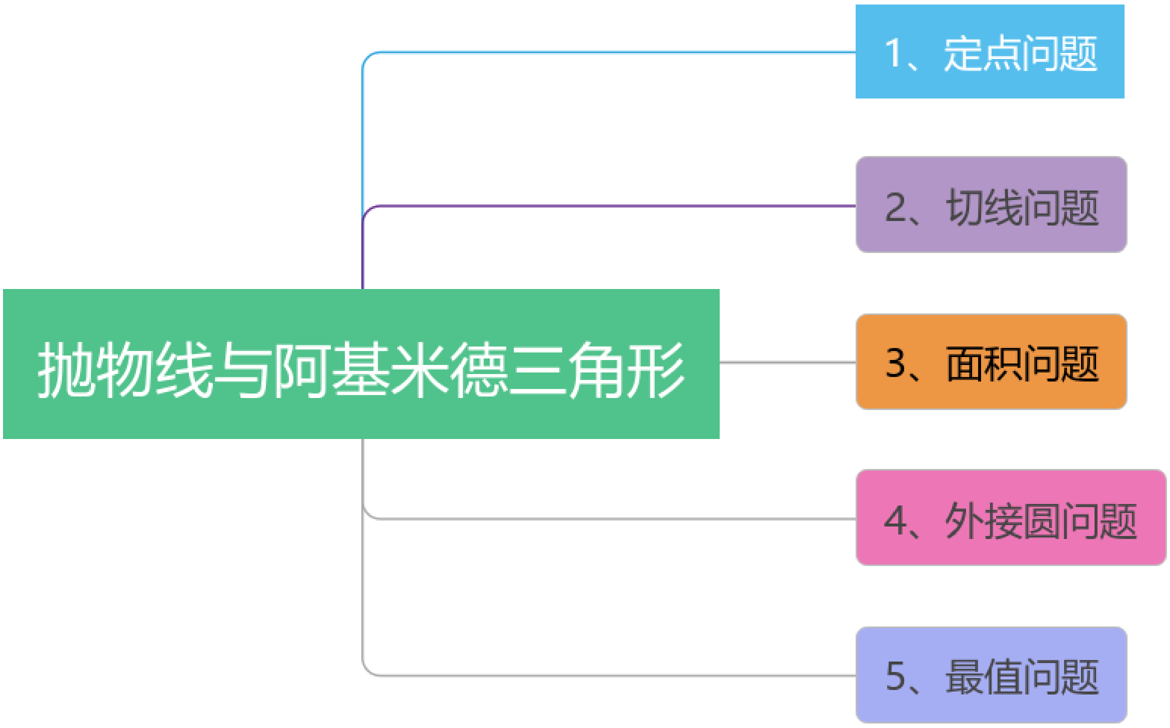
专题 07 抛物线与阿基米德三角形

网络构建



夯基·必备基础知识梳理

【突破满分数学之秒杀技巧与答题模板】:

抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围的三角形，这个三角形又常被称为阿基米德三角形．阿基米德三角形的得名，是因为阿基米德本人最早利用逼近的思想证明 如下结论：

抛物线与阿基米德三角形定理：

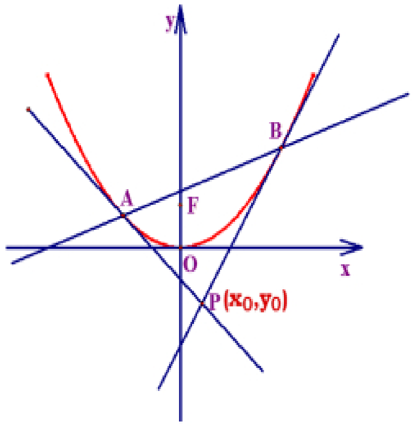
如图，假设抛物线方程为$x^2=2py(p>0)$， 过抛物线准线$y=-\dfrac{p}{2}$上一点$P(x_0,y_0)$向抛物线引两条切线，切点分别记为A,B，其坐标为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$. 则以点P和两切点A,B围成的三角形PAB中，有如下的常见结论:

结论 1. 直线 AB 过抛物线的焦点 F .

结论 2. 直线 AB 的方程为 $x_0x=2p\dfrac{y_0+y}{2}=p(y_0+y)$.

证明：参见下面的例 1. 也可由极点与极线得到.

进一步，设A,B：$(x_1,\dfrac{x_1^2}{2p}),(x_2,\dfrac{x_2^2}{2p})$，则$k_{AB}=\dfrac{\dfrac{x_1^2}{2p}-\dfrac{x_2^2}{2p}}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}$.



则 $AB:y-\dfrac{x_1^2}{2p}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}\cdot(x-x_1)\Rightarrow AB:2py=(x_1+x_2)x-x_1x_2$，显然由于$AB$过焦点$(0,\dfrac{p}{2})$，代入可得$x_1x_2=-p^2$. 我们得到了抛物线焦点弦两端点坐标之间的基本关系.

结论 3. 过 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，以 A,B 分别为切点做两条切线，则这两条切线的交点 $P(x_0,y_0)$ 的轨迹即为抛物线的准线.

证明：过A点的切线方程为$x_1x=p(y_1+y)$，过B点的切线方程为$x_2x=p(y_2+y)$，两式相除可得：

$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y+y_1}{y+y_2}\Rightarrow y=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1-x_2}\Rightarrow y=\dfrac{x_1x_2}{2p}=-\dfrac{p}{2}$. 这就证明了该结论.

结论 4. $PF\perp AB$.

证明：由结论 3，$k_{AB}=\dfrac{x_0}{p}$，$k_{PF}=\dfrac{y_0-\dfrac{p}{2}}{x_0}$. 那么$k_{AB}\cdot k_{PF}=\dfrac{x_0}{p}\cdot\dfrac{y_0-\dfrac{p}{2}}{x_0}=\dfrac{y_0}{p}-\dfrac{1}{2}=-1$.

结论 5. $AP\perp PB$.

证明：$k_{AP}=\dfrac{x_1}{p},k_{BP}=\dfrac{x_2}{p}$, 则$k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{x_1}{p}\cdot\dfrac{x_2}{p}=\dfrac{x_1\cdot x_2}{p^2}$. 由抛物线焦点弦的性质可知$x_1x_2=-p^2$，代入上式即可得$k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{x_1\cdot x_2}{p^2}=-1$，故$AP\perp PB$.

结论 6. 直线 AB 的中点为 M，则 PM 平行于抛物线的对称轴.

证明：由结论 3 的证明可知，过点 A,B 的切线的交点 P 在抛物线准线上. 且 P 的坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p})$，显然 PM 平行于抛物线的对称轴.

提升·必考题型归纳

【一】、定点问题

例 1、已知 C 的方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$，过直线 $y=x-1$ 上的动点 Q 作 C 的两条切线 l_1,l_2，切点分别为 A,B，证明：直线 AB 恒过定点.

【详解】曲线 C：$x^2=\frac{1}{2}y$，即 $y=2x^2$，则 $y'=4x$，

设 $A\left(x_1,2x_1^2\right),B\left(x_2,x_2^2\right),Q\left(t,t-1\right)$，

可知切线 QA 的斜率为 $4x_1$，所以切线 QA：$y-2x_1^2=4x_1\left(x-x_1\right)$，

则 $t-1-2x_1^2=4x_1\left(t-x_1\right)$，整理得 $2x_1^2-4tx_1+t-1=0$，

同理由切线 QB 可得：$2x_2^2-4tx_2+t-1=0$，

可知：x_1,x_2 为方程 $2x^2-4tx+t-1=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=2t,x_1x_2=\frac{t-1}{2}$，

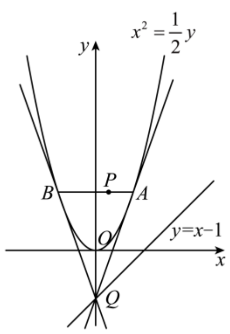
可得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{2x_1^2-2x_2^2}{x_1-x_2}=2\left(x_1+x_2\right)=4t$，

设 AB 的中点为 $N\left(x_0,y_0\right)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=t,y_0=\frac{2x_1^2+2x_2^2}{2}=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4t^2-t+1$，

即 $N\left(t,4t^2-t+1\right)$，

所以直线 AB：$y-\left(4t^2-t+1\right)=4t\left(x-t\right)$，整理得 $y-1=4t\left(x-\frac{1}{4}\right)$，

所以直线 AB 恒过定点 $P\left(\frac{1}{4},1\right)$.



例 2、已知曲线$C: y=\frac{x^2}{2}$，D为直线$y=-\frac{1}{2}$上的动点，过D作C的两条切线，切点分别为A，B．

（1）证明：直线AB过定点．

（2）若以$E(0,\frac{5}{2})$为圆心的圆与直线AB相切，且切点为线段AB的中点，求该圆的方程．

【解析】（1）证明：设$D(t,-\frac{1}{2})$，$A(x_1，y_1)$，则$x_1^2=2y_1$，

由于$y'=x$，$\therefore$切线DA的斜率为x_1，故$\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$，

整理得：$2tx_1-2y_1+1=0$．

设$B(x_2，y_2)$，同理可得$2tx_2-2y_2+1=0$．

故直线AB的方程为$2tx-2y+1=0$．

$\therefore$直线AB过定点$(0,\frac{1}{2})$；

（2）解：由（1）得直线AB的方程$y=tx+\frac{1}{2}$．

由$\begin{cases} y=tx+\frac{1}{2} \\ y=\frac{x^2}{2} \end{cases}$，可得$x^2-2tx-1=0$．

于是$x_1+x_2=2t, y_1+y_2=t(x_1+x_2)+1=2t^2+1$．

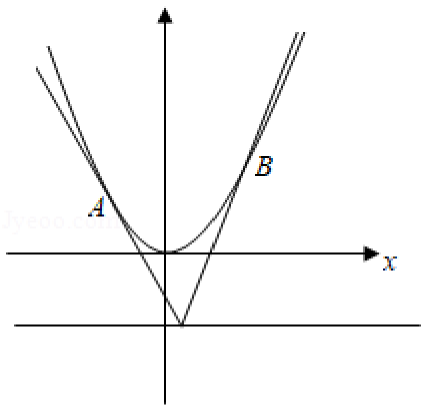
设M为线段AB的中点，则$M(t,t^2+\frac{1}{2})$，

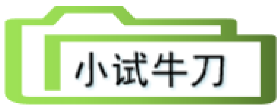
由于$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{EM}=(t,t^2-2)$，$\overrightarrow{AB}$与向量$(1,t)$平行，

$\therefore t+(t^2-2)t=0$，解得$t=0$或$t=\pm1$．

当$t=0$时，$|\overrightarrow{EM}|=2$，所求圆的方程为$x^2+(y-\frac{5}{2})^2=4$；

当$t=\pm1$时，$|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{2}$，所求圆的方程为$x^2+(y-\frac{5}{2})^2=2$．





1．在平面直角坐标系 xOy 中， M 为直线 $y=x-3$ 上的动点，过点 M 作抛物线 $C:x^2=2y$ 的两条切线 MA，MB，切点分别为 A， B， N 为 AB 的中点．

（1）证明： $MN\perp x$ 轴；

（2）直线 AB 是否恒过定点？若是，求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由．

【解析】解：（1）证明：设切点为 $A(x_1$， $\frac{x_1^2}{2})$， $B(x_2$， $\frac{x_2^2}{2})$，

$x^2=2y$ 即 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y'=x$，

所以切线 MA 的斜率为 x_1，切线的方程为 $y-\frac{x_1^2}{2}=x_1(x-x_1)$，

设 $M(t,t-3)$，则有 $t-3-\frac{x_1^2}{2}=x_1(t-x_1)$，

化简可得 $x_1^2-2tx_1+2t-6=0$，

同理可得 $x_2^2-2tx_2+2t-6=0$，

所以 x_1， x_2 是方程 $x^2-2tx+2t-6=0$ 的两根，

所以 $x_1+x_2=2t$， $x_1x_2=2t-6$，

$x_N=\frac{x_1+x_2}{2}=t=x_M$，

所以 $MN\perp x$ 轴；

（2）因为 $y_N=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2-\frac{1}{2}x_1x_2=t^2-t+3$，

所以 $N(t,t^2-t+3)$，