江苏省启东中学 2023-2024 学年度高一创新班第一学期第一次月考

(数学)

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边过点$A\left(\sin\frac{\pi}{3},\tan\frac{\pi}{3}\right)$，则$\tan\alpha=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 2

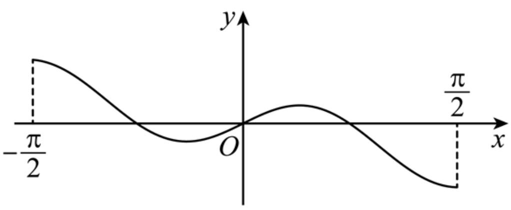
2. 已知命题p：$\forall x\in[-4,2]$，$\frac{1}{2}x^2-a\geq 0$，则p为真命题的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a\leq -2$　　B. $a\leq 0$　　C. $a\leq 8$　　D. $a\leq 16$

3. 已知$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\sin(\pi+\alpha)=$（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

4. 下列四个函数中的某个函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的大致图象如图所示，则该函数是（　　）



A. $y=\frac{x^3-x}{2^x+2^{-x}}$　　B. $y=\frac{x\cos 2x}{2^x+2^{-x}}$　　C. $y=\frac{1-x^2}{2^x+2^{-x}}$　　D. $y=\frac{\sin 2x}{2^x+2^{-x}}$

5. 函数$f(x)=6\sin x\cos x-2\cos x-3\sin x+1$在$[0,2\pi]$上的零点个数为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

6. 已知a,b均为正实数，若$\log_a b+\log_b a=\frac{5}{2},a^b=b^a$，则$\frac{a}{b}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 2 或$\frac{1}{2}$

7. 若存在实数m，使得$\log_a 4<m<2^{a-1}$，则实数a的取值范围是（　　）

A. $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　B. $\left(0,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

8. 对非空有限数集 $A=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}$ 定义运算“ min ”：$\min A$ 表示集合 A 中的最小元素. 现给定两个非空有限数集 A，B，定义集合 $M=\left\{x\left|x=\left|a-b\right|,a\in A,b\in B\right.\right\}$，我们称 $\min M$ 为集合 A，B 之间的“距离”，记为 d_{AB}. 现有如下四个命题：

①若 $\min A=\min B$，则 $d_{AB}=0$；　②若 $\min A>\min B$，则 $d_{AB}>0$；

③若 $d_{AB}=0$，则 $A\cap B\neq\varnothing$；　④对任意有限集合 A，B，C，均有 $d_{AB}+d_{BC}\geq d_{AC}$.

其中，真命题的个数为（　　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

二、多选题 本题共 4 小题，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列结论中正确的是（　　）

A. $120^\circ=\frac{2\pi}{3}$

B. 若角 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha<0$

C. 若角 α 的终边过点 $P\left(3k,4k\right)\left(k\neq0\right),\sin\alpha=\frac{4}{5}$

D. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(ax^2-3ax+2\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f\left(x\right)$ 值域为 R，则 $a\geq\frac{8}{9}$　　B. 若 $f\left(x\right)$ 定义域为 R，则 $a\in\left(0,\frac{8}{9}\right)$

C. 若 $f\left(x\right)$ 最大值为 0，则 $a=\frac{4}{9}$　　D. 若 $f\left(x\right)$ 最小值为 1，则 $a=\frac{20}{27}$

11. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，$f\left(xy\right)=y^2f\left(x\right)+x^2f\left(y\right)$，则（　　）

A. $f\left(0\right)=0$　　B. $f\left(-1\right)=-1$

C. $f\left(x\right)$ 为偶函数　　D. 若 $f\left(2\right)=\frac{1}{2}$，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{32}$

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是偶函数

B. 函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\cos x$与坐标轴有且仅有两个交点

C. 函数$g\left(x\right)=\ln f\left(x\right)$的零点大于$-\dfrac{2}{5}$

D. 函数$h\left(x\right)=f\left(\sin x\right)$有无数个零点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若角θ的终边与角$\dfrac{6\pi}{7}$的终边相同，则在$[\pi,2\pi)$内与角$\dfrac{\theta}{3}$的终边相同的角是______.

14. 若函数$f(x)=\sqrt{7+ax-x^2}$在区间$\left[-1,1\right]$上单调递减，则实数a的取值范围为______.

15. 已知$a>b>0$，则$2a^2+\dfrac{1}{(a-b)b}$的最小值是__________.

16. 已知$f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\ln x\right|+2, x>0\\ 3-x^2, x\le 0\end{cases}$，若$f\left(f\left(x\right)\right)=a$只有 5 个不同的实根，则实数 a 的取值范围是___________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 72 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知集合$A=\left\{x\left|x^2-4x-12\le 0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|a-1<x\le 3a+2\right.\right\}$.

（1）当$a=1$时，求$A\cap\left(\complement_{R}B\right)$；

（2）若$A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

18. 计算题：

（1）已知$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求$\dfrac{\sin\left(\pi+\alpha\right)+2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(3\pi-\alpha\right)+1}$的值；

（2）$\lg 5^2+\dfrac{2}{3}\lg 8+\lg 5\cdot\lg 20+\left(\lg 2\right)^2$；

（3）已知$\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求$\log_{36}45$(用a，b表示).

19. 对于二次函数$y=mx^2+nx+t(m\ne 0)$，若存在$x_0\in\mathrm{R}$，使得$mx_0^2+nx_0+t=x_0$成立，则称x_0为二次函数$y=mx^2+nx+t(m\ne 0)$的不动点.

（1）求二次函数$y=x^2-x-3$的不动点；

（2）若二次函数$y=2x^2-\left(2+a\right)x+a-1$有两个不相等的不动点$x_1$、$x_2$，且$x_1$、$x_2>0$，求$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$的最小值.

20. 已知非常数函数$f(x)$的定义域为R，如果存在正数T，使得$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(x+T)=Tf(x)$恒成立，则称函数$f(x)$具有性质T.

（1）判断下列函数是否具有性质T？并说明理由；

① $f_1(x)=2x-1$；② $f_2(x)=\cos(2\pi x+1)$．

（2）若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0)$ 具有性质 T，求 ω 的最小值；

21. 已知函数 $f(x)=\log_2\left(4^x+1\right)+ax+m$ 是定义在 R 上的偶函数．

（1）求实数 a 的值；

（2）记 $D=\left[-1,\log_2(4+\sqrt{15})\right]$，

①当 $x\in D$ 时，求 $f(x)$ 的值域（用 m 表示）；

②若存在 r，s，$t\in D$，使得 $f(r)+f(s)=f(t)$，求实数 m 的范围．

22. 在数学中，双曲函数是一类与常见的三角函数类似的函数，最基本的双曲函数是双曲正弦函数和双曲余弦函数（历史上著名的"悬链线问题"与之相关）．记双曲正弦函数为 $f(x)$，双曲余弦函数为 $g(x)$，已知这两个最基本的双曲函数具有如下性质：

①定义域均为 R，且 $f(x)$ 在 R 上是增函数；

② $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数；

③ $f\left(x\right)+g\left(x\right)=e^x$（常数 e 是自然对数的底数，$e=2.71828\cdots$）．

利用上述性质，解决以下问题：

（1）求双曲正弦函数和双曲余弦函数的解析式；

（2）求函数 $y=g\left(2x\right)-2f\left(x\right)$，$x\in\left[0,\ln 2\right]$ 的值域；

（3）设 $h\left(x\right)=\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)-1\right]+m\left[g(x)-f(x)-1\right]$，若对任意的正数 x_1，x_2，都有 $h\left(x_1\right)>0$，$h\left(x_2\right)>0$，且 $h\left(x_1+x_2\right)>h\left(x_1\right)+h\left(x_2\right)$，求实数 m 的取值范围．

江苏省启东中学 2023-2024 学年度高一创新班第一学期第一次月考

(数学)

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边过点$A\left(\sin\dfrac{\pi}{3},\tan\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$\tan\alpha=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角函数的定义求得正确答案.

【详解】依题意，$A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，所以$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$.

故选：D

2. 已知命题p：$\forall x\in[-4,2]$，$\dfrac{1}{2}x^2-a\geq 0$，则p为真命题的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a\leq -2$　　B. $a\leq 0$　　C. $a\leq 8$　　D. $a\leq 16$

【答案】A

【解析】

【分析】先分离参数求出a的取值范围，则p为真命题的一个充分不必要条件应该是$(-\infty,0]$的一个真子集，即可得出答案.

【详解】由题设命题为真，即$a\leq\dfrac{1}{2}x^2$在$x\in[-4,2]$上恒成立，

所以$a\leq\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)_{\min}=0$，

则p为真命题的一个充分不必要条件应该是$(-\infty,0]$的一个真子集，

故选：A.

3. 已知$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\sin(\pi+\alpha)=$（　　）

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

【答案】D

【解析】

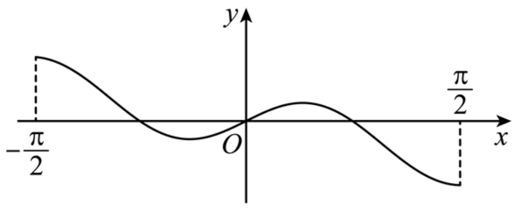
【分析】利用诱导公式求出$\cos\alpha$，即可求出$\sin\alpha$，最后由诱导公式计算可得.

【详解】$\because \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$，

$\therefore \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

故选：D.

4. 下列四个函数中的某个函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的大致图象如图所示，则该函数是（　　）



A. $y=\frac{x^3-x}{2^x+2^{-x}}$　　B. $y=\frac{x\cos 2x}{2^x+2^{-x}}$　　C. $y=\frac{1-x^2}{2^x+2^{-x}}$　　D. $y=\frac{\sin 2x}{2^x+2^{-x}}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用题给函数在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上先正值后负值的变化情况排除选项A；利用题给图象可知函数是奇函数排除选项C；利用当$x=\frac{\pi}{2}$时题给函数值为负值排除 D；而选项 B 均符合以上要求.

【详解】当$0<x<1$时，$x^3-x<0$，$y=\frac{x^3-x}{2^x+2^{-x}}<0$.排除 A；

由偶函数定义可得$y=\frac{1-x^2}{2^x+2^{-x}}$为偶函数，由题给图象可知函数是奇函数，排除 C；

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$y=\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}{2^{\frac{\pi}{2}}+2^{-\frac{\pi}{2}}}=0$.排除 D；

$y=\frac{x\cos 2x}{2^x+2^{-x}}$为奇函数，且当$0<x<\frac{\pi}{4}$时，$y=\frac{x\cos 2x}{2^x+2^{-x}}>0$，

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$y=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}{2^{\frac{\pi}{2}}+2^{-\frac{\pi}{2}}}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{2^{\frac{\pi}{2}}+2^{-\frac{\pi}{2}}}<0$.B 均符合题给特征.

故选：B.

5. 函数$f\left(x\right)=6\sin x\cos x-2\cos x-3\sin x+1$在$\left[0,2\pi\right]$上的零点个数为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】令 $f\left(x\right)=0$，解得 $\sin x=\dfrac{1}{3}$ 或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$，结合正、余弦函数即可得结果.

【详解】由题意可得：$f\left(x\right)=6\sin x\cos x-2\cos x-3\sin x+1=\left(2\cos x-1\right)\left(3\sin x-1\right)$，

令 $f\left(x\right)=0$，解得 $\sin x=\dfrac{1}{3}$ 或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$，

又因为 $x\in\left[0,2\pi\right]$ 时，由正、余弦函数可知 $\sin x=\dfrac{1}{3}$、$\cos x=\dfrac{1}{2}$ 分别有两解.

综上所述：函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上的零点个数为 4.

故选：C.

6. 已知 a,b 均为 正实数，若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2},a^b=b^a$，则 $\dfrac{a}{b}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 2 或 $\dfrac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】令 $t=\log_a b$，则由 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$ 可得 $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$，从而可求出 t 的值，再结合 $a^b=b^a$ 可求得结果.

【详解】令 $t=\log_a b$，则 $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$，

所以 $2t^2-5t+2=0$，解得 $t=\dfrac{1}{2}$ 或 $t=2$，

所以 $\log_a b=\dfrac{1}{2}$ 或 $\log_a b=2$，

所以 $a^{\frac{1}{2}}=b$ 或 $a^2=b$，

因为 $a^b=b^a$，所以 $\left(b^2\right)^b=b^{2b}=b^a$ 或 $a^b=a^{2a}$，

所以 $2b=a$ 或 $b=2a$，

所以 $\dfrac{a}{b}=2$ 或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$，

故选：D

7. 若存在实数 m，使得 $\log_a 4<m<2^{a-1}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　B. $\left(0,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$　　　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(2,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意存在实数m，使得$\log_a 4<m<2^{a-1}$，则满足$2^{a-1}>\log_a 4$，然后对参数a进行分类讨论即可解决.

【详解】依题意可知，$2^{a-1}>\log_a 4$；

当$0<a<1$时，$\log_a 4<0<2^{a-1}$，显然成立；

当$a>1$时，由$2^{a-1}-\log_a 4=2^{a-1}-\frac{\ln 4}{\ln a}$，

令$f(x)=2^{x-1}-\frac{\ln 4}{\ln x}$，

由$y=2^{x-1},y=-\frac{\ln 4}{\ln x}$在$(1,+\infty)$为递增函数，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$为递增函数，且$f(2)=0$，

因此$f(a)>0=f(2)$，即$a>2$，

综上可知$a\in(0,1)\cup(2,+\infty)$.

故选：B.

8. 对非空有限数集$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$定义运算“min”：min$A$表示集合A中的最小元素. 现给定两个非空有限数集A，B，定义集合$M=\{x|x=|a-b|,a\in A,b\in B\}$，我们称min$M$为集合$A$，$B$之间的“距离”，记为$d_{AB}$. 现有如下四个命题：

①若$\min A=\min B$，则$d_{AB}=0$；　②若$\min A>\min B$，则$d_{AB}>0$；

③若$d_{AB}=0$，则$A\cap B\neq\varnothing$；　④对任意有限集合A，B，C，均有$d_{AB}+d_{BC}\geq d_{AC}$.

其中，真命题的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据题中条件可得①③正确，通过举反例可得②④错误.

【详解】对于①，若$\min A=\min B$，则A，B中最小的元素相同，则$d_{AB}=0$，故①为真命题；

对于②，取集合$A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，满足$\min A>\min B$，而$d_{AB}=0$，故②为假命题；

对于③，若 $d_{AB}=0$，则 A，B 中存在相同的元素，所以交集非空集，故③为真命题；

对于④，取集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3,4\}$，可知 $d_{AB}=0$，$d_{BC}=0$，$d_{AC}=1$，

则 $d_{AB}+d_{BC}\geq d_{AC}$ 不成立，故④为假命题.

综上，真命题的个数为 2 个.

故选：B

二、多选题 本题共 4 小题，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列结论中正确的是（　　）

A. $120°=\frac{2\pi}{3}$

B. 若角 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha<0$

C. 若角 α 的终边过点 $P(3k,4k)(k\neq 0),\sin\alpha=\frac{4}{5}$

D. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用角度值与弧度制的互化可判断 A；利用三角函数的象限符号可判断 B；利用三角函数的定义可判断 C；利用同角三角函数的基本关系可判断 D.

【详解】对于 A，$120^{\circ}=120°\times\frac{\pi}{180°}=\frac{2\pi}{3}$，故 A 正确；

对于 B，由三角函数的象限符号可知，若 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha<0$，故 B 正确；

对于 C，角 α 的终边过点 $P(3k,4k)(k\neq 0)$，

则 $\sin\alpha=\frac{4k}{\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}}=\frac{4k}{5|k|}=\pm\frac{4}{5}$，故 C 错误；

对于 D，$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1$，故 D 正确.

故选：ABD.

10. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(ax^2-3ax+2\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(x)$ 值域为 R，则 $a\geq\frac{8}{9}$　　　　B. 若 $f(x)$ 定义域为 R，则 $a\in\left(0,\frac{8}{9}\right)$

C. 若 $f\left(x\right)$ 最大值为 0，则 $a=\frac{4}{9}$

D. 若 $f\left(x\right)$ 最小值为 1，则 $a=\frac{20}{27}$

【答案】AC

【解析】

【分析】结合对数函数的单调性和二次函数的性质逐项分析判断；

【详解】选项 A：$f\left(x\right)$ 值域为 R，说明函数 $y=ax^2-3ax+2$ 能取到所有大于 0 的数，

当 $a=0$ 时，$ax^2-3ax+2=2,$ 不满足；

当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases}a>0\\ \Delta=9a^2-8a\geq 0\end{cases}$，解得：$a\geq\frac{8}{9}$，选项正确；

选项 B：当 $f\left(x\right)$ 定义域为 R 时，函数 $y=ax^2-3ax+2>0$ 恒成立，

当 $a=0$ 时，$ax^2-3ax+2=2$ 恒成立；

当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases}a>0\\ \Delta=9a^2-8a<0\end{cases}$，解得：$a\in\left(0,\frac{8}{9}\right)$，

综上，$a\in\left[0,\frac{8}{9}\right)$，选项错误；

选项 C：若 $f\left(x\right)$ 最大值为 0，即 $y=ax^2-3ax+2$ 的最小值为1，

故有 $\begin{cases}a>0\\ \frac{8a-9a^2}{4a}=1\end{cases}$，解得：$a=\frac{4}{9}$，选项正确；

选项 D：若 $f\left(x\right)$ 最小值为 1，即 $y=ax^2-3ax+2$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$，

则有 $\begin{cases}a<0\\ \frac{8a-9a^2}{4a}=\frac{1}{3}\end{cases}$，无解，选项错误；

故选：AC.

11. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，$f\left(xy\right)=y^2f\left(x\right)+x^2f\left(y\right)$，则（　　）

A. $f\left(0\right)=0$

B. $f\left(-1\right)=-1$

C. $f\left(x\right)$ 为偶函数

D. 若 $f\left(2\right)=\frac{1}{2}$，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{32}$

【答案】ACD

【解析】