.在泰勒中值定理证明不等式的应用中，给出了泰勒公式中展开点选取的 几种情况：区间的中点、已知区间的两端点、函数的极值点或最值点、已知区间 的任意点.同时对各种情况的运用范围和特点作了说明，以便更好的运用泰勒中 值定理证明不等式.并对柯西中值定理和积分中值定理在证明不等式过程中的应 用问题作简单介绍•

关键词：拉格朗日中值定理；泰勒公式；柯西中值定理；积分中值定理；不等式

Abstract

This paper idea wrote in in equality proof of use freque ntly duri ng several of the mea n value theorem, which in the Lagra nge mea n value theorem proving in equality in the application of the three methods to speak: direct formula method, variable value method, the method to con struct auxiliary fun ctio n. in the applicati on of proof in equalities of the Taylor mea n value theorem , which gave Taylor formula on the point in several ways: the point of the interval, the interval of two known extreme, the fun cti on extreme value point or the most value point, the in terval of known at any point. And the application range of of all kinds of situation and characteristics that were explained, in order to better use Taylor of the mean value theorem to testify in equality. And Cauchy mid-value theorem and in tegral mea n value theorem in the applicati on process to prove the in equality were briefly discussed

Key words :The Lagrange Mean Value Theorerp Taylor's Formula: Cauchy Mean Value Theorem ; In equality; The Mean Value Theorem for In tegrals

1 引言

不等式也是数学中的重要内容，也是数学中重要方法和工具 .中值定理包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理及泰勒中值定理以及积分中值定理 等.以拉格朗日中值定理（也称微分中值定理）为中心，介值定理是中值定理的前 奏，罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形， 而柯西中值定理、泰勒中值定理 及定积分中值

.利用中值定理证明不等式，是比较常见和实用 的方法.

人们对中值定理的研究，从微积分建立之后就开始了以罗尔定理， 拉格朗日 中值定理和柯西中值定理组成的一组中值定理是整个微分学的理论基础， 它们建立了函数值与导数值之间的定量联系，中值定理的主要作用在于理论分析和证 明；应用导数判断函数上升、下降、取极值、凹形、凸形和拐点等项的重要性态.此外，在极值问题中有重要的实际应用.微分中值定理是数学分析乃至整个高等 数学的重要理论，它架起了利用微分研究函数的桥梁.微分中值定理从诞生到现 在的近 300 年间，对它的研究时有出现.特别是近十年来，我国对中值定理的新 证明进行了研究，仅在国内发表的文章就近 60 篇.

不等式的证明不仅形式多种多样，而且证明方式多变，常见的方法有：利用 函数的单调性证明，利用微分中值定理证明，利用函数的极值或最值证明等，在 众多方法中，利用中值定理证明不等式比较困难，无从下手，探究其原因，一是 中值定理的内容本身难理解，二是证明不等式，需要因式而变，对中值定理的基 础及灵活性要求较高.我们在日常教学中常常遇到不等式的证明问题，不等式是 初等数学中最基本的内容之一，我们有必要把这类问题单独拿出来进行研究， 找 出它们的共性，以方便我们日后的教学研究工作的开展 .

2 拉格朗日中值定理在不等式证明中的应用

2.1拉格朗日中值定理

拉格朗日（J.L.Lagrange， 1736-1813 ，法国数学家，力学家，文学家）• 拉格朗日中值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 [a,b] 上连续，在开区间 (a,b) 内可 导，则在开区间（a,b）内至少存在一点 x_0，使得

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a). \qquad (2)$$

拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广，即罗尔定理是拉格朗日定理当 $f(a)=f(b)$ 时的特殊情形.拉格朗日定理中，由于 $a<x_0<b$，因而可将 x_0 表示为

$$x_0=a+\theta(b-a), \qquad 0<\theta<1.$$

这样（1）式还可表示为

$$f\ b A\ f\ a\ f'b-a\ 1,\quad 0:::\ \lceil :\ 1. \qquad (3)$$

若令 $b = a -,h$ 则有

$$f\ a\ h - f\ a二\ f'\ a\ h,\ 0:::\ 八 :1. \qquad (4)$$

一般称式（1）、（2）、（3）、（4）式为拉格朗日公式.

2.2利用拉格朗日中值定理证明不等式

2.2.1　直接公式法

例2.1证明不等式 $si\ n\hat{}-si\ nx_1\hat{}|-x_2$ 成立.

分析首先要构造一个辅助函数 $f\ x$; a由欲证形式构成“形似”的函数区 间.b运用拉格朗日公式来判断.

证明 设 $f\ x=sinx, x = 【X1,X2$.由拉格朗日公式（2）可得

$$\sin x_1 - \sin x_2 二\ f(7)【论\lceil x_2,\ ;::= .x_1, x_2.$$

等式两边同取绝对值，则有

$$\sin 捲一 \sin x_2| =|\ f(’§\ i■ x_1 - x_2.$$

而

$$f3) = \sin’ x£ x\ |\cos §.$$

又因为 因此，就得到 cos:.

$$\sin x_1 -$$

$$\sin_{x\hat{}<} x_1 - x_2.$$

证毕.

评注 此题如果单纯地应用初等数学的方法来证明，会难以得出结论，而应 用了拉格朗日公式，再利用三角函数的简单知识，问题就游刃而解了•

例 2.2证明不等式 $arcta\ nx_2-arcta\ nx_2 j x X_i,\ (X_2 X_i)$ 成立.

分析此题利用反三角函数的有关知识，构造一个辅助函数 $f\ x二\ arctanx$，再利用拉格朗日中值定理就可以轻轻松松地解出此题•

证明 设 $f\ x二\ arcta\ nx\ f\ x$ 在 $l x_1,\ x_2$ 上满足拉格朗日定理的全部条件，因 此有

$$arctanx_2\_arctan\hat{} = \frac{1}{1 + x_o^2}(x_? - X_i),\qquad X o\ E(X_i, X2).$$

1，可得
1 x_2

arctan x_2—arctan捲 虫 X_2 -

例 2.3[3]证明 pb^p °(a - b) ： a^p —b^p ::pa^p ’a-b,(p 1,a-b 0).

证明 设函数，f(x)=x，贝U，f (a) - f二(b)p - b . 不难看出 f (x)在区间

b, a上满足拉格朗日定理条件，于是存在 =「b,a】，使

f(a)-f(b)=(a-b).f’()

由于 f’ x二 px^p」，所以 f’(工 pl，上式为

a b (a-b)p p4.

因为 x^p 当 p 1时为单调增函数，b ： ： ： 「： ： a，所以

b p「「 p-1 ： ： ： a^{p-1} .

两边同时乘以 p a -b 则得

pb pj(a _ b厂： p p/(a _ b) pa^p 上(a _ b)

pb^p」(a - b) ： a^p - b： ： pa^p」(a - b)， 证毕.

2.2.2 变量取值法

例 2.4证明不等式 口 :： : ln b :： : * 成立，其中 b . a . 0 .
b a a

分析（1）根据题中式子构造一个相似函数， f x = In和定义区间 a,b.

（2）利用对数的四则运算法则，将对数式整理成拉格朗日中值定理所 满足的形式，从而得出结论.

证明设 fx=l nx ia,b.

由拉格朗日公式（3），则有

ln b “nblna
a a b - a (1)

由不等式 0 ：「 ： ： ： 1，可推得

b- a b - a b-a

a : : : a b - a :v : : b及 .

b a+（b-a）日 a

代入（1），

即 b—a: : : | n: : : b-a. 证毕.

b a a

评注 解此题关键在于观察要证明的不等式中把对数式 In 拆开成

a

In b-lna 再利用拉格朗日的公式来轻松地得出结论.

例 2.4证明不等式 —<ln 1• h:: : h 对一切 h -1, h = 0成立. 1+h

分析 此题首先利用对数的有关知识，构造了一个辅助函数 lnx,再利用拉格朗日中值定理解出此题.

证明 由拉格朗日公式（4），令 a=1， f（x） = 1 nx则有

(1)

当 h 0时，由不等式 0 心<1 ，可推得

仁: 1 t h: : : 1 h及 ::: :: :h . (2)

1+h 1 +0 h

当」: h : : : 0 时，由不等式 0 <1，可知

1 *1 • v h■? -jh ■?0 .

由于 h 0,可推(2)式成立，将(2)式代入(1)式，就可知不等式成立.评注 证明此种不等式的关键是构造一个辅助函数，再利用初等数学的有关 知识来证明不等式.

例 2.5证明若 x = 0，则 e^x 1 x.

证明 令 f(x)=e^x，贝U f(x)在 R 上连续、可导，且 f’(x)=e^x.

情形一当 x 0时，由拉格朗日定理知--(0, x)使

e^x「e° 二e (x-0).

整理有 e^x =e x.因为 e • 1 所以有 e^x x .

情形二 当 x : : : 0 时，由拉格朗日中值定理知 -(x, 0)，使

e^0 -e^x = e (0-x).

整理有 e^x =xe .因为此时 0 ::: e : : 1，三边同时乘以 x， 0 xe x所以 e^x x 成立.

$x=0$时，e^x x成立.

从以上例题可以发现：灵活构造“ a,b ”的取值，不仅可使证明过程简单，有时甚至是解题的关键.

2.2.3辅助函数构造法

例 2.6[4]设函数 f(x在 a,b上连续，在 a,b内可导，又 f (x不为形如 Ax + B 的函数.证明至少存在一点© (aw^c b)，使 f’©() > $\frac{—.}{b — a}$

证明做辅导函数

$$g(x) = f(a) \frac{f(?\_f(a)}{b—a}(x\_a),$$

则 g x为形如 Ax B 的函数.

因为 f (x不为形如 Ax B 的函数，所以至少存在一点(a,b)，使

$f(c) = g(c)$ 但 $f(a)$ 二 $g(a)$, $f(b)$ 二 $g(b)$.

情形一 $f(c)$ $g(c)$ 此时

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{g(c)-g(a)}{c-a} \frac{f(a) \text{ 常；}(\text{"}(c-a) \quad f(a)}{c-a} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

因为 a, c 上 a, b], 所以由中值定理知 齐 (a, c), 使

$$f'_1() \quad \frac{f(C)-f(a)}{}$$

从而有

$$f'_1() \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

情形二 $f(c)$ $g(c)$ 此时

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \quad \frac{g(b)-g(c)}{b-c} \qquad \frac{f(b \ulcorner f(a) \hat{f}(c-a)}{b-a} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

即

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

因为 c, b1 a, b，所以由拉格朗日中值定理， 2 (c, b) 使得

$$f'_2 \text{ 小二 } \frac{c}{b-c},$$

从而有

$$fS \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

综上所述，在 a, b 内至少有一点•使原式成立 . 证毕.

许多证明题都不能直接应用定理进行证明. 利用拉格朗日中值定理证明问题 时，如何构造辅助函数，是证明的关键•

3 泰勒中值定理在不等式证明中的应用

3.1 泰勒中值定理

泰勒中值定理 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_o 的开区间 a, b 内有直到 n 1 阶导数，

则对任一点 X_o - (a, b)，有

$$f(x) = f_o(X) + f'(X_o)(x-X_o) + \frac{f''(X_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(X_o)}{n!}(x-X_o)^n + \frac{f^{(n+1)}(?)}{}(X-X_o) \text{ 计}$$

$(n+1)!$

其中■是 X_o 与 x 之间的某个值，上式称为 f (x)按 (x-x。) 的幂展开的 n 阶泰勒

公式•下面就泰勒中值定理中函数展开点 x. (a, b)的不同情况来证明不等式.

3.2利用泰勒公式证明不等式

3.2.1　中点取值法

选区间中点展开是较常见的一种情况，然后在泰勒公式中取　x 为适当的值，通过两式相加，并对某些项进行放缩，便可将多余的项去掉而得所要的不等式 下面以实例说明.

例 3.1同设在区间 a, b 内，f''(x)> 0试证：对于 a, b 内的任意两个不同 点 X_1 和 X_2，有

$$f(7)\_ \frac{f(X_1)+f(X_2)}{2} . \quad 2$$

证明将 f(x)分别在 a 及 b 处展开，得

$$f(x)=f(X。)+f'(X。)(x-x。)+\frac{f''}{2!}(x-x。)^2,$$

其中•是 X_o 与 X 之间的某个值.

上式中分别取 $X=X_1$ 及 X_2，

$$f(X_1)=f(X。)+f'(X_1-X。)+\frac{f}{2!}(X_1-X。)^2 \quad (X_1, X。);$$

$$f X_2 = f X。 \quad f' X_o X_2 -X。 \frac{}{2!} \quad X_2 -X。_2, \quad X°, X_2 .$$

上面两式相加，得

$$f(X_1)+f(X_2)=2 f (x)+ \frac{f'_1}{2!} - x。 + \frac{f'_2}{2!}(x2 - x).$$

因为 f''(x)。，所以，f捲•f X_2 2f X。，即

上 $_1$+X $_2$　　f(X $_1$)户 f(X2)

f --.

2 2

注(1)若题中条件“ f''(x)0 ”改为“ f''(x)<0 ，而其余条件不变，则结论改为

f 上 $_1$+X $_2$]　　f(X1)+f(X2)

[2 广 2　　.

(2) 若例 1 的条件不变，则结论可推广如下:

对 a,b 内任意 n 个不同点　X $_1$,X $_2$ ■.,xn 及' $_{-1}$,　　,　　…; $_H$ (0,1)且 7, $_1$ =1，有

n

i=1

f /n　　)n

z 人 Xi　　f(Xj

2　　丿 y

a + b

例 3.2设函数 f(x在区间 [a，b] 上二阶连续可导，且 f(—^=0，证明

a

b f x dx　　兰 M (b — a),其中 M =max　f''.x

24　　a 童兰

a + b

证明　将 f(x在 x。二口处展开，得

2

fX =f 0 fX0 lx　　　f 2! x-X $_0$) $_2$.

其中•是　X 。与 x 之间的某个值.

因为 f(*0，所以有

f (£)f x

二 f ' X X - X　　　(x -X $_0$ 2，

2!

上式在 a,b 作定积分，然后取绝对值

a

(f(x dX　　b_

ME″″

b　　　算 x-xA》®.

X $_0$

[fx(x l务—

3.2.2 端点取值法

当条件中出现 f'(a) = f'(b) = 0，而欲证式中出现 f(a), f(b), f''(ξ) 时，展开点常选为区间两端点 a, b，然后在泰勒公式中取 x 为适当的值，消去多余的项，可得待证的不等式•

例 3.3 函数 f(x) 在区间 [a，b] 上二阶可导，且 f'(a) = f'(b) = 0，证明：在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi) \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明将 f(x) 分别在 a 及 b 处展开，得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2,\ \xi_1 \in (a,x);$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2,\ \xi_2 \in (x,b).$$

上面两式中取 $x=\frac{a+b}{2}$，

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2;$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

上面两式相减，并由 f'(a) = f'(b) = 0 得

$$f(b)-f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}\left(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right) \leq \frac{(b-a)^2}{8}\left(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|\right).$$

记

$$|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}.$$

其中，$\xi=\xi_1$ 或 ξ_2.

于是，有

$$|f(b)-f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|，即\ |f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

3.2.3 极值取值法

当题中不等式出现函数的极值或最值项，展开点常选为该函数的极值点或最值点•

例 3.4 设函数 f(x) 在区间 a, b 内二阶可导，且存在极值 f(c) 及点