以有n类方案，各类方案相互独立，在第一类方案中m_1种不同方法，在第二类方案中m_2种不同方法…在第n类方案中m_n种不同方法，那么完成这个件事共有N=m_1+m_2+…+m_n种方法.

2、分步乘法计数原理的概念

完成一件事需要经过n个步骤，缺一不可，做第一步有m_1种方法，做第二步有m_2种方法…做第n步有m_n种方法，那么，完成这个件事共有N=m_1×$m_2 \times \cdots \times m_n$种方法.

3、两个计数原理的联系与区别

原理	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
联系	两个计数原理都是对完成一件事的方法种数而言	
区别一	每类方法都能独立完成这件事，它是独立的、一次的，且每次得到的是最后结果，只需一种方法就可完成这件事.	每一步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成这件事，只有各个步骤都完成了才能完成这件事.
区别二	各类方法之间是互斥的、并列的、独立的.	各步之间是相互依存，并且既不能重复也不能遗漏.

二、排列与排列数

1.排列与排列数：一般地，从n个不同元素中取出$m(m \le n)$个元素，按一定顺序排成一列，叫作从n个不同元素中取出m个元素的一个排列，所有不同排列的个数，叫作从n个不同元素中取出m个元素的排列数，用符号A_n^m表示.

2.排列数公式：A_n^m=$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)$=$\frac{n!}{(n-m)!}$（$n$、$m \in N^*$且$m \le n$）.$n$个不同元素全部取出的一个排列，叫作$n$个的一个全排列.这个公式中$m=n$，即有

A_n^n= $n!$=$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\times 1$.规定：0!=1.

三、组合与组合数

1.组合与组合数：一般地，从n个不同元素中取出$m(m\le n)$个元素合成一组，叫作从n个不同元素中取出m个元素的一个组合，所有不同组合的个数，叫作从n个不同元素中取出m个元素的组合数，用符号C_n^m表示.

2.组合数公式：$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$（$n$、$m\epsilon N^*$且$m\le n$）.$n$个不同元素全部取出的一个排列，叫作$n$个的一个全排列.这个公式中$m=n$，规定：$C_n^0$=1.

3.组合数性质：

（1）$C_n^m=C_n^{n-m}$（n、$m\epsilon N^*$且$m\le n$）；

（2）$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$（$n$、$m\epsilon N^*$且$m\le n$）；

【变式】在某种信息传输过程中，用 4 个数字的一个排列(数字允许重复)表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所有数字只有 0 和 1 则与信息 0110 至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为（　）

A.10　　B.11　　C.12　　D.15

【答案】 B

【解析】 当与信息 0110 对应位置上的数字各不相同时，这样的信息个数只有 1 个；当与信息 0110 对应位置上的数字只有 1 个相同时，这样的信息个数只有 4 个；当与信息 0110 对应位置上的数字只有 2 个相同时，只需从四个位置中选出两个位置使相应的数字相同，有C_4^2种方法，剩下的两个位置上的数字对应不相同，只有 1 种可能，故此时共有C_4^2个不同的信息.根据分类原理知共有：1+4+C_4^2=11 个不同信息.故选 B.

6．已知Q为直线$l:x+2y+1=0$上的动点，点P满足$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记$P$的轨迹为$E$，则（　　）

A．E是一个半径为$\sqrt{5}$的圆　　B．E是一条与l相交的直线

C．E上的点到l的距离均为$\sqrt{5}$　　D．E是两条平行直线

【考查目标】平面向量的坐标运算、平行线间的距离公式

【解题思路】先确定动点 Q 的坐标，再设点 P,利用向量坐标运算建立等量关系，求出 P 的轨迹 E 再用平行线间的距离公式求解即可

【命题考向趋势】平面向量的坐标运算、平行线间的距离公式【备考复习建议】平面向

量的坐标运算、点到直线距离公式

6. C【解析】设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，则 $Q(x-1,y+3)$，

由 Q 在直线 $l:x+2y+1=0$ 上，故 $x-1+2(y+3)+1=0$，

化简得 $x+2y+6=0$，即 P 的轨迹为 E 为直线且与直线 l 平行，

E 上的点到 l 的距离 $d=\dfrac{|6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，故 A、B、D 错误，C 正确.

【点评】将轨迹方程、平面向量的坐标运算、直线与直线的位置关系、两条平行直线间的距离公式等知识综合起来，考查直线与直线的位置关系、两条平行直线间的距离公式等基础知识、基本方法的理解和掌握。该题立足基础知识，计算量小，强调知识之间的综合和应用，很好检测了考生的知识体系和认知结构，有良好导向性，发挥了服务选才功能。

7．已知 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right),\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\dfrac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．1　　D．$\dfrac{3}{2}$

【考查目标】三角函数诱导公式

【解题思路】三角函数诱导公式化简，注意定义域【命题考向趋势】三角函数诱导公式化简

【备考复习建议】三角函数诱导公式灵活运用

7. A【解析】由题 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right),\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

得 $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{-4(\tan\theta+1)}{1-\tan\theta}\Rightarrow-4(\tan\theta+1)^2=2\tan\theta$，

则 $(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0\Rightarrow\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，

因为 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right),\tan\theta\in(-1,0)$，所以 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，

$$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{2+2\tan\theta}=\frac{\frac{1}{4}+1-1}{2+(-1)}=\frac{1}{4}.$$

【点评】以简单三角恒等变换公式和同角三角函数关系为载体，该题题干简洁，注重基础，难度适中，考查考生对基础知识的理解、掌握及灵活应用。

【知识链接】

1.两角和与差的余弦

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 变形 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 变形 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$

2.两角和与差的正弦

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 变形 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 变形 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$

3.两角和与差的正切

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$； $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$变形：

$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$； $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta)$；

$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}$.

【变式】已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\cos(\pi-\alpha)$,则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（ ）

A. -4　　B. 4　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

[答案]C

【解析】因为 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\cos(\pi-\alpha)$,所以 $-\sin\alpha=-2\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=2$,所以

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\dfrac{1}{3}$,故选 C .

8．设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过坐标原点的直线与 C 交于 A,B 两点，$|F_1B|=2|F_1A|,\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=4a^2$，则 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{7}$

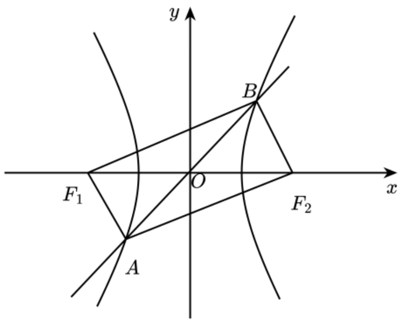
【考查目标】双曲线离心率与向量的结合

【解题思路】双曲线与向量的结合

【命题考向趋势】双曲线与平面向量有机结合

【备考复习建议】双曲线与平面向量有机结合

8.D【解析】由双曲线的对称性可知$|F_1A|=|F_2B|$，



$|F_1B|=|F_2A|$，有四边形AF_1BF_2为平行四边形，

令$|F_1A|=|F_2B|=m$，则$|F_1B|=|F_2A|=2m$，

由双曲线定义可知$|F_2A|-|F_1A|=2a$，故有$2m-m=2a$，

即$m=2a$，即$|F_1A|=|F_2B|=m=2a$，$|F_1B|=|F_2A|=4a$，

$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=|\overrightarrow{F_2A}|\cdot|\overrightarrow{F_2B}|\cos\angle AF_2B=2a\times4a\cos\angle AF_2B=4a^2$，则$\cos\angle AF_2B=\frac{1}{2}$，即

$\angle AF_2B=\frac{\pi}{3}$，故$\angle F_2BF_1=\frac{2\pi}{3}$，则有

$$\cos\angle F_2BF_1=\frac{|F_1B|^2+|F_2B|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1B|\cdot|F_2B|}=\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\times4a\times2a}=-\frac{1}{2},$$

即$\frac{20a^2-4c^2}{16a^2}=-\frac{1}{2}$，即$\frac{20}{16}-\frac{4e^2}{16}=-\frac{1}{2}$，则$e^2=7$，由$e>1$，故$e=\sqrt{7}$.

【点评】以双曲线为载体，考查双曲线、向量的基本概念和性质。该题深入考查逻辑思维能力、运算求解能力和数形结合思想，强调对知识的综合理解和灵活应用的能力。试题符合高中数学课程标准的基本要求，很好引导中学教学。需要从双曲线的定义出发进行分析，对直观想象与数学运算能力有一定要求。

【知识链接】双曲线的离心率专题

求离心率常用公式公式 1：e=$\frac{c}{a}$

公式 2:$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

公式 3:已知双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$两焦点分别为$F_1,F_2$,设焦点三角形

$PF_1F_2, \angle PF_1F_2=\alpha, \angle PF_2F_1=\beta$,则 e=$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{|\sin\alpha-\sin\beta|}$

证明:$\angle PF_1F_2=\alpha, \angle PF_2F_1=\beta$,

由正弦定理得:

由等比定理得：即 $\dfrac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{2a}{\sin\alpha-\sin\beta}, \therefore$ e$=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{|\sin\alpha-\sin\beta|}$

公式 4:以双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点 F_1、F_2 及双曲线上任意一点 $P($除实轴上两个端点外)为顶点的 $\Delta F_1PF_2, \angle PF_1F_2=\alpha, \angle PF_2F_1=\beta$,则离心率 e=$\dfrac{\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}(\alpha\neq\beta)$

证明：由正弦定理，有 $\dfrac{|PF_1|}{\sin\beta}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\theta}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\because \sin\beta\neq\sin\alpha, \therefore \dfrac{|PF_1|-|PF_2|}{\sin\beta-\sin\alpha}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$.

即 $\dfrac{a}{\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{c}{\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2}}$ 又$o<\alpha+\beta<\pi, \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\neq 0, \therefore$ e

$=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$

公式 5:点 F 是双曲线焦点，过 F 弦AB与双曲线焦点所在轴夹角为 $\theta, \theta\in 0,\dfrac{\pi}{2}, k$ 为直线 AB 斜率，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$,则 e$=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$

当曲线焦点在 y 轴上时，e$=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$

注:$\lambda=\dfrac{AF}{BF}$ 或者 $\lambda=\dfrac{BF}{AF}$ 而不是 $\dfrac{AF}{AB}$ 或 $\dfrac{BF}{AB}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符

合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，则（　　）

A．函数 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数　　　　B．曲线 $y=f\left(x\right)$ 的对称轴为 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

C．$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增　　　　D．$f\left(x\right)$ 的最小值为-2

【考查目标】三角函数化简、三角函数图像性质

【解题思路】三角函数化简再结合图象分析【命题考向趋势】三角函数的图象性质

【备考复习建议】三角函数图象性质灵活运用

9. AC【解析】 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

$$=\sin 2x\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\cos 2x+\cos 2x\cos\frac{3\pi}{4}-\sin 2x\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=-\sqrt{2}\sin 2x,$$

即 $f\left(x\right)=-\sqrt{2}\sin 2x$，

对于 A，$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，易知为偶函数，所以 A 正确；

对于 B，$f\left(x\right)=-\sqrt{2}\sin 2x$ 对称轴为 $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathrm{Z}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$，故 B 错误；

对于 C，$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),2x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，$y=\sin 2x$ 单调递减，则

$f\left(x\right)=-\sqrt{2}\sin 2x$ 单调递增，故 C 正确；

对于 D，$f\left(x\right)=-\sqrt{2}\sin 2x$，则 $\sin 2x\in\left[-1,1\right]$，所以 $f\left(x\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，故 D 错误；

故选：AC

10．已知复数 z,w 均不为 0，则（　　）

A．$z^2=|z|^2$　　　　B．$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$　　　　C．$\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$　　　　D．$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

10. BCD

【考查目标】复数的运算、共轭复数、复数的模

【解题思路】灵活运用复数的运算、共轭复数、复数的模解决问题【命题考向趋势】较复杂的复数的有关运算

【备考复习建议】灵活掌握复数的四则运算、复数的模、共轭复数

【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathrm{R})$、 $w=c+d\mathrm{i}\ (c,d\in\mathrm{R})$；

对 A：设 $z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathrm{R})$，则 $z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2+2ab\mathrm{i}-b^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，

$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$，故 A 错误；

对 B：$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2}{\overline{z}\cdot z}$，又 $\overline{z}\cdot z=|z|^2$，即有 $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2}{|z|^2}$，故 B 正确；

对 C：$z-w=a+b\mathrm{i}-c-d\mathrm{i}=a-c+(b-d)\mathrm{i}$，则 $\overline{z-w}=a-c-(b-d)\mathrm{i}$，

$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，$\overline{w}=c-d\mathrm{i}$，则 $\overline{z}-\overline{w}=a-b\mathrm{i}-c+d\mathrm{i}=a-c-(b-d)\mathrm{i}$，

即有 $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$，故 C 正确；

对 D：$\left|\dfrac{z}{w}\right|=\left|\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\right|=\left|\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}\right|=\left|\dfrac{ac+bd-(ad-bc)\mathrm{i}}{c^2+d^2}\right|$

$$=\sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{ad-bc}{c^2+d^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}{(c^2+d^2)^2}}=\frac{\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}}{c^2+d^2},$$

$$\frac{|z|}{|w|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2}$$

$=\dfrac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2}}{c^2+d^2}$，　故 $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$，故 D 正确.

【点评】以复数为载体，考查复数、共轭复数和复数的模的概念及复数的代数运算，强调对高中数学基本概念、基本运算的掌握，体现了课程标准对复数学习的要求，较好引导复数教学，考查学生逻辑思维能力和运算求解能力。

【知识链接】

1.复数的定义

形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数叫复数，其中 a 叫复数的实部，b 叫复数的虚部，i 为虚数单位且规定 $i^2=-1$.

要点诠释：（1）因为实数 a 可写成 $a+0\times i$，所以实数一定是复数；

（2）复数构成的集合叫复数集，记为 C

2.虚数单位 i 的周期性

计算得 $i^0=1,i^1=i,i^2=-1,i^3=-i$，继续计算可知 i 具有周期性，且最小正周期为 4，故有如下性质：

（1）$i^{4n}=1,i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

(2) $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0\left(n\in\square^*\right)$.

3.复数核心运算

1. 运算律：$(1)z^m\cdot z^n=z^{m+n};(2)(z^m)^n=z^{mn};(3)(z_1\cdot z_2)^m=z_1^m\cdot z_2^m(m,n\in N)$.

2. 模的性质：$(1)|z_1z_2|=|z_1||z_2|;(2)\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};(3)|z^n|=|z|^n;(4)z\cdot\overline{z}=|\overline{z}|^2$.

3. 重要结论：

(1) $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_1|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right);\overline{z}\cdot z=|z|^2=|\overline{z}|^2$

(2) $(1\pm i)^2=\pm2i;\frac{1-i}{1+i}=-i;\frac{1+i}{1-i}=i$；

(3) $\omega^3=1\Leftrightarrow(\omega-1)\left(\omega^2+\omega+1\right)=0\Leftrightarrow\omega=1$ 或 $\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

11．已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，若 $f\left(x+y\right)+f\left(x\right)f\left(y\right)=4xy$，则

(　　)

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是偶函数　　D. 函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数

【考查目标】抽象函数性质

【解题思路】特殊值带入寻找解题路径【命题考向趋势】抽象函数变化

【备考复习建议】理清抽象函数的特点属性

11. ABD 【解析】令 $x=\frac{1}{2}$、$y=0$，则有 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)[1+f(0)]=0$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，故$1+f(0)=0$，即 $f(0)=-1$，

令 $x=\frac{1}{2}$、$y=-\frac{1}{2}$，则有 $f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即 $f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，由 $f(0)=-1$，可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，故 A 正确；

令 $y=-\frac{1}{2}$，则有 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，故函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是奇函数，

有 $f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$，即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$，

即函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数，

令 $x=1$，有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times 1=-2$，

故 B 正确、C 错误、D 正确.

【点评】解答过程应该是由题目条件得到 $f(0)=-1$，再进一步得到 $f(-1/2)=0$，由此导出 $f(x-1/2)$的表达式，最后得到 $f(x)$的表达式。有关抽象函数的试题很多都是在奇偶性、周期性的基础上设计，类似题目多了难以避开程式化的误区。第 11 题设计新颖，叙述简洁，选项设置符合题目内在逻辑，且形式优美对称，是试题规范性的极好示例。

【知识链接】

1.周期概念理解

1.定义:设 $f(x)$ 的定义域为 D,若对 $\forall x\in D$,存在一个非零常数 T,有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是一个周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的一个周期.

2.若 $f(x)$ 是一个周期函数,则 $f(x+T)=f(x)$,那么 $f(x+2T)=f(x+T)=f(x)$,即 $2T$ 也是 $f(x)$ 的一个周期,进而可得 $kT(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 也是 $f(x)$ 的一个周期.

3.最小正周期:若 T 为 $f(x)$ 的一个周期，$kT(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 也是 $f(x)$ 的一个周期,则在某些周期函数中,往往存在周期中最小的正数,称为最小正周期.然而并非所有的周期函数都有最小正周期,比如常值函数 $f(x)=C$ 就没有最小正周期.

2.常见周期性结论

	序号	函数式满足关系($x\in\boldsymbol{R}$)	周期
函数周期性的一些结论	**(1)**	$f(x+T)=f(x)$	T
	(2)	$f(x+T)=-f(x)$	$2T$
	(3)	$f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)}$; $f(x+T)=-\dfrac{1}{f(x)}$	$2T$
	(4)	$f(x+T)=f(x-T)$	$2T$
	(5)	$f(x+a)=f(x+b)$ 或 $f(x-a)=f(x-b)$	$\lvert a-b\rvert$
	(6)	$f(x+T)=-f(x-T)$	$4T$
	(7)	$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$	$2a$
	(8)	$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(b+x)=f(b-x) \end{cases}$	$2\lvert a-b\rvert$