2023-2024学年湖南省长沙市高二上学期期末考试数学模拟试题

一、选择题：本大题共8个小题，每小题5分，满分40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

1．设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$，z 在复平面内对应的点为$(x，y)$，则

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$(x-1)^2+y^2=1$　　C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$x^2+(y+1)^2=1$

2．直线 $2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $mx+3y-2=0$ 平行，则 $m=$

A．2　　B．2 或 -3　　C．-3　　D．-2 或 -3

3．已知角 α 的终边与单位圆的交于点 $P\left(-\frac{1}{2},y\right)$，则 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha=$(　　)

A．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$\pm\frac{3}{2}$

4．随着新一轮科技革命和产业变革持续推进，以数字化、网络化、智能化以及融合化为主要特征的新型基础设施建设越来越受到关注.5G基站建设就是“新基建”的众多工程之一，截至2020年底，我国已累计开通5G基站超70万个，未来将进一步完善基础网络体系，稳步推进5G网络建设，实现主要城区及部分重点乡镇5G网络覆盖.2021年1月计划新建设5万个5G基站，以后每个月比上一个月多建设1万个，预计我国累计开通500万个5G基站时要到（　）

A．2022年12月　　B．2023年2月　　C．2023年4月　　D．2023年6月

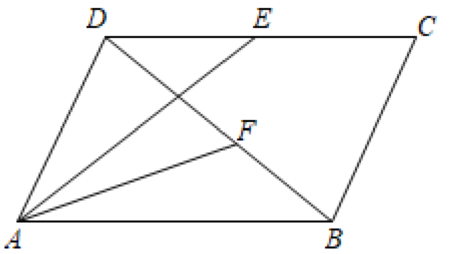
5．已知$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$|a_0|+|a_1|+\dots+|a_5|=$（　）

A．1　　B．243　　C．121　　D．122

6．设椭圆 E 的两焦点分别为 F_1，F_2，以 F_1 为圆心，$|F_1F_2|$ 为半径的圆与 E 交于 P，Q 两点，若 ΔPF_1F_2 为直角三角形，则 E 的离心率为

A．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{2}+1$

7．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，点 F 为线段 BD 上的一动点，若 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{DC}\left(x>0,y>0\right)$，则 $\frac{2-3x}{4y^2+1}$ 的最大值为（　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．1　　D．2

8．已知当$x \ge \mathrm{e}$时，不等式$x^a + \frac{1}{x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ge a\ln x$恒成立，则正实数$a$的最小值为（　）

A．1　　B．$\frac{1}{\mathrm{e}}$　　C．e　　D．$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

二、多选题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．下列说法正确的是（　）

A．4 个班分别从 3 个景点选择一处游览，不同的选法的种数是3^4；

B．从 1，2，3，4，5 选择 2 个数（可重复）组成两位偶数一共有 10 个；

C．两个口袋分别装有 2 个和 3 个小球，从两个口袋分别各取 1 个球，一共有 5 种取法；

D．从 1，3，5，7，10 选择 2 个不相同的数作为分子分母组成分数，一共可以组成 10 个分数；

10．设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，其前 n 项和为S_n，前 n 项积为T_n，并且满足条件$a_1 > 1$，$a_7 \cdot a_8 > 1$，$\frac{a_7 - 1}{a_8 - 1} < 0$，则下列结论正确的是（　）

A．$0 < q < 1$　　B．$a_7 \cdot a_9 > 1$

C．S_n的最大值为S_9　　D．T_n的最大值为T_7

11．已知函数$f(x) = x + \sin x - x\cos x$的定义域为$[-2\pi, 2\pi)$，则（　）

A．$f(x)$为奇函数

B．$f(x)$在$[0,p)$上单调递增

C．$f(x)$有且仅有 4 个极值点

D．$f(x)$恰有 4 个极大值点

12．下列有关正方体的说法，正确的有（   ）

A．正方体的内切球、棱切球、外接球的半径之比为$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

B．若正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为$1, Q$为正方体侧面BCC_1B_1上的一个动点，E,F为线段AC_1的两个三等分点，则$|QE|+|QF|$的最小值为$\frac{\sqrt{11}}{3}$

C．若正方体8个顶点到某个平面的距离为公差为1的等差数列，则正方体的棱长为$2\sqrt{5}$

D．若正方体$ABCD-A'B'C'D'$的棱长为3，点P在棱CC'上，且$PC=2PC'$，则三棱锥$B'-D'AP$的外接球表面积为$\frac{99}{4}\pi$

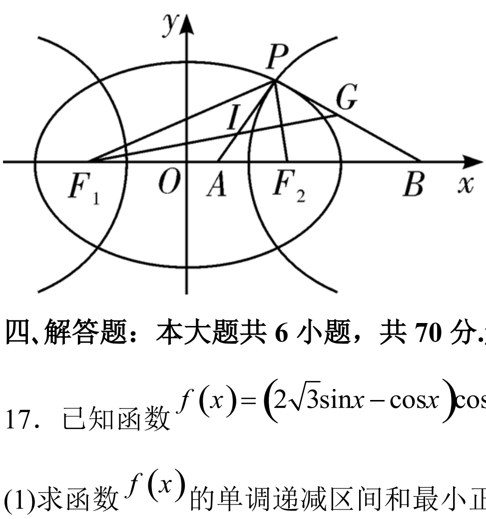
三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．已知函数$f(x)=x\ln x+ax^2+2$，若$f'(\mathrm{e})=0$，则$a=$__________.

14．若直线$x+ay-a-1=0$与圆$C:(x-2)^2+y^2=4$交于A,B两点，当$|AB|$最小时，劣弧$\overset{\frown}{AB}$的长为__________.

15．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$(a-2c\cos B)\sin A=\sqrt{2}a\cos A$，$a=\sqrt{2}$，且$\cos B=-\sin C$，则$bc=$______.

16．如图，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$有公共焦点$F_1(-c,0),F_2(c,0)(c>0)$，椭圆的离心率为$e_1$，双曲线的离心率为$e_2$，点$P$为两曲线的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=60^{\circ}, I$为$\triangle F_1PF_2$的内心，$F_1,I,G$三点共线，且$\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{IP}=0, x$轴上点$A,B$满足$\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{IP},\overrightarrow{BG}=\mu\overrightarrow{GP}$，则$e_1e_2$的最小值为__________；$\lambda^2+\mu^2$的最小值为__________.



四、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

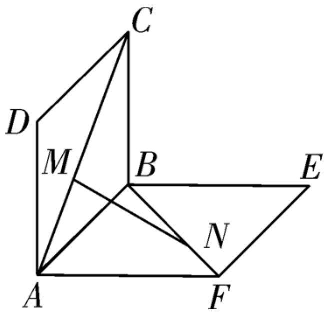
17．已知函数$f(x)=(2\sqrt{3}\sin x-\cos x)\cos x+\sin^2 x$.

(1)求函数$f(x)$的单调递减区间和最小正周期；

(2)若当$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$时，不等式$f(x)\geq m$有解，求实数$m$的取值范围.

18．用总长为$\frac{52}{3}\text{m}$的钢条制作一个长方体容器的框架，如果所制容器底面一边比另一边的长多1m，那么高为多少时容器的容积最大？最大容积是多少？

19．在如图所示的试验装置中，两个正方形框架$ABCD,ABEF$的边长都是1，且它们所在的平面互相垂直.活动弹子M,N分别在正方形对角线AC和BF上移动，且CM和BN的长度保持相等，记$CM=BN=t(0<t<\sqrt{2})$.



(1)求MN长的最小值；

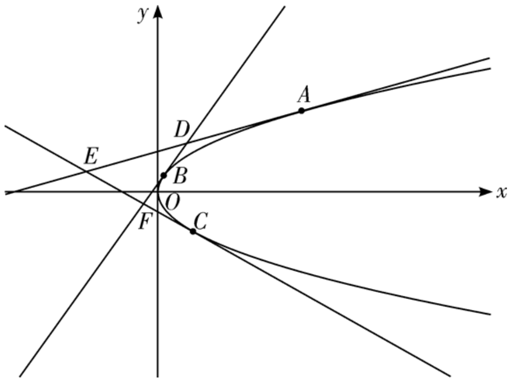
(2)当MN的长最小时，求二面角$A-MN-B$的正弦值.

20．已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，且满足$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+3,n为奇数,\\4a_n,n为偶数.\end{cases}$

(1)记$b_n=a_{2n}$，证明：$\{b_n+1\}$为等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式及其前$2n-1$项和S_{2n-1}.

21．阅读材料并解决如下问题：Bézier 曲线是计算机图形学及其相关领域中重要的参数曲线之一.法国数学家 DeCasteljau 对 Bézier 曲线进行了图形化应用的测试，提出了 DeCasteljau 算法：已知三个定点，根据对应的一定比例，使用递推画法，可以画出抛物线.反之，已知抛物线上三点的切线，也有相应边成比例的结论.已知抛物线$\Gamma:y^2=2px(p>0)$上的动点到焦点距离的最小值为$\frac{1}{2}$.



(1)求Γ的方程及其焦点坐标和准线方程；

(2)如图，A,B,C是Γ上的三点，过三点的三条切线分别两两交于点D,E,F，若$AC//DF$，求$\dfrac{|BD|}{|BF|}$的值.

22．设$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-2ax-1\right)$且$f(x)\geq 0$恒成立.

(1)求实数a的值；

(2)证明：$f\left(x\right)$存在唯一的极大值点x_0，且$\mathrm{e}^{-2}<f\left(x_0\right)<2^{-2}$.

1．C

【分析】本题考点为复数的运算，为基础题目，难度偏易．此题可采用几何法，根据点（x，y）和点(0，1)之间的距离为 1，可选正确答案 C．

【详解】$z=x+yi,z-i=x+(y-1)i,|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1,$则$x^2+(y-1)^2=1$．故选 C．

【点睛】本题考查复数的几何意义和模的运算，渗透了直观想象和数学运算素养．采取公式法或几何法，利用方程思想解题．

2．B

【分析】两直线平行，斜率相等；按$m+1=0$，$m=0$和$m+1\neq 0,m\neq 0$三类求解．

【详解】当$m+1=0$即$m=-1$时，

两直线为$2x+4=0$，$-x+3y-2=0$，

两直线不平行，不符合题意；

当$m=0$时，

两直线为$2x+y+4=0$，$3y-2=0$

两直线不平行，不符合题意；

当$m+1\neq 0,m\neq 0$即$m\neq -1,m\neq 0$时，

直线$2x+(m+1)y+4=0$的斜率为$-\frac{2}{m+1}$，

直线$mx+3y-2=0$的斜率为$-\frac{m}{3}$，

因为两直线平行，所以$-\frac{2}{m+1}=-\frac{m}{3}$，

解得$m=2$或-3，

故选 B．

【点睛】本题考查直线平行的斜率关系，注意斜率不存在和斜率为零的情况．

3．C

【详解】分析：首先求出点P的坐标，再利用三角函数的定义得出$\cos\alpha,\sin\alpha$的值，进而由同角三角函数基本关系式求出结果即可．

详解：$\because$点$P\left(-\frac{1}{2},y\right)$在单位圆上，$\therefore y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，则由三角函数的定义可得得

$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}$.

点睛：此题考查了三角函数的定义以及同角三角函数基本关系式的应用，求出 y 的值是解题的关键.

4．B

【分析】每个月开通 $5G$ 基站的个数是以 5 为首项，1 为公差的等差数列，设预计我国累计开通 500 万个 $5G$ 基站需要 n 个月，结合等差数列的前 n 项和公式列得关于 n 的方程，解之即可.

【详解】每个月开通 $5G$ 基站的个数是以 5 为首项，1 为公差的等差数列，

设预计我国累计开通 500 万个 $5G$ 基站需要 n 个月，则

$70+5n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=500$，

化简整理得，$n^2+9n-860=0$，

解得 $n\approx25.17$ 或 -34.17（舍负），

所以预计我国累计开通 500 万个 $5G$ 基站需要 25 个月，也就是到 2023 年 2 月.

故选：B.

5．B

【分析】运用赋值法建立方程组，解之可得选项.

【详解】令 $x=1$，得 $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$①，

令 $x=-1$，得 $-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=-243$②，

①＋②，得 $2(a_4+a_2+a_0)=-242$，即 $a_4+a_2+a_0=-121$.，

①－②，得 $2(a_5+a_3+a_1)=244$，即 $a_5+a_3+a_1=122$.

所以 $|a_0|+|a_1|+\dots+|a_5|=122+121=243$.

故选：B.

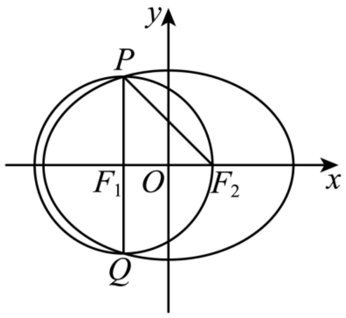
【点睛】方法点睛：对形如 $(ax+b)^n(a,b\in R)$ 的式子求其展开式的各项系数之和，常用赋值法，只需令 $x=1$ 即可；对形如 $(ax+by)^n(a,b\in R)$ 的式子求其展开式中各项系数之和，只需令 $x=y=1$ 即可.

6．B

【分析】由ΔPF_1F_2为直角三角形，得$\angle PF_1F_2=90^0$，可得$|PF_1|=2c,|PF_2|=2\sqrt{2}c$，利用椭圆的定义和离心率的概念，即可求解.

【详解】如图所示，因为ΔPF_1F_2为直角三角形，所以$\angle PF_1F_2=90^0$，

所以$|PF_1|=2c,|PF_2|=2\sqrt{2}c$，则$2c+2\sqrt{2}c=2a$，解得$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}-1$，故选 B



【点睛】本题主要考查了椭圆的标准方程及其简单的几何性质的应用，其中解答中合理利用椭圆的定义和离心率的概念求解是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

7．A

【分析】设 BD、AE 交于 O，根据题意可得$\triangle AOB\backsim\ EOD$，所以$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO}$，进而可得$\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{2}x\overrightarrow{AO}+y\overrightarrow{AB}$，根据 O、F、B 三点共线，可得 x，y 的关系，代入所求，即可基本不等式，即可得答案.

【详解】设 BD、AE 交于 O，因为$DE/\!/\ AB$，

所以$\triangle AOB\backsim\ EOD$，所以$\dfrac{AO}{OE}=\dfrac{AB}{DE}=2$，

所以$AO=2OE$，则$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO}$，

所以$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{DC}=\dfrac{3}{2}x\overrightarrow{AO}+y\overrightarrow{AB}$，

因为 O、F、B 三点共线，

所以$\dfrac{3}{2}x+y=1$，即$2-3x=2y$，

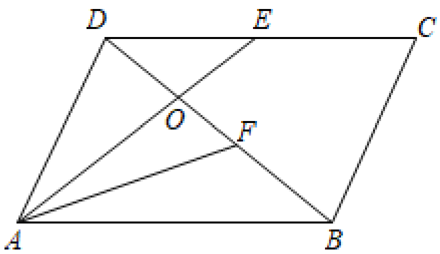
所以$\dfrac{2-3x}{4y^2+1}=\dfrac{2y}{4y^2+1}=\dfrac{2}{4y+\dfrac{1}{y}}$，

因为$x>0,y>0$，所以$4y+\dfrac{1}{y}\ge 2\sqrt{4y\cdot\dfrac{1}{y}}=4$，

当且仅当$4y=\dfrac{1}{y}$，即$y=\dfrac{1}{2}$时等号成立，此时$x=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\frac{2-3x}{4y^2+1}=\frac{2}{4y+\frac{1}{y}}\le\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

故选：A



8．B

【分析】原不等式可变形为 $e^{\frac{1}{x}}-\ln e^{\frac{1}{x}}\le x^a-\ln x^a$，令 $f(x)=x-\ln x$ 则 $f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\le f(x^a)$ 对于 $x\ge e$ 恒成立，利用导数判断 $f(x)=x-\ln x$ 的单调性可得 $e^{\frac{1}{x}}\le x^a$，转化为 $a\ge\frac{1}{x\ln x}$，令 $h(x)=x\ln x\left(x\in[e,+\infty)\right)$，利用导数求 $h(x)$ 最小值可得 $\frac{1}{x\ln x}$ 的最大值即可求解.

【详解】由题意，原不等式可变形为 $e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\le x^a-a\ln x$，即 $e^{\frac{1}{x}}-\ln e^{\frac{1}{x}}\le x^a-\ln x^a$，

设 $f(x)=x-\ln x$，则当 $x\ge e$ 时，$f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\le f(x^a)$ 恒成立，

因为 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $x\ge e$，$a>0$ 所以 $e^{\frac{1}{x}}>1$，$x^a>1$，

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以要使 $f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\le f(x^a)$，只需 $e^{\frac{1}{x}}\le x^a$，

两边取对数，得 $\frac{1}{x}\leqslant a\ln x$，因为 $x\ge e$，所以 $a\ge\frac{1}{x\ln x}$；

令 $h(x)=x\ln x\left(x\in[e,+\infty)\right)$，因为 $h'(x)=\ln x+1>0$，

所以 $h(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(e)=e$，

所以 $0<\frac{1}{x\ln x}\le\frac{1}{e}$，则 $a\ge\frac{1}{e}$，故正实数 a 的最小值为 $\frac{1}{e}$，

故选：B.

9．AB

【分析】计算 4 个班分别从 3 个景点选择一处游览，共有几种选法，判断 A;计算出从 1，2，3，4，5 选择 2 个数（可重复）组成两位偶数一共有几个，判断 B;根据分步乘法原理计算两个口袋分别装有 2 个和 3 个小球，从两个口袋分别各取 1 个球，有几种取法，判断 C;考虑 1 作分子情况和不选 1 时的情况，计算出分数的个数，判断 D.

【详解】A, 4 个班分别从 3 个景点选择一处游览，每一个班都有 3 种选择，分 4 步完成，

故有 $3\times3\times3\times3=3^4$ 种选法，A 正确；

B，从 1，2，3，4，5 选择 2 个数（可重复）组成两位偶数，

先确定个位数字有 2 种可能，再确定十位数字有 5 种可能，故共有 $2\times5=10$ 个偶数，B 正确；

C，两个口袋分别装有 2 个和 3 个小球，从两个口袋分别各取 1 个球，共有 $2\times3=6$ 种取法，C 错误；

D，从 1，3，5，7，10 选择 2 个不相同的数作为分子分母组成分数，

若选 1 作分子，则分母有 4 种可能，此时有 4 个分数，

不选 1 时，共有 $A_4^2=12$ 个分数，

故共有 $4+12=16$ 个分数，故 D 错误，

故选：AB

10．AD

【分析】根据题意 $a_7>1$，$a_8<1$，再利用等比数列的定义以及性质逐一判断即可.

【详解】因为 $a_1>1$，$a_7\cdot a_8>1$，$\dfrac{a_7-1}{a_8-1}<0$，

所以 $a_7>1$，$a_8<1$，所以 $0<q<1$，故 A 正确.

$a_7\cdot a_9=a_8{}^2<1$，故 B 错误；

因为 $a_1>1$，$0<q<1$，所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，所以 S_n 无最大值，故 C 错误；

又 $a_7>1$，$a_8<1$，所以 T_n 的最大值为 T_7，故 D 正确.

故选：AD

【点睛】本题考查了等比数列的性质、定义，考查了基本知识的掌握情况，属于基础题.

11．BC

【分析】由函数的定义域不关于原点对称，可知函数是非奇非偶函数，求出函数的导数，利用导数分析函数的单调性与极值.

【详解】因为$f(x)$的定义域为$[-2\pi,2\pi)$，定义域不关于原点对称，

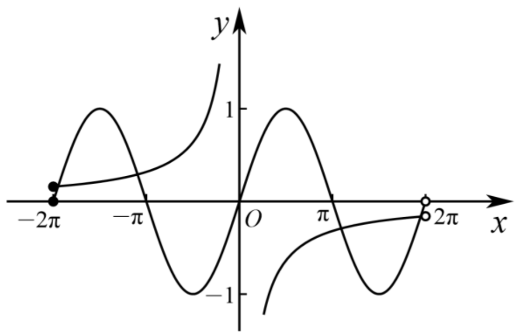
所以$f(x)$是非奇非偶函数，

又$f'(x)=1+\cos x-(\cos x-x\sin x)=1+x\sin x$，

当$x\in[0,\pi)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[0,\pi)$上单调递增，

显然$f'(0)\neq 0$，令$f'(x)=0$，得$\sin x=-\frac{1}{x}$，

分别作出$y=\sin x$，$y=-\frac{1}{x}$在区间$[-2\pi,2\pi)$上的图象，



由图可知，这两个函数的图象在区间$[-2\pi,2\pi)$上共有 4 个公共点，且两图象在这些公共点上都不相切，

故$f(x)$在区间$[-2\pi,2\pi)$上的极值点的个数为 4，且$f(x)$只有 2 个极大值点，

故选： BC．

12．ABD

【分析】设正方体棱长为a，分别求出正方体的内切球､棱切球､外接球的半径判断 A；利用补体法，把$|QE|+|QF|$转为$|QE|+|QF_1|$，当E、Q、F_1共线的时候$|QE|+|QF|=|EF_1|$最小，利用余弦定理求出$|EF_1|$判断 B；利用已知条件确定棱长与 8 个顶点到某个平面的距离的关系，利用等体积法求出棱长判断 C；利用坐标法求出球心坐标，进而求出球的半径，从而求出外接球表面积判断 D.

【详解】对于选项 A，设正方体边长为a，则其内切球､棱切球､外接球半径分别为