第4章　不定积分

BACK

4.1 不定积分的概念及性质

4.1.1 不定积分的概念

1. 原函数

例1 已知某曲线经过坐标原点，且曲线上每一点处的切线斜率等于该点横坐标的二倍，试求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为$y=f(x)$，则由函数导数的几何意义有$f'(x)=2x$. 根据导数公式知$(x^2+C)'=2x$，其中C为任意常数，故

$$f(x)=x^2+C$$

又因为曲线经过坐标原点，所以有$f(0)=0$，将其代入上式得$C=0$，因此所求曲线的方程为

$$y=x^2$$

此例提出一类问题：已知某一个函数$f(x)$，能否确定一个函数$F(x)$，使得$F(x)$的导数等于$f(x)$，即$F'(x)=f(x)$. 对于这类问题，我们引入如下概念.

定义4.1 设函数$f(x)$在区间$(a，b)$上有定义，若存在函数$F(x)$，使得对于任意的$x\in(a，b)$， 都有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad dF(x)=f(x)dx$$

则称$F(x)$为$f(x)$在区间$(a，b)$上的一个原函数.

例如，因为$(\sin x)'=\cos x$，$(\sin x+2)'=\cos x$，$(\sin x+C)'=\cos x$，$x\in(-\infty，+\infty)$，所以$\sin x$、$\sin x+2$、$\sin x+C$都是$\cos x$在$(-\infty，+\infty)$内的原函数. 这说明$\cos x$的原函数并不唯一，且这些原函数之间只相差一个常数.

一般而言，原函数有如下性质.

性质1 若$F(x)$是$f(x)$在区间I上的原函数，则对于任意常数C，函数$F(x)+C$是$f(x)$的原函数.

证明 由已知得$F'(x)=f(x)$，则

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)$$

因此$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数.

性质2 若$F(x)$、$G(x)$为$f(x)$在区间I上的两个原函数，则$G(x)=F(x)+C$.

证明 因为$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$，所以

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=0$$

根据微分中值定理推论，可得

$$G(x)-F(x)=C$$

故

$$G(x)=F(x)+C$$

2. 不定积分的概念

定义4.2 若$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，则称$f(x)$的全体原函数$F(x)+C$为$f(x)$在区间I上的不定积分，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

其中: "$\int$"称为积分号; $f(x)$称为被积函数; $f(x)\mathrm{d}x$称为被积表达式; x称为积分变量; 任意常数C称为积分常量.

由不定积分的定义可知，不定积分运算与导数(或微分)运算互为逆运算，故有如下性质：

(1)$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$或$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$；

(2)$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$或$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

例2 求不定积分$\int [dx/(1+x^2)]$.

解 因为 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ，所以$\arctan x$是$1/(1+x^2)$的一个原函数，故

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \arctan x + C$$

例3 求不定积分$\int x^3\,dx$.

解 因为$[(1/4)x^4]'=x^3$，所以$(1/4)x^4$是x^3的一个原函数，故

$$\int x^3\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}x^4 + C$$

3. 不定积分的几何意义

若函数$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，则函数$y=F(x)$的图像称为函数$f(x)$的一条积分曲线.于是，函数$f(x)$的不定积分在几何上表示由函数$f(x)$的一条积分曲线$F(x)$沿纵轴方向平移所得的积分曲线族，在横坐标相同点处其每一条积分曲线的切线是互相平行的，如图4-1所示，这就是不定积分的几何意义.

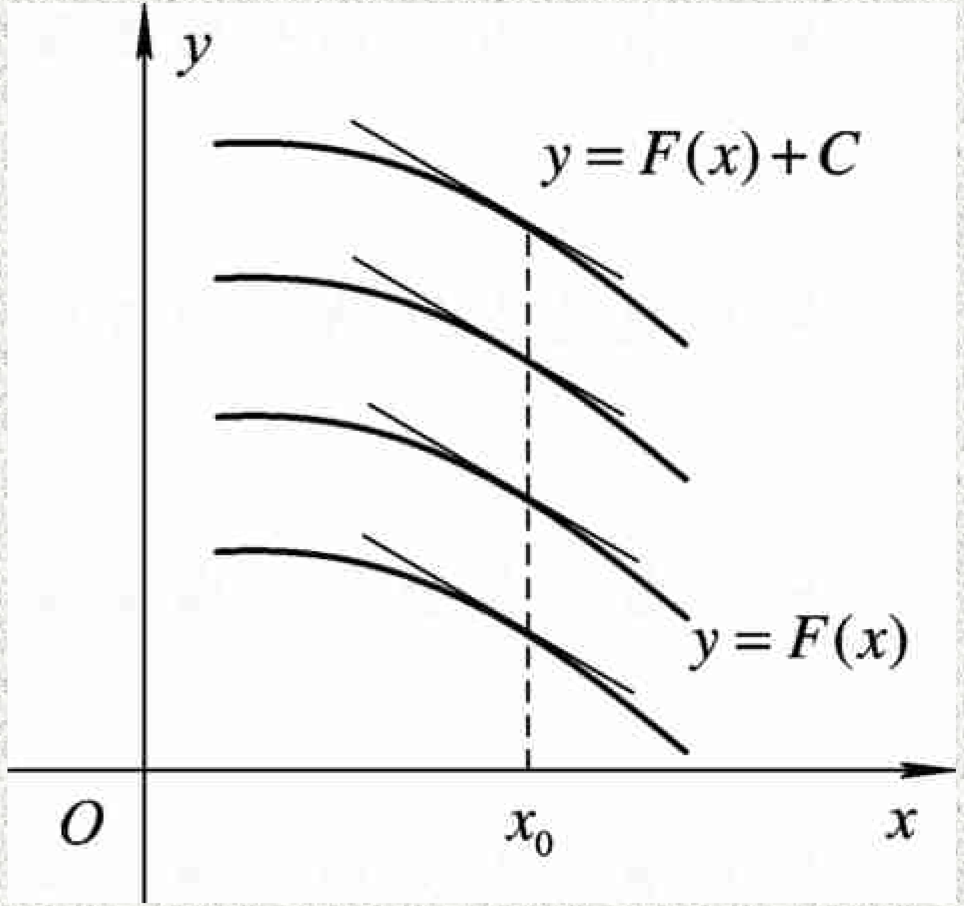

图 4-1

4.1.2 基本积分公式

由于不定积分是导数的逆运算，因此根据基本初等函数的导数公式，可得到相对应的积分公式.

例如：因为$x'=1$，所以$\int \mathrm{d}x=x+C$；因为 $\left(\frac{1}{\ln a}a^x\right)'=a^x$，所以 $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$ ($a>0$，$a\neq 1$).

类似地，我们可以得到其他不定积分的基本公式，为了方便大家掌握，我们把积分基本公式与导数公式进行对照，见表4-1.

表 4－1

积分基本公式	导数公式
$\int dx = x + C$	$x' = 1$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{1+a} + C,\ a \neq -1$	$(x^a)' = ax^{a-1}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$
$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	$(\tan x)' = \sec^2 x$
$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$

续表

积分基本公式	导 数 公 式
$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + C$	$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

表4-1所示公式是求不定积分的基础，必须熟记，不仅要熟记公式右边的结果，还要记清公式左边对应的形式.

例4 求不定积分$\int 5^x\,\mathrm{d}x$.

解 由基本积分公式 $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$得

$$\int 5^x\,\mathrm{d}x=\frac{5^x}{\ln 5}+C$$

4.1.3 不定积分的性质

根据不定积分的定义和求导法则，可以得到下列性质.

性质1 函数代数和的不定积分等于各自不定积分的代数和，即

$$\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

性质2 被积函数中的常量因子可以提到不定积分符号的前面，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \ (k\text{为常数})$$

例5 求不定积分 $\int (x^2 + \cos x)\mathrm{d}x$.

解 先利用积分性质变形，再积分:

$$\int (x^2 + \cos x)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x + \int \cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + C$$

有时候，我们需要对被积函数作恒等变形后，才能应用积分性质和积分公式求不定积分.

例6 求不定积分 $\int \frac{xe^x + x^3 + 3}{x} dx$.

解 先化简被积函数，再积分:

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x + x^3 + 3}{x} \mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x + x^2 + \frac{3}{x} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x + \int x^2 \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^x + \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + C$$

例7 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数拆分变形，再求积分.

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x = x - \arctan x + C$

(2) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

例8 计算下列不定积分：

(1) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$ ；

(2) $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ ，所以

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \cos x \mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x+\sin x)+C$$

(2) 因为 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$，所以

$$\int \tan^2 x \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

4.2 不定积分的换元积分法

4.2.1 第一类换元积分法(凑微分法)

例1 求不定积分 $\int \frac{1}{3x+2}\mathrm{d}x$.

解 由基本积分公式知 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$， $\int \frac{1}{3x+2}\mathrm{d}x$ 与该公式相近但不一致，所以不能直接套用该公式(因为

$\left[\ln|3x+2| + C\right]' = \frac{3}{3x+2} \neq \frac{1}{3x+2}$).

考虑把所求积分转化成上述公式的形式. 因为

$\mathrm{d}(3x+2)=3\mathrm{d}x$，所以有

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}d(3x+2)$$

$$\xlongequal{\text{令 } 3x+2=u} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u|+C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u=3x+2} \frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$$

验证结果，因为$\left[\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C\right]' = \frac{1}{3x+2}$，所以$(1/3)\ln|3x+2|+C$是$1/(3x+2)$的原函数.故该题的计算结果是正确的.

例1的解法特点是通过引入一个新变量u，先将原不定积分转化为新变量u的积分(与基本积分公式一致的形式)，然后用基本积分公式求解，最后进行变量回代而得到积分结果.这个方法可以推广，一般地，我们有下述定理.

定理4.1 如果$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则对于$x$的任一可微函数$u=\varphi(x)$，有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{凑微分}} \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$\xlongequal{\text{令 }\varphi(x)=u} \int f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{F}(u)+\mathrm{C}$$

$$\xlongequal{\text{回代 }u=\varphi(x)} \mathrm{F}[\varphi(x)]+\mathrm{C}$$

这种先“凑”微分，再作变量代换求不定积分的方法，称为第一类换元积分法，也称凑微分法.

例2 求不定积分$\int (ax+b)^{10}\,\mathrm{d}x$ $(a\neq 0)$.

解 $$\int (ax+b)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{10}\,\mathrm{d}(ax+b)$$

$$\xlongequal{\text{令 }u=ax+b} \frac{1}{a}\int u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{11a}u^{11}+\mathrm{C}$$

$$\xlongequal{\text{回代}} \frac{1}{11a}(ax+b)^{11}+\mathrm{C}$$

例3 求不定积分 $\int \frac{2x}{x^2+5}\mathrm{d}x$.

解 因为$\mathrm{d}(x^2+5)=2x\,\mathrm{d}x$，所以

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+5}\mathrm{d}(x^2+5)$$

$$\xlongequal{\text{令 } u = x^2+5} \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + C$$

$$\xlongequal{\text{回代}} \ln(x^2+5) + C$$

凑微分法熟练后，可以省略换元和回代过程，直接写出积分结果.如例3的解题过程可以简化写成

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+5}\mathrm{d}(x^2+5) = \ln(x^2+5)+C$$

例4 求不定积分$\int \cos x \sin x \, dx$.

解 方法 1：$\int \cos x \sin x \, dx = -\int \cos x \, d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

方法 2：$\int \cos x \sin x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

方法 3：$\int \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x \, d(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

例4说明凑微分时把积分表达式中的那一部分凑成$d\varphi(x)$,其实是灵活多变的，需要根据积分表达式具体分析，选择不同，积分结果表达形式可能不同.凑微分法运用的难点在于把积分表达式中的那一部分凑成$d\varphi(x)$，这需要解题经验的积累.

下面给出一些常见的凑微分形式：

(1) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$；

(2) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\,\mathrm{d}(ax^n+b)$；

(3) $\int f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x)$；

(4) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$；

(5) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；

(6) $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x)$；

(7) $\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}(\cos x)$；

(8) $\int f(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}(\tan x)$；

(9) $\int f(\cot x)\csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\,\mathrm{d}(\cot x)$；

(10) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\,\mathrm{d}(\arcsin x)$；

(11) $\int \frac{f(\arctan x)\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int f(\arctan x)\,\mathrm{d}(\arctan x)$.

例5 求下列不定积分:

(1) $\int \tan x \, dx$;　　　　(2) $\int \sec x \, dx$;

(3) $\int \cos x \cos 3x \, dx$.

解　(1) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos) x = -\ln|\cos x| + C$

类似地，可以得到$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$.

(2) $$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

类似地，可以得到$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$.

（3）因为 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，所以

$$\int \cos x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\int \cos 4x\,d4x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

例 6　求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解　(1)
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

(2)
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= \arcsin\frac{x}{a}+C$$

例7 求 $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \cdot$

解

$$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx = -\int \cos\frac{1}{x}d(\frac{1}{x}) = -\sin\frac{1}{x} + C$$

例8 求 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$

解 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}\ln x = \arcsin(lnx)+C$

例9 求 $\int (x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2-2x}\,\mathrm{d}(x^2-2x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$$

4.2.2 第二类换元积分法

在第一类换元积分法中，我们是通过变量代换$u=\varphi(x)$，将形如$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$的不定积分转化为形如$\int f(u)\mathrm{d}u$的不定积分，然后计算. 有时候我们会遇到相反的情形，需要通过变量代换$x=\psi(t)$，将形如$\int f(x)\mathrm{d}x$的不定积分转化为形如$\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$的不定积分后再进行计算.

例10 求不定积分 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 这个不定积分的主要困难是分式中出现根式，凑微分法难于求出积分结果，可以考虑先把根式消去，再积分.

令$x=t^2(t\geq 0)$，则$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2t-2\ln|t+1|+C$$

将 $t=\sqrt{x}$ 代入上式，回到原积分变量，则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

定理4.2 设$x=\psi(t)$单调可导，如果$f[\psi(t)]\psi'(t)$有原函数$F(t)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\psi(t)}{=\!=\!=} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C \overset{\text{还原}}{=\!=\!=} F[\psi^{-1}(x)]+C$$

其中$t=\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.这种求不定积分的方法称为第二类换元积分法.

例11 求$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$

解 令 $\sqrt{x-1}=t$，$t\geq0$，即$x=t^2+1$，则$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{t^2+1}{t} \cdot 2t\,dt = 2\int (t^2+1)dt = \frac{2}{3}t^3 + 2t + C$$

$$\overset{\text{还原}}{=\!=} \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + 2\sqrt{x-1} + C$$

例12 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$

解 设x=a sin$t$，t∈[－(π/2)，(π/2)]，则dx=a cos$t$ dt，于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$

为了把变量t还原为x，根据sin$t$=(x/a)作如图4-2所示的辅助三角形，于是有

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$