专题05 几何压轴题

1．（2021•扬州）在一次数学探究活动中，李老师设计了一份活动单：

已知线段 $BC=2$，使用作图工具作 $\angle BAC=30^{\circ}$，尝试操作后思考： （1）这样的点 A 唯一吗？ （2）点 A 的位置有什么特征？你有什么感悟？

“追梦”学习小组通过操作、观察、讨论后汇报：点 A 的位置不唯一，它在以 BC 为弦的圆弧上（点 B、C 除外），…．小华同学画出了符合要求的一条圆弧（如图1）．

（1）小华同学提出了下列问题，请你帮助解决．

①该弧所在圆的半径长为 ______；

② ΔABC 面积的最大值为 ______；

（2）经过比对发现，小明同学所画的角的顶点不在小华所画的圆弧上，而在如图1所示的弓形内部，我们记为 A'，请你利用图1证明 $\angle BA'C>30^{\circ}$．

（3）请你运用所学知识，结合以上活动经验，解决问题：如图2，已知矩形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$，$BC=3$，点 P 在直线 CD 的左侧，且 $\tan\angle DPC=\frac{4}{3}$．

①线段 PB 长的最小值为 ______；

②若 $S_{\Delta PCD}=\frac{2}{3}S_{\Delta PAD}$，则线段 PD 长为 ______．

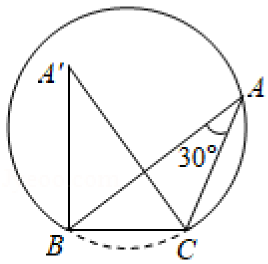


图1

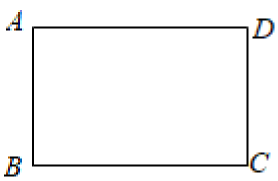


图2

备用图

【答案】（1）①2；②$\sqrt{3}+2$；（2）见解析；（3）①$\frac{\sqrt{97}-5}{4}$；②$\frac{7\sqrt{2}}{4}$

【详解】（1）①设 O 为圆心，连接 BO，CO，

$\because\angle BCA=30^{\circ}$，

$\therefore\angle BOC=60^{\circ}$，又 $OB=OC$，

$\therefore\Delta OBC$ 是等边三角形，

$\therefore OB = OC = BC = 2$，即半径为 2；

②$\because \Delta ABC$ 以 BC 为底边，$BC = 2$，

$\therefore$ 当点 A 到 BC 的距离最大时，ΔABC 的面积最大，

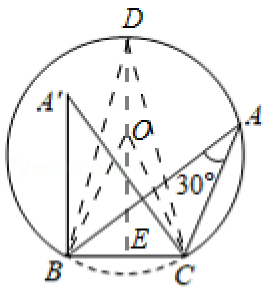
如图，过点 O 作 BC 的垂线，垂足为 E，延长 EO，交圆于 D，

$\therefore BE = CE = 1$，$DO = BO = 2$，

$\therefore OE = \sqrt{BO^2 - BE^2} = \sqrt{3}$，

$\therefore DE = \sqrt{3} + 2$，

$\therefore \Delta ABC$ 的最大面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{3} + 2) = \sqrt{3} + 2$；



（2）如图，延长 BA'，交圆于点 D，连接 CD，

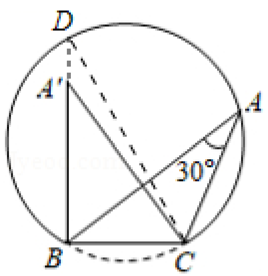
$\because$ 点 D 在圆上，

$\therefore \angle BDC = \angle BAC$，

$\because \angle BA'C = \angle BDC + \angle A'CD$，

$\therefore \angle BA'C > \angle BDC$，

$\therefore \angle BA'C > \angle BAC$，即 $\angle BA'C > 30°$；



（3）①如图，当点 P 在 BC 上，且 $PC = \frac{3}{2}$ 时，

$\because \angle PCD = 90°$，$AB = CD = 2$，$AD = BC = 3$，

$\therefore \tan \angle DPC = \frac{CD}{PC} = \frac{4}{3}$，为定值，

连接 PD，设点 Q 为 PD 中点，以点 Q 为圆心，$\frac{1}{2} PD$ 为半径画圆，

$\therefore$ 当点 P 在优弧 CPD 上时，$\tan\angle DPC=\frac{4}{3}$，连接 BQ，与圆 Q 交于 P'，

此时 BP' 即为 BP 的最小值，过点 Q 作 $QE\perp BE$，垂足为 E，

$\because$ 点 Q 是 PD 中点，

$\therefore$ 点 E 为 PC 中点，即 $QE=\frac{1}{2}CD=1$，$PE=CE=\frac{1}{2}PC=\frac{3}{4}$，

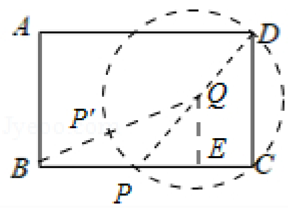
$\therefore BE=BC-CE=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$，

$\therefore BQ=\sqrt{BE^2+QE^2}=\frac{\sqrt{97}}{4}$，

$\because PD=\sqrt{CD^2+PC^2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 圆 Q 的半径为 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$，

$\therefore BP'=BQ-P'Q=\frac{\sqrt{97}-5}{4}$，即 BP 的最小值为 $\frac{\sqrt{97}-5}{4}$；



②$\because AD=3$，$CD=2$，$S_{\Delta PCD}=\frac{2}{3}S_{\Delta PAD}$，

则 $\frac{CD}{AD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \Delta PAD$ 中 AD 边上的高 $=\Delta PCD$ 中 CD 边上的高，

即点 P 到 AD 的距离和点 P 到 CD 的距离相等，

则点 P 到 AD 和 CD 的距离相等，即点 P 在 $\angle ADC$ 的平分线上，如图，

过点 C 作 $CF\perp PD$，垂足为 F，

$\because PD$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADP=\angle CDP=45°$，

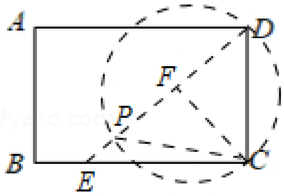
$\therefore \Delta CDF$ 为等腰直角三角形，又 $CD=2$，

$\therefore CF=DF=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

$\because \tan\angle DPC=\frac{CF}{PF}=\frac{4}{3}$，

$\therefore PF=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore PD=DF+PF=\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$.



2．（2020•扬州）如图 1，已知点 O 在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，且 $OA=OB=OC=OD=2$，OC 平分 $\angle BOD$，与 BD 交于点 G，AC 分别与 BD、OD 交于点 E、F．

（1）求证：$OC//AD$；

（2）如图 2，若 $DE=DF$，求 $\frac{AE}{AF}$ 的值；

（3）当四边形 $ABCD$ 的周长取最大值时，求 $\frac{DE}{DF}$ 的值．

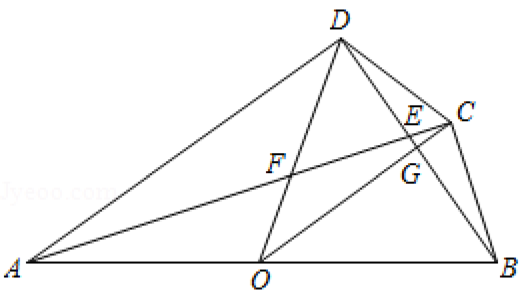


图1

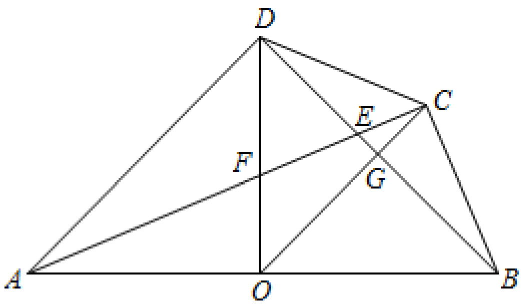


图2

【答案】（1）见解析；（2）$\sqrt{2}$；（3）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【详解】（1）证明：$\because AO=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ADO$，

$\because OC$ 平分 $\angle BOD$，

$\therefore \angle DOC=\angle COB$，

又 $\because \angle DOC+\angle COB=\angle OAD+\angle ADO$，

$\therefore \angle ADO=\angle DOC$，

$\therefore CO//AD$；

（2）解：如图 1，

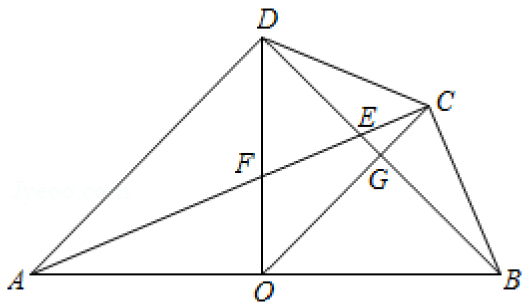


图1

$\because OA = OB = OD$，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$，

设 $\angle DAC = \alpha$， 则 $\angle ACO = \angle DAC = \alpha$．

$\because OA = OD$， $DA//OC$，

$\therefore \angle ODA = \angle OAD = 2\alpha$，

$\therefore \angle DFE = 3\alpha$，

$\because DF = DE$，

$\therefore \angle DEF = \angle DFE = 3\alpha$，

$\therefore 4\alpha = 90^\circ$，

$\therefore \alpha = 22.5^\circ$，

$\therefore \angle DAO = 45^\circ$，

$\therefore \Delta AOD$ 和 ΔABD 为等腰直角三角形，

$\therefore AD = \sqrt{2}AO$，

$\therefore \dfrac{AD}{AO} = \sqrt{2}$，

$\because DE = DF$，

$\therefore \angle DFE = \angle DEF$，

$\because \angle DFE = \angle AFO$，

$\therefore \angle AFO = \angle AED$，

又 $\angle ADE = \angle AOF = 90^\circ$，

$\therefore \Delta ADE \backsim \Delta AOF$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AD}{AO} = \sqrt{2}$．

（3）解：如图 2，

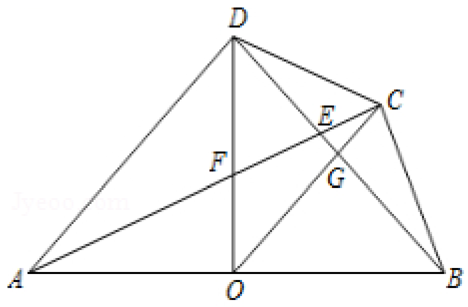


图2

$\because OD=OB$， $\angle BOC=\angle DOC$，

$\therefore \Delta BOC\cong \Delta DOC(SAS)$，

$\therefore BC=CD$，

设 $BC=CD=x$， $CG=m$， 则 $OG=2-m$，

$\because OB^{2}-OG^{2}=BC^{2}-CG^{2}$，

$\therefore 4-(2-m)^{2}=x^{2}-m^{2}$，

解得： $m=\frac{1}{4}x^{2}$，

$\therefore OG=2-\frac{1}{4}x^{2}$，

$\because OD=OB$， $\angle DOG=\angle BOG$，

$\therefore G$ 为 BD 的中点，

又 $\because O$ 为 AB 的中点，

$\therefore AD=2OG=4-\frac{1}{2}x^{2}$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $2BC+AD+AB=2x+4-\frac{1}{2}x^{2}+4=-\frac{1}{2}x^{2}+2x+8=-\frac{1}{2}(x-2)^{2}+10$，

$\because -\frac{1}{2}<0$，

$\therefore x=2$ 时，四边形 $ABCD$ 的周长有最大值为 10．

$\therefore BC=2$，

$\therefore \Delta BCO$ 为等边三角形，

$\therefore \angle BOC=60^{\circ}$，

$\because OC//AD$，

$\therefore \angle DAO=\angle COB=60^{\circ}$，

$\therefore \angle ADF=\angle DOC=60^{\circ}$， $\angle DAE=30^{\circ}$，

$\therefore \angle AFD = 90^{\circ}$，

$\therefore \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $DF = \dfrac{1}{2}DA$，

$\therefore \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

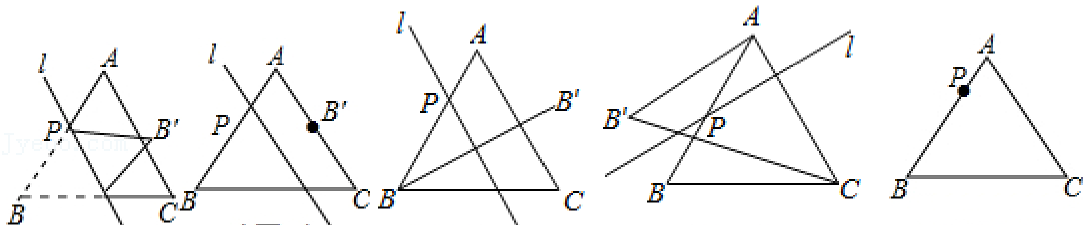
3．（2019•扬州）如图，已知等边ΔABC的边长为8，点P是AB边上的一个动点（与点A、B不重合）．直线l是经过点P的一条直线，把ΔABC沿直线l折叠，点B的对应点是点B'．

（1）如图1，当$PB=4$时，若点B'恰好在AC边上，则AB'的长度为 ____________；

（2）如图2，当$PB=5$时，若直线$l//AC$，则BB'的长度为 ____________；

（3）如图3，点P在AB边上运动过程中，若直线l始终垂直于AC，$\Delta ACB'$的面积是否变化？若变化，说明理由；若不变化，求出面积；

（4）当$PB=6$时，在直线l变化过程中，求$\Delta ACB'$面积的最大值．



（图1）（图2）（图3）（备用图）

【答案】（1）4或0；（2）$5\sqrt{3}$；（3）见解析；（4）$4\sqrt{3}+24$

【详解】（1）如图1中，

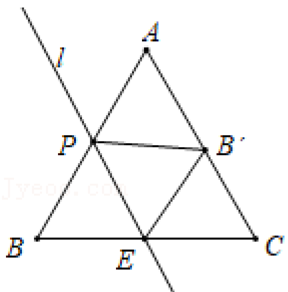


图1

$\because \Delta ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle A = 60^{\circ}$， $AB = BC = AC = 8$，

$\because PB = 4$，

$\therefore PB' = PB = PA = 4$，

$\because \angle A = 60^{\circ}$，

$\therefore \Delta APB'$是等边三角形，

$\therefore AB' = AP = 4$.

当直线 l 经过 C 时，点 B' 与 A 重合，此时 $AB' = 0$

（2）如图 2 中，设直线 l 交 BC 于点 E ．连接 BB' 交 PE 于 O .

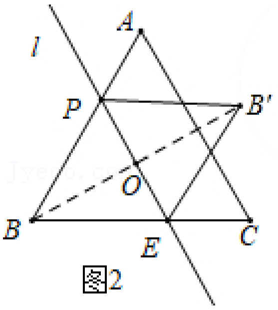


图2

$\because PE // AC$ ，

$\therefore \angle BPE = \angle A = 60°$ ， $\angle BEP = \angle C = 60°$ ，

$\therefore \Delta PEB$ 是等边三角形，

$\because PB = 5$ ，

$\therefore \because B$ ， B' 关于 PE 对称，

$\therefore BB' \perp PE$ ， $BB' = 2OB$

$\therefore OB = PB \cdot \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore BB' = 5\sqrt{3}$.

（3）如图 3 中，结论：面积不变.

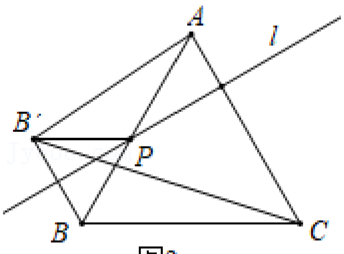


图3

$\because B$ ， B' 关于直线 l 对称，

$\therefore BB' \perp$ 直线 l ，

$\because$ 直线 $l \perp AC$ ，

$\therefore AC // BB'$ ，

$\therefore S_{\Delta ACB'} = S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 16\sqrt{3}$.

（4）如图 4 中，当 $B'P\perp AC$ 时，$\Delta ACB'$ 的面积最大，

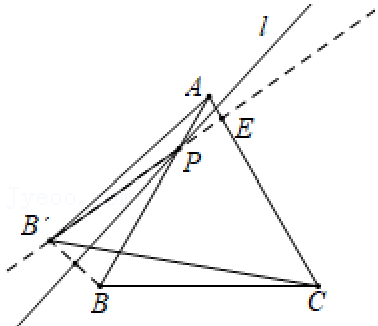


图4

设直线 PB' 交 AC 于 E，

在 RtΔAPE 中，$\because PA=2$，$\angle PAE=60^\circ$，

$\therefore PE=PA\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

$\therefore B'E=6+\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\Delta ACB'\text{的最大值}}=\frac{1}{2}\times 8\times\left(6+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+24$．

解法二：如图 5 中，过点 P 作 PH 垂直于 AC，

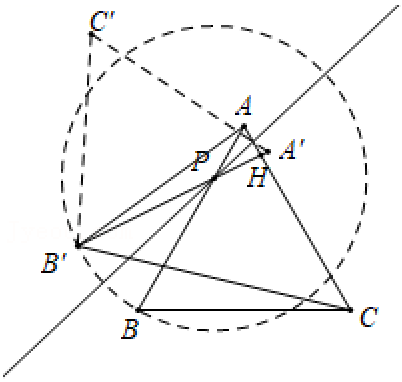


图5

由题意可得：B' 在以 P 为圆心半径长为 6 的圆上运动，

当 PH 的延长线交圆 P 于点 B' 时面积最大，

此时 $BH=6+\sqrt{3}$，$S_{\Delta ACB'\text{的最大值}}=\frac{1}{2}\times 8\times\left(6+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+24$．

4．（2019•扬州）如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=20$，$BC=10$，以 CD 为一边向矩形外部作等腰直角 ΔGDC，$\angle G=90^\circ$．点 M 在线段 AB 上，且 $AM=a$，点 P 沿折线 $AD-DG$ 运动，点 Q 沿折线 $BC-CG$ 运动（与点 G 不重合），在运动过程中始终保持线段 $PQ//AB$．设 PQ 与 AB 之间的距离为 x．

（1）若 $a=12$．

①如图 1，当点 P 在线段 AD 上时，若四边形 $AMQP$ 的面积为 48，则 x 的值为_____________；

②在运动过程中，求四边形 $AMQP$ 的最大面积；

（2）如图 2，若点 P 在线段 DG 上时，要使四边形 $AMQP$ 的面积始终不小于 50，求 a 的取值范围．

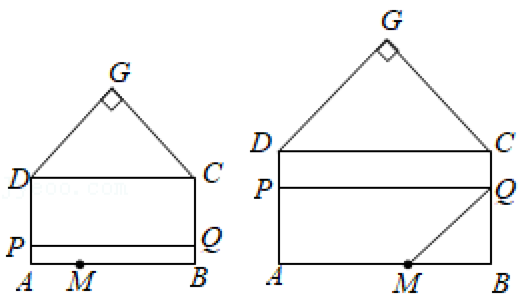
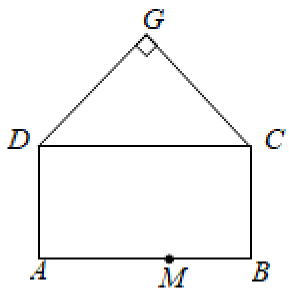


图1



备用图

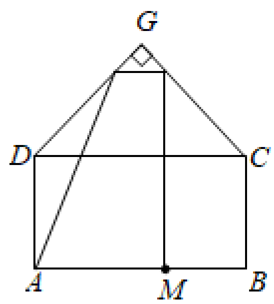


图2

【答案】（1）①3；②169；（2）$5 \le a \le 20$

【详解】（1）解：①P 在线段 AD 上，$PQ = AB = 20$，$AP = x$，$AM = 12$，

四边形 $AMQP$ 的面积 $= \frac{1}{2}(12+20)x = 48$，

解得：$x = 3$；

②当 P，在 AD 上运动时，P 到 D 点时四边形 $AMQP$ 面积最大，四边形 $AMQP$ 为直角梯形，

$\therefore 0 < x \le 10$ 时，四边形 $AMQP$ 面积的最大值 $= \frac{1}{2}(12+20)10 = 160$，

当 P 在 DG 上运动，$10 < x < 20$，四边形 $AMQP$ 为不规则梯形，

作 $PK \perp AB$ 于 K，交 CD 于 N，作 $GE \perp CD$ 于 E，交 AB 于 F，如图 2 所示：

则 $PK = x$，$PN = x - 10$，$EF = BC = 10$，

$\because \Delta GDC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore DE = CE$，$GE = \frac{1}{2}CD = 10$，

$\therefore GF = GE + EF = 20$，

$\therefore GH = 20 - x$，

由题意得：$PQ // CD$，

$\therefore \Delta GPQ \backsim \Delta GDC$，

$\therefore \frac{PQ}{DC} = \frac{GH}{GE}$，

即 $\frac{PQ}{20} = \frac{20-x}{10}$，

解得：$PQ = 40 - 2x$，

$\therefore$ 梯形 $AMQP$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}(12+40-2x)\times x=-x^{2}+26x=-(x-13)^{2}+169$，

$\therefore$ 当 $x=13$ 时，四边形 $AMQP$ 的面积最大 $=169$；

（2）解：P 在 DG 上，则 $10\leqslant x<20$，$AM=a$，$PQ=40-2x$，

梯形 $AMQP$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}(a+40-2x)\times x=-x^{2}+\dfrac{40+a}{2}x$，对称轴为：$x=10+\dfrac{a}{4}$，

$\because 0\leqslant a\leqslant 20$，

$\therefore 10\leqslant 10+\dfrac{a}{4}\leqslant 15$，对称轴在 10 和 15 之间，

$\because 10\leqslant x<20$，二次函数图象开口向下，

$\therefore$ 当 x 无限接近于 20 时，S 最小，

$\therefore -20^{2}+\dfrac{40+a}{2}\times 20\geqslant 50$，

$\therefore a\geqslant 5$；

综上所述，a 的取值范围为 $5\leqslant a\leqslant 20$．

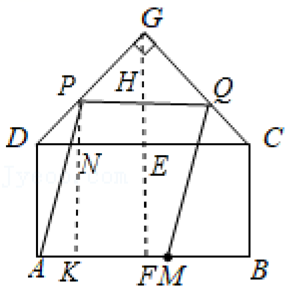


图 2

5．（2018•扬州）问题呈现

如图 1，在边长为 1 的正方形网格中，连接格点 D，N 和 E，C，DN 和 EC 相交于点 P，求 $\tan\angle CPN$ 的值．

方法归纳

求一个锐角的三角函数值，我们往往需要找出（或构造出）一个直角三角形．观察发现问题中 $\angle CPN$ 不在直角三角形中，我们常常利用网格画平行线等方法解决此类问题，比如连接格点 M，N，可得 $MN//EC$，则 $\angle DNM=\angle CPN$，连接 DM，那么 $\angle CPN$ 就变换到 $\mathrm{Rt}\Delta DMN$ 中．

问题解决

（1）直接写出图 1 中 $\tan\angle CPN$ 的值为____________；

（2）如图 2，在边长为 1 的正方形网格中，AN 与 CM 相交于点 P，求 $\cos\angle CPN$ 的值；

思维拓展

（3）如图 3，$AB \perp BC$，$AB = 4BC$，点 M 在 AB 上，且 $AM = BC$，延长 CB 到 N，使 $BN = 2BC$，连接 AN 交 CM 的延长线于点 P，用上述方法构造网格求 $\angle CPN$ 的度数.

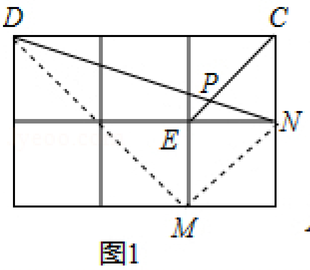


图1

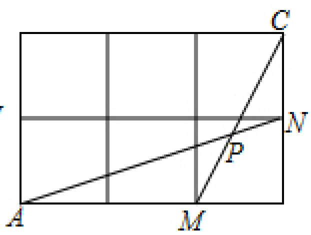


图2

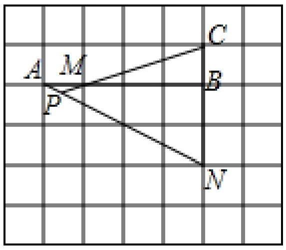


图3

【答案】（1）2；（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；（3）45°

【详解】（1）如图 1 中，

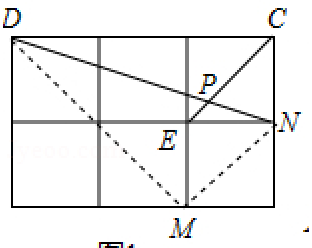


图1

$\because EC // MN$，

$\therefore \angle CPN = \angle DNM$，

$\therefore \tan\angle CPN = \tan\angle DNM$，

$\because \angle DMN = 90°$，

$\therefore \tan\angle CPN = \tan\angle DNM = \dfrac{DM}{MN} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

（2）如图 2 中，取格点 D，连接 CD，DM.

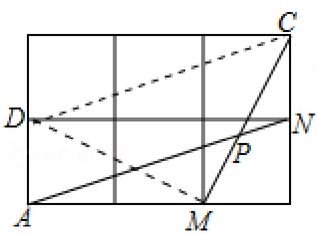


图2

$\because CD // AN$，

$\therefore \angle CPN = \angle DCM$，

$\because \Delta DCM$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle DCM = \angle D = 45°$，

$\therefore \cos\angle CPN = \cos\angle DCM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（3）如图 3 中，如图取格点 H，连接 AH、HN.

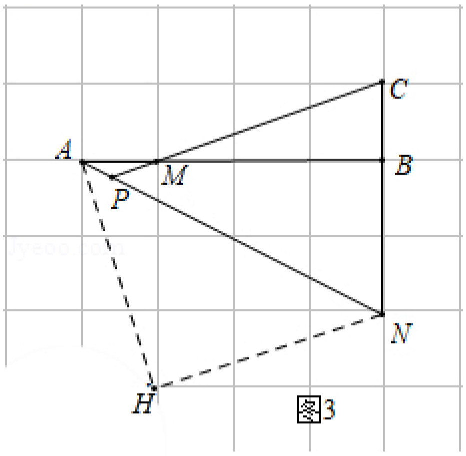


图3

$\because PC//HN$，

$\therefore \angle CPN = \angle ANH$，

$\because AH = HN$，$\angle AHN = 90^{\circ}$，

$\therefore \angle ANH = \angle HAN = 45^{\circ}$，

$\therefore \angle CPN = 45^{\circ}$.

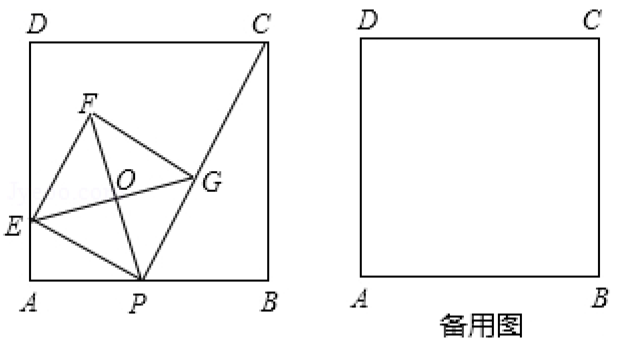
6．(2017•扬州）如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 P 是 AB 边上的一个动点，连接 CP，过点 P 作 PC 的垂线交 AD 于点 E，以 PE 为边作正方形 $PEFG$，顶点 G 在线段 PC 上，对角线 EG、PF 相交于点 O.

（1）若 $AP=1$，则 $AE=$____________；

（2）①求证：点 O 一定在 ΔAPE 的外接圆上；

②当点 P 从点 A 运动到点 B 时，点 O 也随之运动，求点 O 经过的路径长；

（3）在点 P 从点 A 到点 B 的运动过程中，ΔAPE 的外接圆的圆心也随之运动，求该圆心到 AB 边的距离的最大值.



备用图

【答案】(1) $\dfrac{3}{4}$；（2）①见解析；② $2\sqrt{2}$；（3）$\dfrac{1}{2}$

【详解】(1) 解：$\because$ 四边形 $ABCD$、四边形 $PEFG$ 是正方形，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle EPG=90^{\circ}$， $PF\perp EG$， $AB=BC=4$， $\angle OEP=45^{\circ}$，

$\therefore \angle AEP+\angle APE=90^{\circ}$， $\angle BPC+\angle APE=90^{\circ}$，

$\therefore \angle AEP=\angle BPC$，

$\therefore \Delta APE\backsim\Delta BCP$

$\therefore \dfrac{AE}{BP}=\dfrac{AP}{BC}$，即 $\dfrac{AE}{4-1}=\dfrac{1}{4}$，

解得： $AE=\dfrac{3}{4}$；

(2) ①证明：如图 3，

取 PE 的中点 Q，连接 AQ， OQ，

$\because \angle POE=90^{\circ}$，

$\therefore OQ=\dfrac{1}{2}PE$，

$\because \Delta APE$ 是直角三角形，

$\therefore$ 点 Q 是 RtΔAPE 外接圆的圆心，

$\therefore AQ=\dfrac{1}{2}PE$，

$\therefore OQ=AQ$，

$\therefore$ 点 O 一定在 ΔAPE 的外接圆上；(到圆心的距离等于半径的点必在此圆上)

②解：连接 OA、 AC，如图 1 所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle B=90^{\circ}$， $\angle BAC=45^{\circ}$，

$\therefore AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

$\because A$、 P、 O、 E 四点共圆，

$\therefore \angle OAP=\angle OEP=45^{\circ}$，

$\therefore$ 点 O 在 AC 上，

当 P 运动到点 B 时， O 为 AC 的中点， $OA=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$，

即点 O 经过的路径长为 $2\sqrt{2}$；

(3) 解：设 ΔAPE 的外接圆的圆心为 M，作 $MN\perp AB$ 于 N，如图 2 所示：

则 $MN//AE$，

$\because ME = MP$，

$\therefore AN = PN$，

$\therefore MN = \frac{1}{2}AE$，

设 $AP = x$，则 $BP = 4 - x$，

由（1）得：$\Delta APE \backsim \Delta BCP$，

$\therefore \frac{AE}{BP} = \frac{AP}{BC}$，即 $\frac{AE}{4-x} = \frac{x}{4}$，

解得：$AE = x - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$，

$\therefore x = 2$ 时，AE 的最大值为 1，此时 MN 的值最大 $= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$，

即 ΔAPE 的圆心到 AB 边的距离的最大值为 $\frac{1}{2}$．

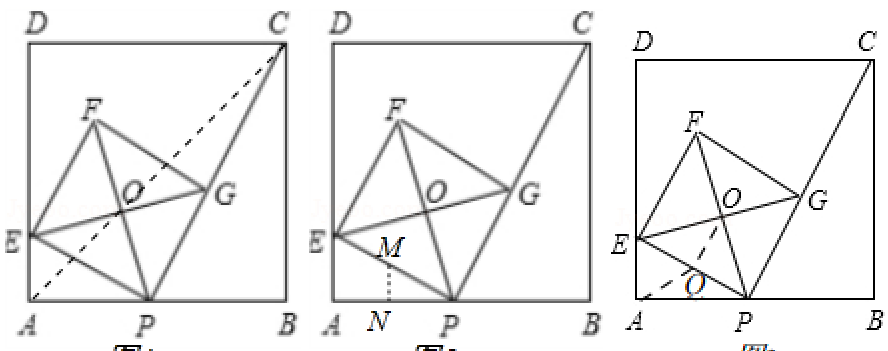


图1　　图2　　图3

7．（2021•广陵区校级二模）如图 1，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，以 A 为圆心，3 为半径的圆弧交边 AB、AD 于点 E，F，交对角线 BD 于点 G、H，点 P 为弧 $\overset{\frown}{EF}$ 上的一个动点，过点 P 作 $PM \perp BC$ 于 M，作 $PN \perp CD$ 于 N．设 $PM = m$，$PN = n$．

（1）如图 2，当点 p 运动至 G 位置时，求 $m + n$ 的值；

（2）若四边形 $PMCN$ 的面积为 3.5，求四边形 $PMCN$ 的周长；

（3）求四边形 $PMCN$ 面积的最小值，并说明此时点 P 的位置．

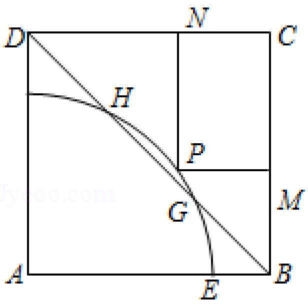


图 1

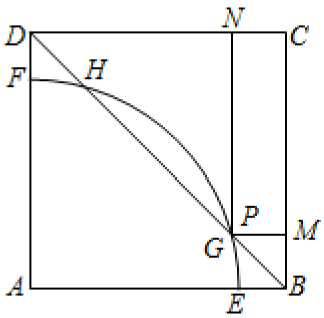


图 2

【答案】（1） $m+n=4$；（2）8；（3）见解析

【详解】解（1）如图 2，

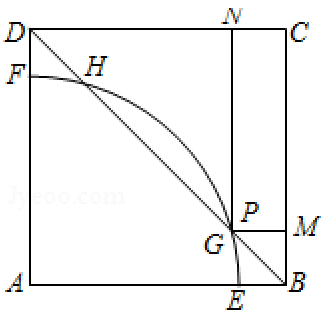


图 2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle DBC=\angle CDB=45^{\circ}$．

$\because PM\perp BC$，

$\therefore \Delta PMB$ 为等腰直角三角形．

$\therefore BM=PM=m$．

$\because PM\perp BC$， $PN\perp DC$， $\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 为矩形．

$\therefore CM=PN=n$．

$\because CM+BM=BC=4$，

$\therefore m+n=4$．

同理，当点 P 运动至 H 位置时， $m+n=4$．

（2）延长 MP， NP，交正方形的边 AB， AD 于 Q， R，连接 AP，如图 1，

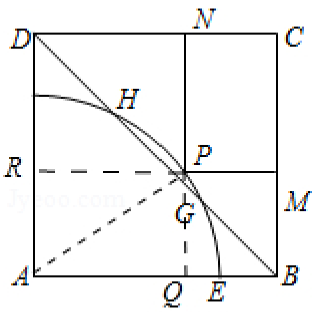


图 1

$\because PM \perp BC$， $PN \perp CD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ 四边形 $PRAQ$ 为矩形.

$\therefore AQ = PR = 4 - m$， $PQ = 4 - n$.

$\because AQ^2 + PQ^2 = AP^2$，

$\therefore (4-m)^2 + (4-n)^2 = 3^2$.

$\therefore 16 - 8m + m^2 + 16 - 8n + n^2 = 9$.

$\therefore (m+n)^2 - 2mn - 8(m+n) + 32 = 9$.

$\because$ 四边形 $PMCN$ 的面积为 3.5，

$\therefore mn = 3.5$.

$\therefore (m+n)^2 - 8(m+n) - 7 + 32 - 9 = 0$.

$\therefore (m+n-4)^2 = 0$.

$\therefore m + n = 4$.

$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 的周长 $= 2(m+n) = 8$.

（3）如图 1，由（2）知： $(4-m)^2 + (4-n)^2 = 3^2$.

即： $16 - 8m + m^2 + 16 - 8n + n^2 = 9$.

$\therefore m^2 + n^2 - 8(m+n) + 23 = 0$.

$\therefore m^2 + 2mn + n^2 - 8(m+n) + 23 = 2mn$

$\therefore 2mn = (m+n)^2 - 8(m+n) + 23$.

$\because S_{矩形PMCN} = mn$，

$\therefore S_{矩形PMCN}=\frac{1}{2}(m+n)^2-4(m+n)+\frac{23}{2}=\frac{1}{2}((m+n-4)^2+\frac{7}{2}$.

$\because \frac{1}{2}>0$，

$\therefore$ 当 $m+n=4$ 时，$S_{矩形PMCN}$ 有最小值为 $\frac{7}{2}$.

由（1）知，当 $m+n=4$ 时，点 p 运动至 G 、H 位置.

$\therefore$ 此时点 P 的位置在 G 或 H 处.

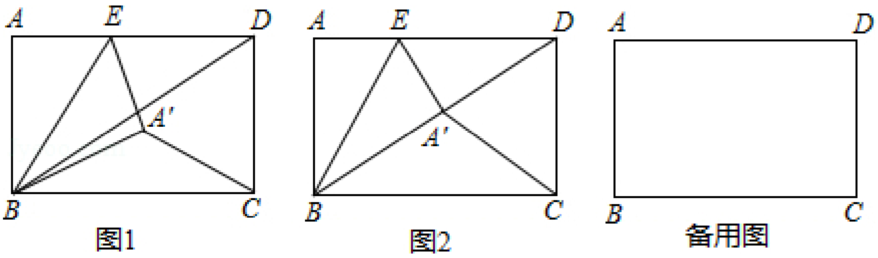
8.（2021•南平模拟）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，点 E 是 AD 边上的动点，将矩形 $ABCD$ 沿 BE 折叠，点 A 落在点 A' 处，连接 $A'C$ 、BD.

（1）如图 1，求证：$\angle DEA'=2\angle ABE$；

（2）如图 2，若点 A' 恰好落在 BD 上，求 $\tan\angle ABE$ 的值；

（3）若 $AE=2$，求 $S_{\triangle A'CB}$.

（4）点 E 在 AD 边上运动的过程中，$\angle A'CB$ 的度数是否存在最大值，若存在，求出此时线段 AE 的长；若不存在，请说明理由.



【答案】（1）见解析；（2）$\frac{1}{2}$；（3）19.2；（4）见解析

【详解】（1）证明：由折叠的性质知：$\angle AEB=\angle A'EB$，

$\therefore \angle AEB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A'ED)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A'ED$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=90^\circ$，

$\therefore \angle ABE=90^\circ-\angle AEB=90^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A'ED)=\frac{1}{2}\angle A'ED$，

$\therefore \angle A'ED=2\angle ABE$；

（2）解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=90^\circ$，$AD=BC=8$，

在 RtΔABD 中，根据勾股定理得：$BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

设 $AE=x$，则 $DE=AD-AE=8-x$，

由折叠的性质知：$A'E=AE=x$，$A'B=AB=6$，$\angle BA'E=\angle A=90^{\circ}$，

$\therefore A'D=BD-A'B=4$，

$\therefore \angle DA'E=90^{\circ}$，

在 $Rt\triangle DA'E$ 中，根据勾股定理得：$DE^2-A'E^2=A'D^2=16$，

即 $(8-x)^2-x^2=16$，

解得：$x=3$，

$\therefore AE=3$，

在 RtΔABE 中，$\tan\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$；

（3）解：过 A' 作 $MN\perp AD$，交 AD 于 M，交 BC 于 N，如图 3 所示：

则 $MN\perp BC$，$MN=AB=6$，$\angle A'ME=\angle BNA'=90^{\circ}$，

$\therefore \angle EA'M+\angle A'EM=90^{\circ}$，

由折叠的性质可知：$A'E=AE=2$，$A'B=AB=6$，$\angle BA'E=\angle A=90^{\circ}$，

$\therefore \angle EA'M+\angle BA'N=90^{\circ}$，

$\therefore \angle A'EM=\angle BA'N$，

$\therefore \triangle A'EM\backsim\triangle BA'N$，

$\therefore \dfrac{A'M}{BN}=\dfrac{A'E}{BA}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，

设 $A'M=x$，则 $BN=3x$，$A'N=6-x$，

在 $Rt\triangle A'BN$ 中，由勾股定理得：$A'N^2+BN^2=A'B^2$，

即 $(6-x)^2+(3x)^2=6^2$，

解得：$x=1.2$ 或 $x=0$（舍去），

$\therefore A'N=6-1.2=4.8$，

$\therefore S_{\triangle A'CB}=\dfrac{1}{2}BC\times A'N=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4.8=19.2$；

（4）解：$\angle A'CB$ 的度数存在最大值，理由如下：

如图 1，过点 B 作 $BF\perp CA'$ 交 CA' 的延长线于 F，

在 RtΔBFC 中，$\sin\angle A'CB=\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{BF}{8}$，

$\therefore BF$ 越大时，$\sin\angle A'CB$ 越大，即 $\angle A'CB$ 越大，

当点 E 在边 AD 上运动时，点 A' 与 F 重合时，$BF_{最大}=A'B=AB=6$，

$\therefore A'B\perp A'C$，

$\therefore \angle BA'C=90^{\circ}$，

由折叠知，$\angle BA'E=\angle A=\angle D=90^{\circ}$，

$\therefore$ 点 A' 在 CE 上，如图 4 所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle D=\angle A=90^{\circ}$，$CD=AB=6$，

根据三角形面积得，$S_{\Delta BCE}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AB=\dfrac{1}{2}CE\cdot A'B$，

$\because A'B=AB$，

$\therefore CE=BC=8$，

在 RtΔCDE 中，根据勾股定理 $DE=\sqrt{CE^{2}-CD^{2}}=\sqrt{8^{2}-6^{2}}=2\sqrt{7}$，

$\therefore AE=AD-DE=8-2\sqrt{7}$．

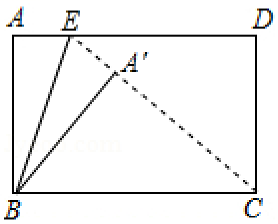


图 4

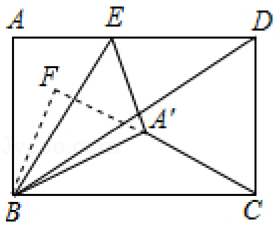


图1

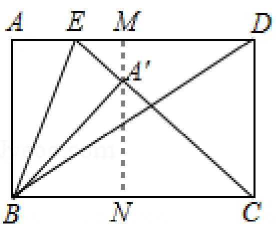


图 3

9．（2021•扬州模拟）如图 1，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 A 在 x 轴的正半轴上，在第一象限内以 OA 为边作平行四边形 $OABC$，点 $C(2,y)$ 和边 AB 的中点 D 都在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，已

知 ΔOCD 的面积为 $\frac{9}{2}$.

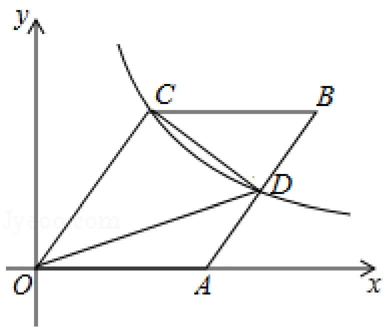


图1

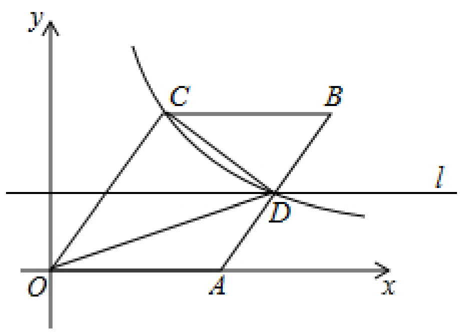


图2

（1）求反比例函数解析式；

（2）点 $P(a,0)$ 是 x 轴上一个动点，求 $|PC-PD|$ 最大时 a 的值；

（3）过点 D 作 x 轴的平行线 l（如图2），在直线 l 上是否存在点 Q，使 ΔCOQ 为直角三角形？若存在，请直接写出所有的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】（1） $y=\frac{6}{x}$；（2）6；（3） $(-\frac{9}{4},\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{17}{4},\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{2+\sqrt{13}}{2}$， $\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{2-\sqrt{13}}{2}$， $\frac{3}{2})$

【详解】（1）当 $x=2$ 时， $y=\frac{k}{2}$，

$\therefore C(2,\frac{k}{2})$，

$\because$ 平行四边形 $OABC$ 中， $BC//OA$，

$\therefore y_B=y_c=\frac{k}{2}$，

$\because D$ 是边 AB 的中点，

$\therefore y_D=\frac{1}{2}y_B=\frac{k}{4}$，

$\therefore$ 点 $D(4,\frac{k}{4})$，

作 $CE\perp x$ 轴于点 E， $DF\perp x$ 轴于点 F，

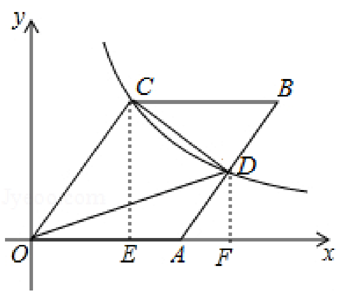


图1

则 $S_{\Delta OCD}=S_{梯形CDFE}=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{4}+\frac{k}{2}\right)(4-2)=\frac{9}{2}$，

$\therefore k=6$．

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y=\frac{6}{x}$；

（2）在 ΔPCD 中，$|PC-PD|<CD$；

当 P，C，D 在一条直线上时，$|PC-PD|=CD$，

由（1）知，$C(2,3)$，$D(4,\frac{3}{2})$，

$\therefore$ 设直线 CD 为 $y=k_1x+b$，

则 $\begin{cases}2k_1+b=3\\4k_1+b=\frac{3}{2}\end{cases}$，

解得：$k_1=-\frac{3}{4},b=\frac{9}{2}$，

$\therefore$ 直线 CD 解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$，

由 $-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}=0$，

$\therefore x=6$，

$\therefore |PC-PD|$ 最大时 a 的值为 6；

（3）存在．

$\because QD//x$ 轴，

$\therefore$ 设点 Q 坐标为 $(a,\frac{3}{2})$，

$\because C(2,3)$，$O(0,0)$，

$\therefore CO^2=4+9=13$，$OQ^2=a^2+\frac{9}{4}$，$CQ^2=(a-2)^2+(3-\frac{3}{2})^2=a^2+\frac{25}{4}-4a$，

当 $\angle CQO=90^\circ$ 时，则 $CO^2=OQ^2+CQ^2$，

$\therefore 13=a^2+\frac{9}{4}+a^2+\frac{25}{4}-4a$，

$\therefore a=\frac{2\pm\sqrt{13}}{2}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(\frac{2+\sqrt{13}}{2}$，$\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{2-\sqrt{13}}{2}$，$\frac{3}{2})$；

当 $\angle COQ=90^\circ$ 时，则 $CQ^2=OQ^2+CO^2$，

$\therefore 13+a^{2}+\frac{9}{4}=a^{2}+\frac{25}{4}-4a$，

$\therefore a=-\frac{9}{4}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(-\frac{9}{4},\frac{3}{2})$；

当 $\angle OCQ=90^{\circ}$ 时，则 $OQ^{2}=CQ^{2}+CO^{2}$，

$\therefore a^{2}+\frac{9}{4}=a^{2}+\frac{25}{4}-4a+13$，

$\therefore a=\frac{17}{4}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(\frac{17}{4},\frac{3}{2})$；

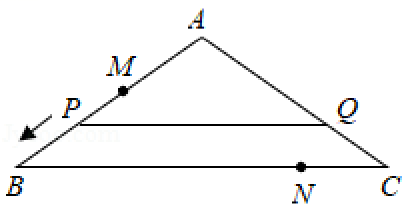
综上所述：点 Q 的坐标为 $(-\frac{9}{4},\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{17}{4},\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{2+\sqrt{13}}{2}$，$\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{2-\sqrt{13}}{2}$，$\frac{3}{2})$．

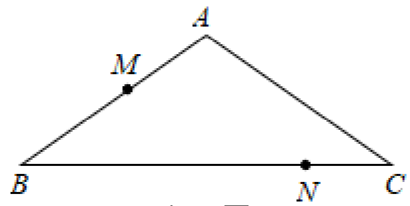
10．（2021•宝应县一模）如图，在 ΔABC 中，$AB=AC$，$BC=8$，$\tan C=\frac{3}{4}$，点 M、N 分别在 AB、BC 上，且 $AM=CN=2$．点 P 从点 M 出发沿折线 $MB-BN$ 匀速移动，到达点 N 时停止；而点 Q 在 AC 边上随 P 移动，且始终保持 $\angle APQ=\angle B$．

（1）求点 P 在 BN 上运动时，点 P 与点 A 的最短距离；

（2）若点 P 在 MB 上，且 PQ 将 ΔABC 的面积分成上下 $4:5$ 两部分时，求 MP 的长；

（3）求整个运动过程点 Q 运动的路径长．





备用图

【答案】（1）3；（2）$\frac{4}{3}$；（3）7

【详解】（1）如图 1，点 P 在 BN 上运动时，当 $AP\perp BC$ 时，点 P 与点 A 有最短距离，

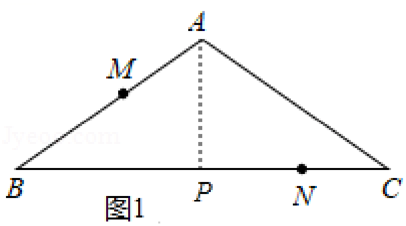


图1

$\because AB=AC$，$BC=8$，

$\therefore BP=PC=4$，

$\because \tan C = \frac{AP}{BP} = \frac{3}{4}$，

$\therefore AP = 3$，

$\therefore$ 点 P 在 BN 上运动时，点 P 与点 A 的最短距离为 3；

（2）如图 1， $AP = 3$， $BP = 4$，

$\therefore AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{9+16} = 5$，

当点 P 在 MB 上，如图 2，

$\because \angle APQ = \angle B$，

$\therefore PQ // BC$，

$\therefore \Delta APQ \backsim \Delta ABC$，

$\therefore \frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = (\frac{AP}{AB})^2$，

$\because PQ$ 将 ΔABC 的面积分成上下 $4:5$ 两部分，

$\therefore \frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4}{9}$，

$\therefore \frac{AP}{5} = \frac{2}{3}$，

$\therefore AP = \frac{10}{3}$，

$\therefore PM = AP - AM = \frac{4}{3}$；

（3）当点 P 在 MB 上运动时， $PQ // BC$，

$\therefore CQ = BM = 3$，

当点 P 在 BC 上，且移动到 BC 中点时，如图 3，

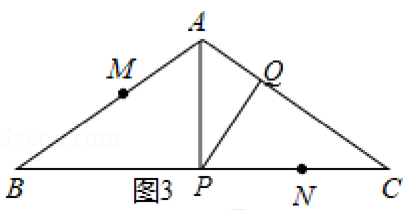


图3

$\because AB = AC$， $BP = CP = 4$，

$\therefore \angle B = \angle C$， $AP \perp BC$，

$\because \angle APQ = \angle B$， $\angle APC = \angle B + \angle BAP = \angle APQ + \angle CPQ$，

$\therefore \angle CPQ=\angle BAP$，

$\therefore \Delta ABP\backsim \Delta BCQ$，

$\therefore \dfrac{CP}{AB}=\dfrac{CQ}{BP}$，

$\therefore CQ=\dfrac{4}{5}\times 4=\dfrac{16}{5}$，

当点 P 从 BC 中点移动到点 N 时，如图 4，

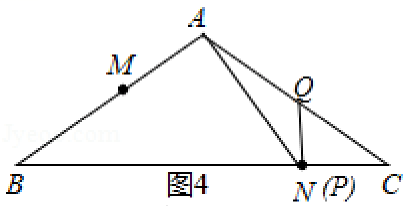


图4

同理可得 $\Delta ABP\backsim \Delta BCQ$，

$\therefore \dfrac{CP}{AB}=\dfrac{CQ}{BP}$，

$\therefore CQ=\dfrac{2}{5}\times 6=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore$ 整个运动过程点 Q 运动的路径长 $=3+\dfrac{16}{5}+(\dfrac{16}{5}-\dfrac{12}{5})=7$．

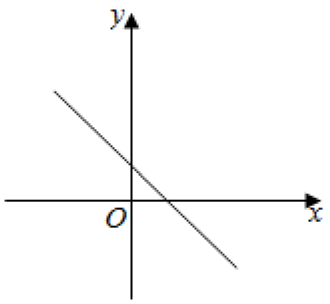
11．（2021•江都区模拟）平面上两点间距离公式是解析几何中重要的公式之一，如图所示，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，则 $P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$．请用所学知道解决问题：

已知道 $\odot O$ 半径为 3，

（1）如图 1，$P(x,y)$ 为圆上任意一点，请探究 x，y 的关系式；

（2）如图 2，已知 $Q(a,b)$，QA 为 $\odot O$ 切线，$B(2,-1)$，且 $QA=QB$，求 b 关于 a 的函数关系式；

（3）如图 3，M 点坐标 $(-5,0)$，在 x 轴是否存在点 N（不同于点 M），满足对于 $\odot O$ 上任意一点 P，都有 $\dfrac{PN}{PM}$ 为一常数，若存在求出 N 点坐标，若不存在请说明理由．



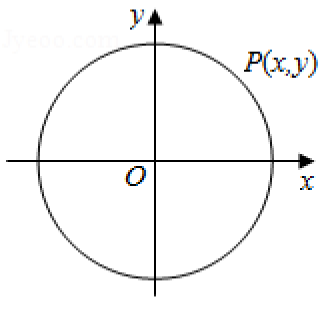


图1

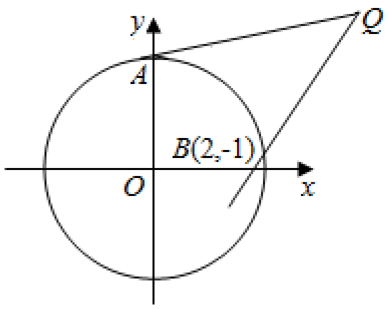


图2

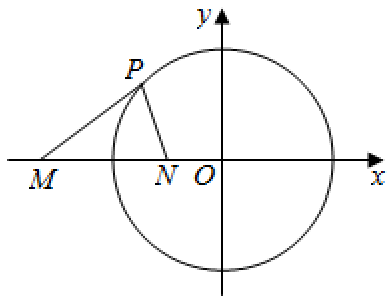


图3

【答案】（1） $x^2+y^2=9$；（2） $b=2a-7$；（3）见解析

【详解】（1）由题可得 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=3$，

即 $x^2+y^2=9$；

（2）连 OA 、 OQ，

$\because QA$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OAQ=90^\circ$，

$\therefore QA^2=QO^2-OA^2=a^2+b^2-9$， $QB^2=(a-2)^2+(b+1)^2$，

又 $\because QA=QB$，

$\therefore QA^2=QB^2$，

$\therefore a^2+b^2-9=(a-2)^2+(b+1)^2$，

整理得： $b=2a-7$．

（3）方法 1：假设存在这样的点 $N(t,0)$，当 P 为圆 O 与 x 轴左交点 $(-3,0)$ 时， $\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{|t+3|}{2}$；

当 P 为圆 O 与 x 轴右交点 $(3,0)$ 时， $\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{|t-3|}{8}$， 依题意， $\dfrac{|t+3|}{2}=\dfrac{|t-3|}{8}$，

解得， $t=5$（舍去），或 $t=-\dfrac{9}{5}$

下面证明点 $N(-\frac{9}{5},0)$ 对于圆 O 上任一点 P，都有 $\frac{PN}{PM}$ 为一常数.

设 $P(x,y)$，则 $y^2=9-x^2$，

$$\therefore \frac{PN^2}{PM^2}=\frac{(x+\frac{9}{5})^2+y^2}{(x+5)^2+y^2}=\frac{x^2+\frac{18}{5}x+\frac{81}{25}+9-x^2}{x^2+10x+25+9-x^2}=\frac{\frac{18}{25}(5x+17)}{2(5x+17)}=\frac{9}{25},$$

从而 $\frac{PN}{PM}=\frac{3}{5}$ 为常数.

方法 2：假设存在这样的点 $N(t,0)$，使得 $\frac{PN}{PM}$ 为常数 λ，则 $PN^2=\lambda^2PM^2$，

$\therefore (x-t)^2+y^2=\lambda^2[(x+5)^2+y^2]$，将 $y^2=9-x^2$ 代入得，

即 $x^2-2xt+t^2+9-x^2=\lambda^2(x^2+10x+25+9-x^2)$，

$2(5\lambda^2+t)x+34\lambda^2-t^2-9=0$ 对 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 恒成立，

$$\therefore \begin{cases}5\lambda^2+t=0\\34\lambda^2-t^2-9=0\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{3}{5}\\t=-\frac{9}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=1\\t=-5\end{cases}$（舍去），

所以存在点 $N(-\frac{9}{5},0)$ 对于圆 C 上任一点 P，都有 $\frac{PN}{PM}$ 为常数 $\frac{3}{5}$.

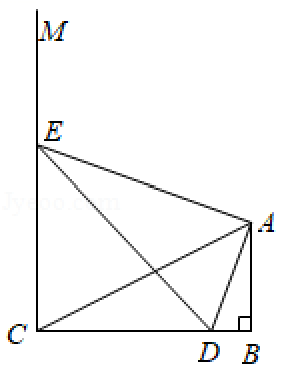
12.（2021•江都区一模）如图，在 RtΔABC 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=3$，$BC=6$，射线 $CM\perp BC$，点 D 是边 BC 上一动点，连接 AD，过点 A 作 $AE\perp AD$ 交射线 CM 于点 E，连接 DE.

（1）求证：点 A、E、C、D 在同一圆上；

（2）若 $BD=1$，则 $AE=$_____________.

（3）①当 ΔCDE 面积的最大时，求 BD 的长；

②当点 D 从点 B 运动到点 C 时，直接写出 ΔACE 的外接圆圆心经过的路径长 _____________.



【答案】（1）见解析；（2）$2\sqrt{10}$；（3）$BD=\frac{9}{4}$；（4）$3\sqrt{5}$

【详解】（1）证明：根据题意可知$\angle DCE=90^\circ$，$\angle DAE=90^\circ$，

$\because \angle DCE+\angle DAE=180^\circ$，

$\therefore$点A、E、C、D在以DE为直径的同一圆上.

（2）如图1，

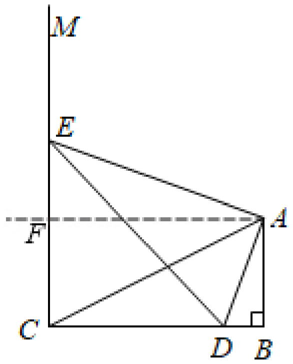


图1

过点A作$AF\perp CM$，垂足为点F，

$\because BC\perp CM$，$BC\perp AB$，

$\therefore AF//BC$，$AF\perp AB$，

$\because \angle EAF+\angle DAF=90^\circ$，$\angle BAD+\angle DAF=90^\circ$，

$\therefore \angle EAF=\angle DAB$，

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{AEF}\backsim\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADB}$，

$\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{AD}{AB}$，

$\because BD=1$，$AB=3$，$AF=BC=6$，$AD=\sqrt{DB^2+AB^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore \frac{AE}{6}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，解得$AE=2\sqrt{10}$

（3）①由（2）可知$\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{AEF}\backsim\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADB}$，

$\therefore \frac{EF}{DB}=\frac{AF}{AB}=2$，

设$DB=x$，则$EF=2x$，$EC=2x+3$，$DC=BC-BD=6-x$，

$\therefore S_{\Delta CDE}=\frac{1}{2}(6-x)(2x+3)=-(x-\frac{9}{4})^2+\frac{225}{16}$，

$\therefore$当ΔCDE面积最大时，$x=\frac{9}{4}$，即$BD=\frac{9}{4}$.

②如图2所示，

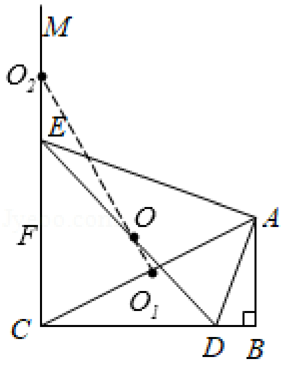


图2

由（1）可知ΔACE外接圆的圆心O是DE的中点，$OA=OC$，

$\therefore$点O在AC的垂直平分线上运动，

$\therefore$点O的运动路径为O_1O_2，

根据题意$BC=6$，$AB=3$，

$\therefore AC=\sqrt{BC^2+AB^2}=3\sqrt{5}$，

$\because \angle CO_2O_1$，$+\angle O_2CO_1=90^\circ$，$\angle O_2CO_1+\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \angle CO_2O_1=\angle ACB$，

又$\angle CO_1O_2=\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore$△$CO_1O_2\backsim\Delta ABC$，

$\therefore \dfrac{CO_1}{O_1O_2}=\dfrac{AB}{BC}$，即$\dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{O_1O_2}=\dfrac{3}{6}$，

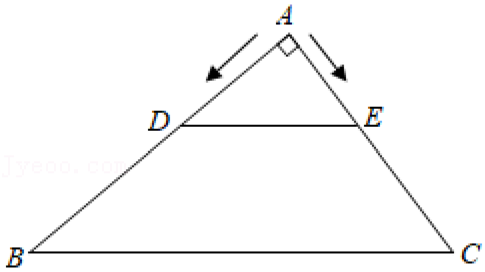
解得$O_1O_2=3\sqrt{5}$

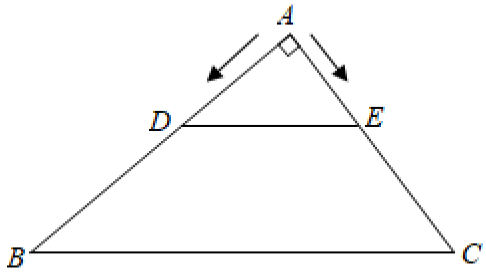
13．（2021•宝应县二模）在ΔABC中，$\angle A=90^\circ$，$AB=8cm$，$AC=6cm$，点D、点E同时从点A出发，点D沿边AB以$4cm/s$的速度向点B运动，点E从点A出发，沿边AC以$3cm/s$的速度向点C运动（点D不与A、B重合，点E不与A、C重合），设运动时间为$t\ s$．

（1）求证：$\Delta ADE\backsim\Delta ABC$；

（2）当t为何值时，以DE为直径的$\odot O$与直线BC相切？

（3）把ΔADE沿直线DE折叠得到ΔDEF，若ΔDEF与梯形$BCED$重叠部分的面积为s，试求s关于t的函数表达式，并求t为何值时，s的值最大，最大值是多少？





备用图

【答案】（1）见解析；（2）$t=\dfrac{48}{49}s$；（3）见解析

【详解】（1）证明：根据题意可知 $AD=4t\ (cm)$， $AE=3t\ (cm)$， $AB=8cm$， $AC=6cm$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4t}{8}=\dfrac{t}{2}$， $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{3t}{6}=\dfrac{t}{2}$，

在 ΔADE 和 ΔABC 中，

$\angle DAE=\angle BAC$， $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，

$\therefore \Delta ADE \backsim \Delta ABC$．

（2）根据题意在 RtΔABC 中， $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10cm$，

在 RtΔADE 中， $DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=5t\ cm$，

由题意 $\odot O$ 以 DE 为直径，

$\therefore \odot O$ 的半径 $r=\dfrac{1}{2}DE=\dfrac{5t}{2}cm$，

设 ΔADE 中 DE 边上的高和 ΔABC 中 BC 边上的高分别为 $h_1(cm)$、 $h_2(cm)$，

则： $S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}\times AD\times AE=\dfrac{1}{2}DE\times h_1$， 解得 $h_1=\dfrac{12t}{5}cm$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC=\dfrac{1}{2}BC\times h_2$， 解得 $h_2=\dfrac{24}{5}cm$，

$\because \odot O$ 与直线 BC 相切，

$\therefore r=h_2-h_1$， 即 $\dfrac{5t}{2}=\dfrac{24}{5}-\dfrac{12t}{5}$，

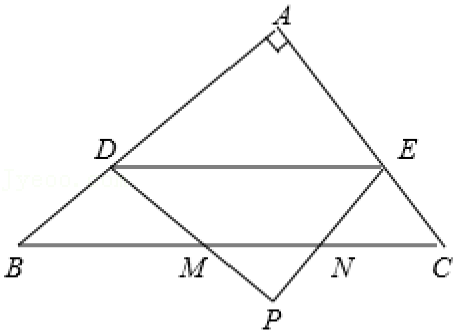
解得 $t=\dfrac{48}{49}s$．

（3）由题意可知当点 P 落在直线 BC 上时， D、 E 分别是 AB、 AC 的中点，此时 $t=1s$，故需分两种情况讨论：

①当 $0<t\leqslant 1$ 时，重叠部分面积 $s=S_{\Delta PDE}=S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}\times 4t\times 3t=6t^2$，

$\therefore$ 当 $t=1s$ 时，重叠部分的面积面积最大为 $s=6$；

②当$1<t<2$时，如下图所示，DP、EP分别交直线BC于点M、点N，



由（1）可知$\angle B=\angle ADE$，$AD=4t$，

$\therefore DE//BC$，

$\therefore \angle EDM=\angle BMD$，

$\because \angle ADE=\angle EDM$，

$\therefore \angle B=\angle BMD$，

$\therefore DB=DM=AB-AD=8-4t$，

$\because PD=AD=4t$，

$\therefore PM=PD-DM=4t-(8-4t)=8t-8$，

$\because DE//MN$，

$\therefore \Delta PMN\backsim\Delta PDE$，

$\therefore \dfrac{S_{\Delta PMN}}{S_{\Delta PDE}}=(\dfrac{PM}{PD})^2=(\dfrac{8t-8}{4t})^2$，

$\because S_{\Delta PDE}=S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}\times 4t\times 3t=6t^2$，

$\therefore S_{\Delta PMN}=6t^2\times(\dfrac{8t-8}{4t})^2$，

$\therefore$重叠部分面积$s=S_{\Delta PDE}-S_{\Delta PMN}=6t^2-6t^2\times(\dfrac{8t-8}{4t})^2=-18(t-\dfrac{4}{3})^2+8$，

$\therefore$当$t=\dfrac{4}{3}$时，重叠部分面积最大为8；

综上所述：当$0<t\leqslant 1$时，$s=6t^2$，当$1<t<2$时，$s=-18(t-\dfrac{4}{3})^2+8$，

当$t=\dfrac{4}{3}$时，重叠部分面积最大，最大值为8.

14．（2021•德城区二模）直角三角板ABC的斜边AB的两个端点在$\odot O$上，已知$\angle BAC=30^\circ$，直角边AC与$\odot O$相交于点D，且点D是劣弧AB的中点.

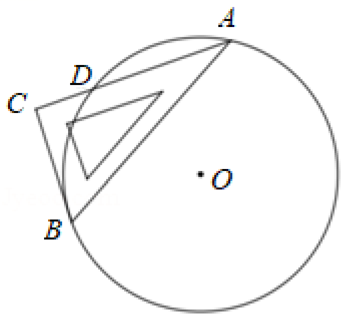


图1

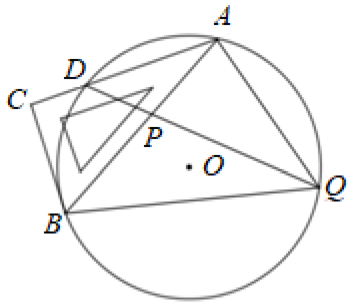


图2

（1）如图 1，判断直角边 BC 所在直线与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

（2）如图 2，点 P 是斜边 AB 上的一个动点（与 A 、 B 不重合）， DP 的延长线交 $\odot O$ 于点 Q ，连接 QA 、 QB .

① $AD=6$ ， $PD=4$ ，则 $AB=$____________； $PQ=$____________；

②当点 P 在斜边 AB 上运动时，求证： $QA+QB=\sqrt{3}QD$.

【答案】（1）见解析；（2） $6\sqrt{3}$ ；5；（3）见解析

【详解】(1) 解: BC 所在的直线与 $\odot O$ 相切.

理由如下:

如图 1,连接 OA , OD , OB , BD ,

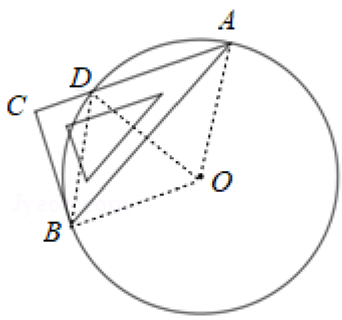


图1

$\because \angle BAC=30^\circ$,

$\therefore \angle BOD=60^\circ$,

$\because OB=OD$,

$\therefore \Delta BOD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BDO=\angle DBO=60^\circ$,

$\because$ 点 D 是劣弧 AB 的中点,

$\therefore \angle AOD=\angle BOD=60^\circ$,

$\because OD=OA$,

$\therefore \Delta AOD$是等边三角形,

$\therefore \angle ADO = 60°$,

$\therefore \angle ADB = \angle ADO + \angle BDO = 120°$,

$\therefore \angle CDB = 180° - \angle ADB = 180° - 120° = 60°$,

$\therefore \angle CBD = 90° - \angle CDB = 90° - 60° = 30°$,

$\therefore \angle CBO = \angle CBD + \angle DBO = 60° + 30° = 90°$,

$\therefore CB \perp OB$,

$\because OB$是$\odot O$的半径,

$\therefore BC$是$\odot O$的切线,即BC所在的直线与$\odot O$相切;

(2)①AB与OD相交于点E,如图2,

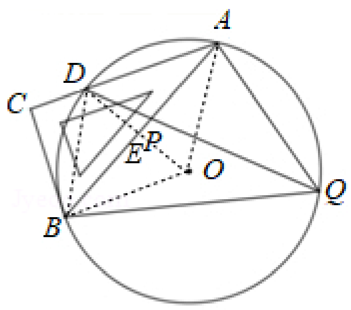


图2

由(1)可知,ΔBOD,ΔAOD都是等边三角形,且OA,OD,OB是$\odot O$的半径,

$\therefore$四边形$AOBD$是菱形,

$\therefore AB$与OD垂直平分,

$\because AD = 6$,

$\therefore DE = 3$, $AE = 3\sqrt{3}$,

$\therefore AB = 2AE = 6\sqrt{3}$,

$\because \angle BAC = 30°$,点$D$是劣弧$AB$的中点,

$\therefore \angle DQA = \angle BQD$,

$\therefore \angle DQA = \angle BAC = 30°$,

$\because \angle QDA = \angle ADP$,

$\therefore \Delta QDA \backsim \Delta ADP$,

$\therefore \dfrac{DA}{DQ} = \dfrac{DP}{DA}$,

$\therefore DQ=\dfrac{DA^2}{DP}=\dfrac{6^2}{4}=9$,

$\therefore PQ=DQ-PD=9-4=5$.

②如图 3,过点 D 作 $DN\perp BQ$ 交 BQ 于点 N, $DM\perp AQ$ 交 AQ 的延长线于点 M,

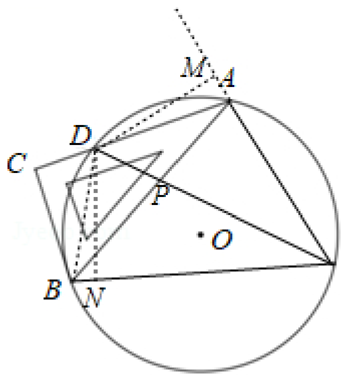


图3

$\because \angle DQA=\angle BQD=30^\circ$,

$\therefore QD$ 是 $\angle BQA$ 的角平分线,

$\therefore DN=DM$, $QN=QM$,

又 $\because DB=DA$,

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta \mathrm{DBN}\cong \mathrm{Rt}\Delta \mathrm{DAM}(\mathrm{HL})$,

$\therefore BN=AM$,

在 RtΔDNQ 中, $\cos\angle DQN=\cos 30^\circ=\dfrac{QN}{QD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore 2QN=\sqrt{3}QD$,

$\therefore \sqrt{3}QD=2QN=2QM=QM+QA+AM=QB+QA$.

即 $QA+QB=\sqrt{3}QD$.

15.(2021•高邮市模拟)如图,已知 RtΔABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CA=CB=4$, $CD\perp AB$ 于点 D,点 M 是线段 BD 上的一个动点.

(1)如图 1,若点 M 恰好在 $\angle BCD$ 的角平分线上,则 $AM=$____________;

(2)如图 2,若点 N 在线段 AB 上,且 $\angle MCN=45^\circ$,过点 M 、 N 分别作 $ME\perp CB$ 于点 E 、 $MF\perp CA$ 于点 F .

①求证: $\Delta ACM\backsim\Delta BNC$;

②求 $AM\cdot BN$ 的值;

③求 $CE \cdot CF$ 的值.

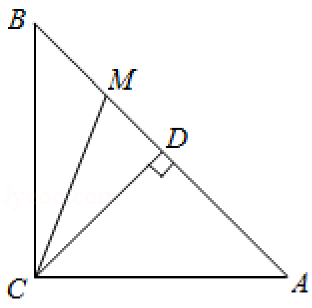


图1

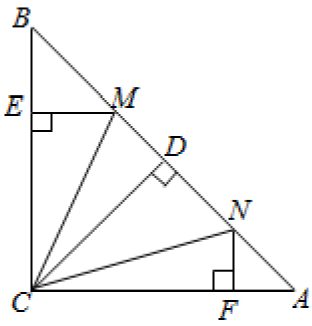


图2

【答案】(1) 4;(2) ①见解析;②16;③ 8

【详解】(1) 如图 1, $\therefore$ RtΔABC 中, $\angle ACB = 90°$, $CA = CB = 4$,

$\therefore \angle A = \angle B = 45°$,

$\because CD \perp AB$ 于点 D,

$\therefore \angle ACD = \angle BCD = 45°$, $BD = AD$,

$\because CE$ 平分 $\angle BCD$,

$\therefore \angle DCM = 22.5°$,

$\therefore \angle ACM = 67.5°$,

$\therefore \angle AMC = 67.5°$,

$\therefore \angle ACM = \angle AMC$,

$\therefore AM = AC = 4$

(2) ①证明: $\because \angle MCN = 45°$,

$\therefore \angle ACM = 45° + \angle ACN$,

$\because \angle BNC = \angle A + \angle ACN = 45° + \angle ACN$,

$\therefore \angle ACM = \angle BNC$,

$\because \angle A = \angle B = 45°$,

$\therefore \Delta ACM \backsim \Delta BNC$;

②解: $\because \Delta ACM \backsim \Delta BNC$,

$\therefore \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AC}{BN}$,

$\therefore AM \cdot BN = AC \cdot BC = 16$;

③解: RtΔABC 中, $\angle ACB = 90°$, $CA = CB = 4$,

$\therefore AB=4\sqrt{2}$，

$\because BD=AD$，

$\therefore CD=\dfrac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$，

$\because \angle MCE+\angle MCD=\angle NCD+\angle MCD=45^{\circ}$，

$\therefore \angle ECM=\angle DCN$，

$\because \angle CEM=\angle CDN=90^{\circ}$，

$\therefore \Delta CEM\backsim\Delta CDN$，

$\therefore \dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CM}{CN}$，

同理，$\Delta CDM\backsim\Delta CFN$，

$\therefore \dfrac{CF}{CD}=\dfrac{CN}{CM}$，

$\therefore \dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CD}{CF}$，

$\therefore CE\cdot CF=CD^{2}=8$．

16．（2021•仪征市二模）苏科版教材中的折纸活动，引起了许多同学的兴趣．在折纸的过程中，同学们不仅发展了空间观念，还积累了数学活动经验．

【操作】：矩形 $ABCD$，$AB=6$，$AD=8$，点 M 是边 BC 上一个动点，将 ΔABM 沿 AM 折叠，折叠后点 B 的对应点为点 B'．

【发现】：（1）如图 1，若点 M、B'、D 在同一条直线上，求证：ΔADM 为等腰三角形；

【探究】：（2）若点 B 的对应点 B' 落在矩形对角线上，求 BM 的长；

【拓展】：（3）如图 2，过点 B' 作 $B'N\perp AB$，当△ $AB'N$ 面积最大时，求 BM 的长．

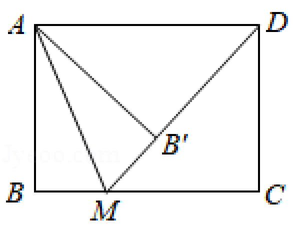
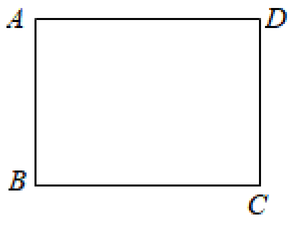


图1



备用图

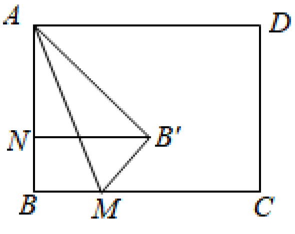


图2

【答案】（1）见解析；（2）3 或 $\dfrac{9}{2}$；（3）$6\sqrt{2}-6$

【详解】（1）证明：如图 1 中，

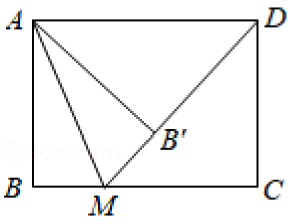


图1

由翻折的性质可知，$\angle AMD=\angle AMB$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD//BC$，

$\therefore \angle AMB=\angle DAM$，

$\therefore \angle DAM=\angle AMD$，

$\therefore DA=DM$，

$\therefore \Delta ADM$ 是等腰三角形.

（2）解：如图 $2-1$ 中，当点 B' 落在 AC 上时，

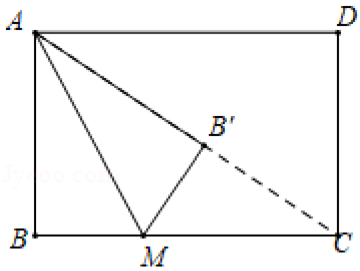


图2-1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle B=90^{\circ}$，$AC=BC=8$，

$\because AB=6$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

由翻折的性质可知，$AB=AB'=6$，$BM=MB'$，

设 $BM=MB'=x$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{MCB'}$ 中，则有 $(8-x)^2=x^2+4^2$，

解得 $x=3$，

$\therefore BM=3$.

如图$2-2$中，当B'落在BD上时，设AM交BD于T.

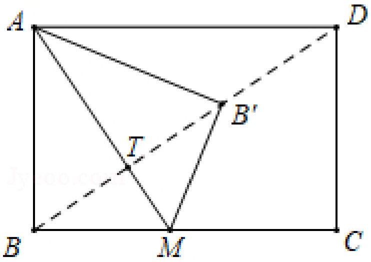


图2-2

$\because AB = AB'$， $MB = MB'$

$\therefore AM \perp BB'$，

$\because \angle BAM + \angle DAM = 90^\circ$， $\angle DAM + \angle ADB = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAM = \angle ADB$，

$\because \angle ABM = \angle DAB$，

$\therefore \Delta ABM \backsim \Delta DAB$，

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BM}{AB}$，

$\therefore \dfrac{6}{8} = \dfrac{BM}{6}$，

$\therefore BM = \dfrac{9}{2}$，

综上所述，BM的值为3或$\dfrac{9}{2}$.

（3）解：如图2中，过点N作$NH \perp AB'$于H，过点B'作$B'T \perp BC$于T，设$AH = x$，则$HB' = 6 - x$.

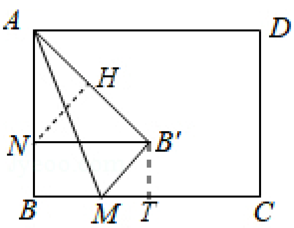


图2

$\because B'N \perp AB$， $NH \perp AB'$，

$\therefore \angle ANH = \angle NHB' = \angle ANB' = 90^\circ$，

$\therefore \angle NAH + \angle ANH = 90^\circ$， $\angle ANH + \angle HNB' = 90^\circ$，

$\therefore \angle NAH = \angle HNB'$，

$\therefore \Delta AHN \backsim \Delta NHB'$，

$\therefore NH^2 = AH \cdot HB' = x(6-x)$，

$\therefore S_{\Delta ANB'} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{x(6-x)} = 3\sqrt{-(x-3)^2+9}$，

$\because -1<0$，

$\therefore x=3$ 时，$\Delta ANB'$ 的面积最大，此时 $AH = NH = HB' = 3$，

$\therefore AN = B'N = 3\sqrt{2}$，

$\therefore \angle AB'N = \angle NB'M = 45^\circ$，

$\because \angle B = \angle B'NB = \angle B'TB = 90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $BNB'T$ 是矩形，

$\therefore BN = B'T = 6-3\sqrt{2}$，$NB' // BT$，

$\therefore \angle TMB' = \angle NB'M = 45^\circ$，

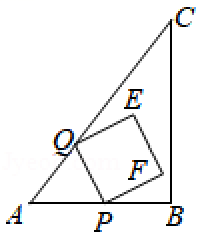
$\therefore BM = MB' = \sqrt{2}B'T = 6\sqrt{2}-6$.

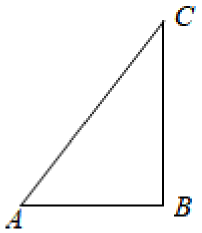
17．（2021•仪征市二模）如图，在 ΔABC 中，$\angle ABC = 90^\circ$，点 P 从点 B 向点 A 运动，点 Q 从点 A 向点 C 运动，两点同时出发，当点 P 到达点 A 时停止（同时点 Q 也停止），连接 PQ，以 PQ 为边顺时针方向作正方形 $PQEF$．已知 $AB=10$，$\tan A = \frac{4}{3}$，$BP = AQ$．

（1）若点 P 运动到 AB 中点处，求正方形 $PQEF$ 的边长；

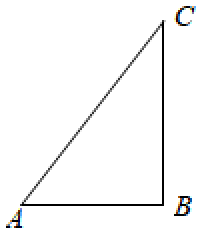
（2）若点 E 落在 ΔABC 的一边上，求 BP 长；

（3）在点 P、Q 的运动过程中，ΔAPQ 的面积是否存在最大值，若存在，请求出最大值，若不存在，请说明理由．





备用图



备用图

【答案】（1）$2\sqrt{5}$；（2）$\frac{15}{4}$ 或 $\frac{50}{7}$；（3）$x=5$ 时，ΔAQP 的面积最大，最大值为 10．

【详解】（1）如图 1 中，过点 Q 作 $QH \perp AB$ 于 H．