

八年级下册数学《第十六章 二次根式》

16.1 二次根式

知识要点归纳

知识点一 二次根式的定义

◆**二次根式的定义**：一般地，我们把形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式。其中“ $\sqrt{\quad}$ ”称为二次根号， a 为被开方数。

- 1、二次根式的条件：①含有二次根号 $\sqrt{\quad}$ ；②被开方数是一个非负数；
- 2、被开方数 a 既可以是一个数，又可以是一个含有字母的式子。

【**注意**】二次根式的定义是从形式来界定的，必须含有二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”，不能从化简结果上判断，如 $\sqrt{4}$ ， $\sqrt{9}$ 是二次根式；“ $\sqrt{\quad}$ ”的根指数是2，一般把根指数2省略，不要误认为根指数是1或没有。

知识点二 二次根式有意义的条件

◆**二次根式有意义的条件是**：被开方数（式）为非负数，反之也成立。即： \sqrt{a} 有意义 $\Rightarrow a \geq 0$ ， \sqrt{a} 无意义， $a < 0$ 。

◆【**规律方法**】二次根式有无意义的条件：

1. 如果一个式子中含有多个二次根式，那么它们有意义的条件是：各个二次根式中的被开方数都必须是非负数。
2. 如果所给式子中含有分母，则除了保证被开方数为非负数外，还必须保证分母不为零。
3. 如果一个式子中含有二次根式且被开方数中含有零指数幂或负整数指数幂，那么它有意义的条件是：底数不为0。

知识点三 二次根式的性质

◆**1、 \sqrt{a} 的性质**： $\sqrt{a} \geq 0$ ； $a \geq 0$ （双重非负性）。

◆**2、 $(\sqrt{a})^2$ ($a \geq 0$) 的性质**： $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$)（任何一个非负数都可以写成一个数的平方的形式）。

◆3、 $\sqrt{a^2}$ 的性质： $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a > 0) \\ 0(a = 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$ （算术平方根的意义）。

◆4、 $(\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的区别与联系。（可以从以下几个方面来说明）

		$(\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$	$\sqrt{a^2}$
区 别	取值范围	$a \geq 0$	a 为任意实数
	表示的意义	表示非负数 a 的算术平方根的平方	表示 a^2 的算术平方根
	运算顺序	先开平方后平方	先平方后开平方
	运算结果	$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$	$\sqrt{a^2} = a = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$
	读法	读作：“根号 a 的平方”或“ a 的算术平方根的平方”	读作：“根号 a^2 ”或“ a 的平方的算术平方根”
联系	(1) 结果都是非负数； (2) 当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$		

知识点四 代数式

◆1、定义：用基本运算符号（基本运算符号包括：加、减、乘、除、乘方和开方）把表示数或字母连接起来的式子，称为代数式。

【注意】代数式式数或字母之间的运算关系，代数式中只能含运算符号，不能含 $\geq, >, \leq, <, \neq, =$ 等关系符号。

◆2、列代数式的常用方法：

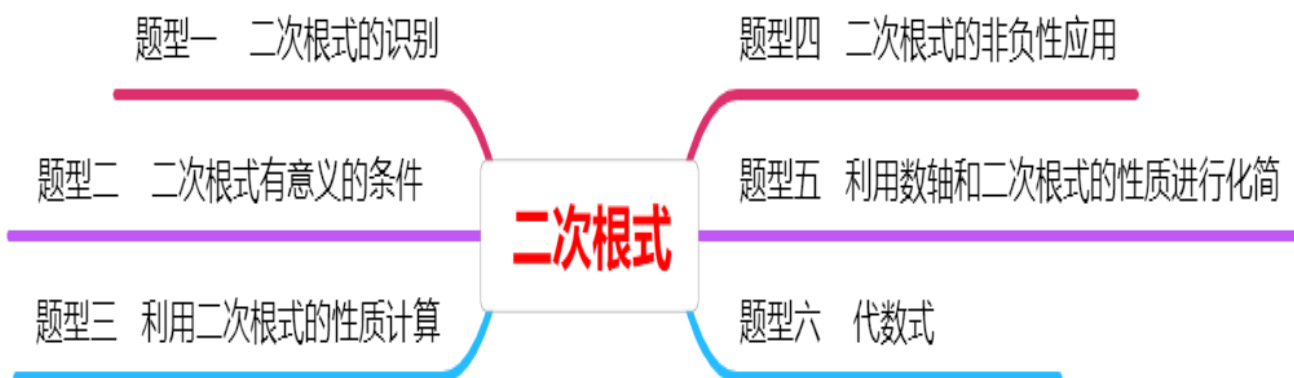
①直接法：根据问题的语言叙述直接写出代数式；

②公式法：根据公式列出代数式；

③探究规律法：将一组数或一组图形的排列规律用代数式表示出来。



题型归纳



题型突破 • 典例精析

题型一 二次根式的识别

【例题 1】 (2021 秋·古县期末) 下列各式中, 是二次根式的是 ()

A. $\sqrt{n^2}$

B. $\sqrt{-4}$

C. $\sqrt[3]{8}$

D. $\sqrt{3-\pi}$

【分析】 根据形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子是二次根式, 可得答案.

【解答】 解: A 、被开方数 $n^2 \geq 0$, 故 A 是二次根式;

B 、 D 被开方数小于 0, 无意义, 故 B 、 D 不是二次根式;

C 、是三次根式, 故 C 不是二次根式;

故选: A .

【点评】本题考查了二次根式的定义，注意二次根式的被开方数是非负数，根指数是2.

解题技巧提炼

判断一个式子是否为二次根式，要紧扣满足二次根式的两个条件：

(1) 含有二次根号“ $\sqrt{\quad}$ ”；(2) 被开方数是非负数，两个条件缺一不可.

【变式 1-1】(2021 秋·九台区期末) 下列各式中，不是二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{-2}$ C. $\sqrt{b^2+1}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

【分析】根据二次根式的概念，形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子是二次根式，逐一判断即可得到答案.

【解答】解：A、 $\sqrt{8}$ 是二次根式，不合题意；

B、 $\because -2 < 0$ ， $\therefore \sqrt{-2}$ 不是二次根式，符合题意；

C、 $\sqrt{b^2+1}$ 是二次根式，不合题意；

D、 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 是二次根式，不合题意；

故选：B.

【点评】此题主要考查了二次根式的定义，正确掌握二次根式的定义是解题关键.

【变式 1-2】(2022 春·合川区校级期中) 下列式子一定是二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{-5}$ B. π C. $\sqrt{a^3}$ D. $\sqrt{7}$

【分析】根据二次根式的定义判断即可.

【解答】解：A、 $-5 < 0$ ，二次根式无意义，故此选项不符合题意；

B、 π 是无理数，不是二次根式，故此选项不合题意；

C、当 $a < 0$ 时，二次根式无意义，故此选项不合题意；

D、 $\sqrt{7}$ 是二次根式，故此选项符合题意.

故选：D.

【点评】本题考查二次根式的定义，掌握二次根式的定义：一般地，我们把形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式是解题的关键.

【变式 1-3】 (2021 春·海淀区校级期末) 下列各式: $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{2a-1}$ ($a < \frac{1}{2}$), $\sqrt{a^2+2a+1}$ 中, 是二次根式的有_____.

【分析】 一般地, 形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的代数式叫做二次根式.

【解答】 解: $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{2a-1}$ ($a < \frac{1}{2}$), $\sqrt{a^2+2a+1}$ 中,

一是三次方根,

二, 三根号里面的数小于 0,

第四个可以变为 $(a+1)^2$.

故是二次根式的有 $\sqrt{a^2+2a+1}$.

【点评】 此题主要考查: 当函数表达式是二次根式时, 被开方数为非负数.

【变式 1-4】 下列各式中, 二次根式有 ()

$\sqrt{-3}$, $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{x+1}$ ($x < -2$).

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】 根据二次根式的定义: 形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子, 叫做二次根式, 即可解答.

【解答】 解: 下列各式中:

$\sqrt{-3}$, $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{x+1}$ ($x < -2$),

是二次根式的有 $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{a^2+1}$,

共有 4 个,

故选: D.

【点评】 本题考查了二次根式的定义, 熟练掌握二次根式的定义是解题的关键.

【变式 1-5】 (2022 秋·诏安县期中) 给出下列各式: ① $\sqrt{32}$; ② 6; ③ $\sqrt{-12}$; ④ $\sqrt{-m}$ ($m \leq 0$); ⑤ $\sqrt{a^2+1}$; ⑥ $\sqrt[3]{5}$. 其中二次根式的个数是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【分析】 根据二次根式的定义即可作出判断.

【解答】 解: ① $\because 3 > 0, \therefore \sqrt{32}$ 是二次根式;

② 6 不是二次根式;

③ $\because -12 < 0, \therefore \sqrt{-12}$ 不是二次根式;

④ $\because m \leq 0, \therefore -m \geq 0, \therefore \sqrt{-m}$ 是二次根式;

⑤ $\because a^2+1>0$, $\therefore \sqrt{a^2+1}$ 是二次根式;

⑥ $\sqrt[3]{5}$ 是三次根式, 不是二次根式.

所以二次根式有 3 个.

故选: B.

【点评】 本题考查的是二次根式的定义, 解题时, 要注意: 一般地, 我们把形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式.

题型二 二次根式有意义的条件

【例题 2】 (2022 春·钦北区校级月考) 若代数式 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围为 ()

- A. $x > 0$ 且 $x \neq 1$ B. $x \geq 0$ C. $x \neq 1$ D. $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$

【分析】 根据二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件即可得出答案.

【解答】 解: $\because x \geq 0, x-1 \neq 0$,

$\therefore x \geq 0$ 且 $x \neq 1$.

故选: D.

【点评】 本题考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 掌握二次根式的被开方数是非负数, 分式的分母不等于 0 是解题的关键.

解题技巧提炼

求式子有意义时字母的取值范围方法：

第一步，明确式子有意义的条件，对于单个的二次根式，只需满足被开方数为非负数；对于含有多个二次根式的，则必须满足多个被开方数同时为非负数；对于零指数幂，则必须满足底数不能为零；对于含有分式的，满足分母不能为零。

第二步，利用使式子有意义的所有条件，建立不等式或不等式组；

第三步，求出不等式或不等式组的解集，即为字母的取值范围。

【变式 2-1】 (2022·徐州) 若 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 2$ B. $x \geq 2$ C. $x < 2$ D. $x \leq 2$

【分析】 根据二次根式有意义，被开方数大于等于 0，列不等式求解。

【解答】 解：根据题意，得

$$x - 2 \geq 0,$$

解得 $x \geq 2$ 。

故选：B。

【点评】 本题主要考查二次根式有意义的条件的知识点，代数式的意义一般从三个方面考虑：(1) 当代数式是整式时，字母可取全体实数；(2) 当代数式是分式时，分式的分母不能为 0；(3) 当代数式是二次根式时，被开方数为非负数。

【变式 2-2】 (2021 春·白云区期末) 当 x 满足一定条件时，式子 $\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$ 在实数范围内有意义，这个条件是 ()

- A. $x > -3$ B. $x > 3$ C. $x \geq -3$ D. $x \geq 3$

【分析】 代数式中主要有二次根式和分式两部分。根据二次根式和分式有意义的条件：被开方数大于等于 0，分母不等于 0，列不等式求解即可。

【解答】 解：由题可得： $x - 3 \geq 0$ 且 $x - 3 \neq 0$ ，

解得 $x \geq 3$ ， $x \neq 3$ ，

$\therefore x > 3$,

即当 $x > 3$ 时, 式子 $\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$ 在实数范围内有意义.

故选: B.

【点评】本题主要考查了二次根式有意义的条件以及分式有意义的条件, 注意: 分式应考虑分式的分母不能为 0; 二次根式应考虑被开方数是非负数.

【变式 2-3】(2021 春·黔西南州期末) 式子 $\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义的条件是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x > 1$ C. $x < 0$ D. $x \leq 0$

【分析】直接利用二次根式有意义的条件分析得出答案.

【解答】解: 式子 $\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义的条件是: $x-1 > 0$,

解得: $x > 1$.

故选: B.

【点评】此题主要考查了二次根式有意义的条件, 正确把握定义是解题关键.

【变式 2-4】无论 a 取何值, 下列各式中一定有意义的是 ()

- A. \sqrt{a} B. $\sqrt{a^2-1}$ C. $\sqrt{a+1}$ D. $\sqrt{a^2+1}$

【分析】根据二次根式中的被开方数是非负数判断即可.

【解答】解: A. \sqrt{a} 不一定有意义, 不合题意;

B. $\sqrt{a^2-1}$ 不一定有意义, 不合题意;

C. $\sqrt{a+1}$ 不一定有意义, 不合题意;

D. $\sqrt{a^2+1}$ 的被开方数是正数, 一定有意义, 符合题意;

故选: D.

【点评】本题考查的是二次根式有意义的条件, 掌握二次根式中的被开方数是非负数是解题的关键.

【变式 2-5】(2020 秋·淇滨区校级月考) 若代数式 $\frac{(x-2)^0}{2-\sqrt{x-1}}$ 有意义, 则 x 的取值范围

是_____.

【分析】根据零指数幂 $a^0=1$ ($a \neq 0$) 可得 $x-2 \neq 0$, 根据二次根式和分式有意义的条件可得 $x-1 \geq 0$, 且 $x-1 \neq 4$, 再解不等式即可.

【解答】解: \because 代数式 $\frac{(x-2)^0}{2-\sqrt{x-1}}$ 有意义,

$$\therefore x-2 \neq 0 \text{ 且 } x-1 \geq 0 \text{ 且 } x-1 \neq 4,$$

$$\text{解得 } x \geq 1 \text{ 且 } x \neq 2 \text{ 且 } x \neq 5,$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } x \geq 1 \text{ 且 } x \neq 2 \text{ 且 } x \neq 5,$$

$$\text{故答案为: } x \geq 1 \text{ 且 } x \neq 2 \text{ 且 } x \neq 5.$$

【点评】此题主要考查了二次根式和分式有意义的条件和零次幂，关键是掌握二次根式中的被开方数是非负数，分式有意义的条件是分母不等于零。

【变式 2-6】求下列式子有意义的 x 的取值范围.

$$(1) \frac{1}{\sqrt{4-3x}} \quad (2) \frac{\sqrt{3-x}}{x-2} \quad (3) \frac{\sqrt{x-3}}{x-2} \quad (4) \sqrt{-x^2} \quad (5) \sqrt{2x^2+1} \quad (6) \sqrt{2x-3} + \sqrt{3-2x}$$

【分析】(1) (2) (3) 根据二次根式的性质和分式的意义，由被开方数大于等于 0，分母不等于 0 可知；
(4) (5) (6) 根据二次根式的意义，被开方数是非负数可知。

【解答】解：(1) 根据二次根式的意义和分式有意义的条件，
被开方数 $4-3x \geq 0$ ，分母 $4-3x \neq 0$ ，

$$\text{解得 } x < \frac{4}{3}.$$

$$\text{所以 } x \text{ 的取值范围是 } x < \frac{4}{3}.$$

(2) 根据二次根式的意义和分式有意义的条件，
被开方数 $3-x \geq 0$ ，解得 $x \leq 3$ ；
分母 $x-2 \neq 0$ ，解得 $x \neq 2$ 。

$$\text{所以 } x \text{ 的取值范围是 } x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 2.$$

(3) 根据二次根式的意义和分式有意义的条件，
被开方数 $x-3 \geq 0$ ，解得 $x \geq 3$ ；
分母 $x-2 \neq 0$ ，解得 $x \neq 2$ 。

因为大于或等于 3 的数中不包含 2 这个数，

$$\text{所以 } x \text{ 的取值范围是 } x \geq 3.$$

$$(4) \text{ 根据题意得: } -x^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 0.$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } x = 0;$$

(5) 根据题意得: $2x^2+1 \geq 0$,

$$\because x^2 \geq 0,$$

$$\therefore 2x^2+1 > 0,$$

故 x 的取值范围是任意实数;

(6) 根据题意得: $2x-3 \geq 0$, 解得 $x \geq \frac{3}{2}$;

$$2x-3 \leq 0, \text{ 解得 } x \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{综上, 可知 } x = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } x = \frac{3}{2}.$$

【点评】 本题主要考查了二次根式的意义和性质. 概念: 式子 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 叫二次根式.

性质: 二次根式中的被开方数必须是非负数, 否则二次根式无意义.

当二次根式在分母上时还要考虑分母不等于零, 此时被开方数大于 0.

题型三 利用二次根式的性质计算

【例题 3】 (2021 秋·高台县期末) 下列式子正确的是 ()

A. $\sqrt{(-9)^2} = -9$ B. $\sqrt{25} = \pm 5$ C. $\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$ D. $(-\sqrt{2})^2 = -2$

【分析】 利用开平方的性质和开立方的性质计算.

【解答】 解: 根据二次根式的性质:

A、 $\sqrt{(-9)^2} = 9$, 故 A 错误;

B、 $\sqrt{25} = 5$, 故 B 错误;

C、属于立方根的运算, 故 C 正确;

D、 $(-\sqrt{2})^2 = 2$, 故 D 错误.

故选: C.

【点评】 此题主要考查二次根式的化简, 正确理解算术平方根的意义, 注意符号的处理.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/948056111076006065>