第四章 平面任意力系

§4-1 力的平移

§4-2 平面任意力系向一点简化

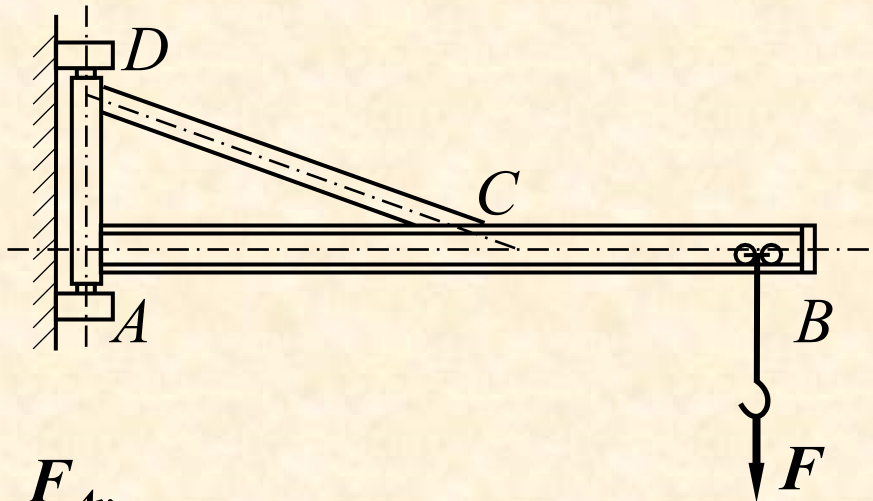
§4-3 平面任意力系的平衡条件

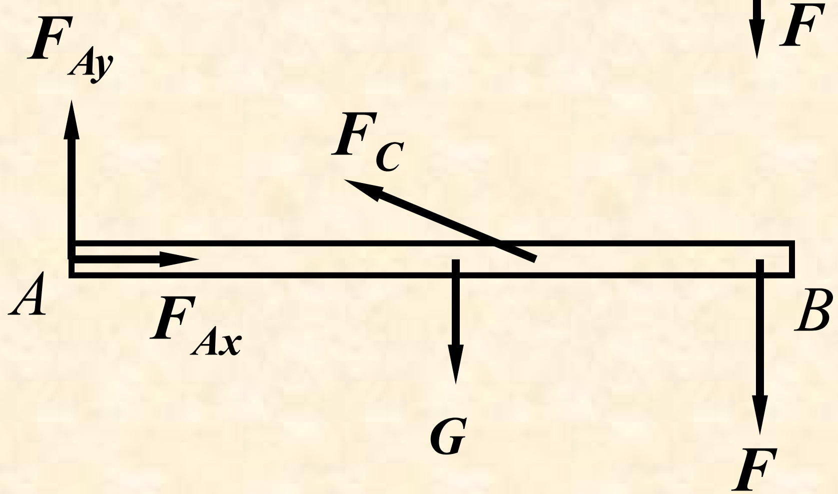
§4-4 刚体系的平衡

§4-5 静定与静不定问题的概念

§4-1　力的平移

一、平面任意力系实例



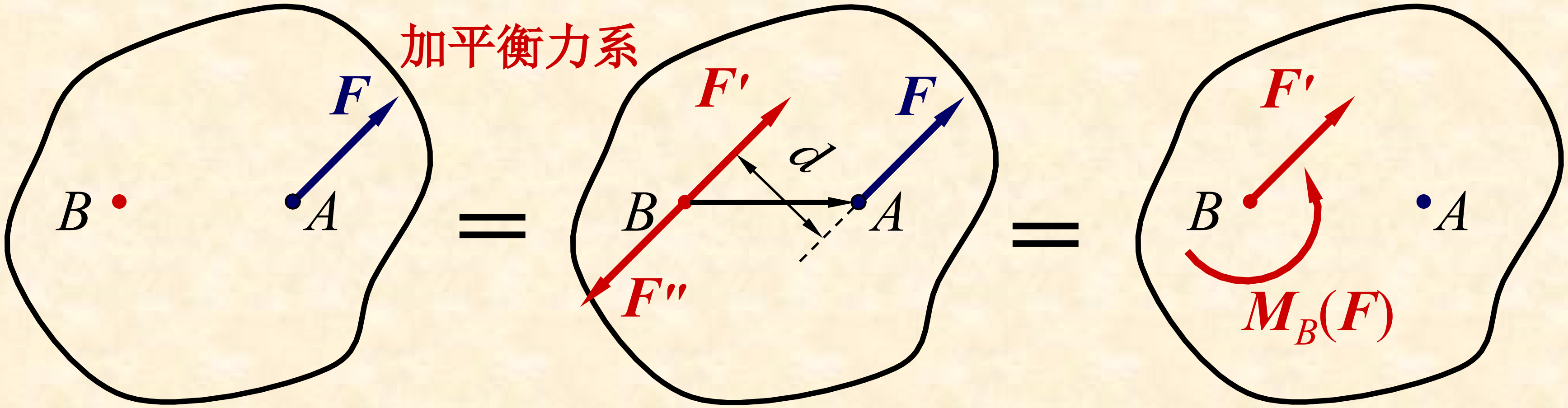


§4.1 力的平移

作用在刚体上的力可沿作用线移动而不变化力对刚体的作用效果，——力的可传性

假如力平移到作用线以外任意点，对刚体的作用效果是否变化？

二、力 的 平 移



$$F' = -F'' = F$$

$$(F, F'')$$

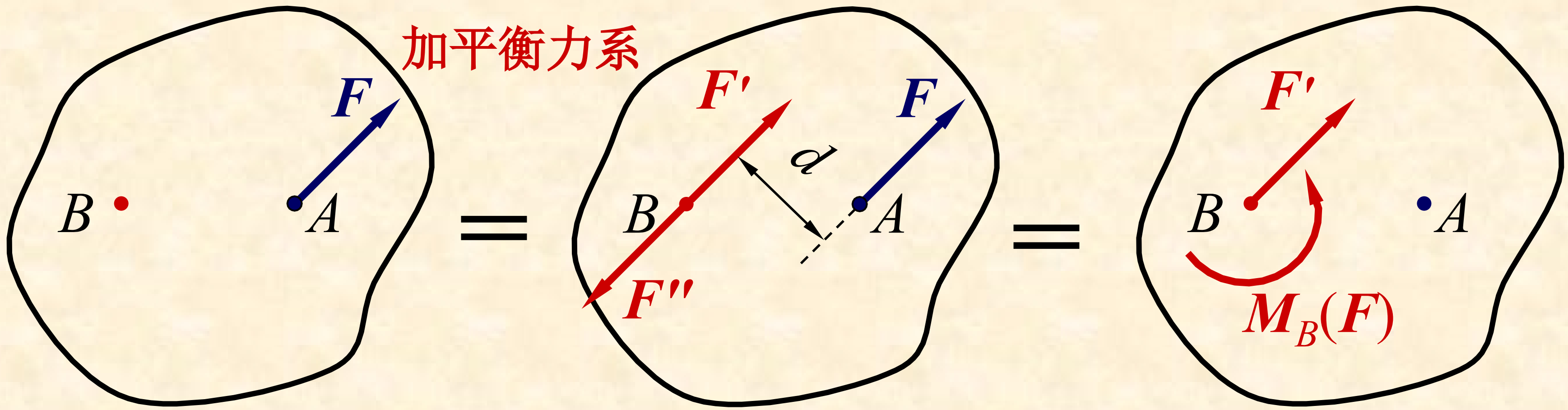
$$M = r_{BA} \times F = M_B(F)$$

力的平移定理:

作用在刚体上一点的力，可平移到刚体上任一点, 但必须附加一种力偶, 这个附加力偶的力偶矩矢等于原来的力对新作用点的矩矢

§4.1 力的平移

在平面问题中：



$$F' = -F'' = F$$

$$M_B(F) = Fd$$

作用在刚体某平面上一点的力，可平移到该平面上的任一点，但必须附加一种力偶，这个附加力偶的力偶矩等于原来的力对新作用点的矩

§4-2　平面任意力系向一点简化

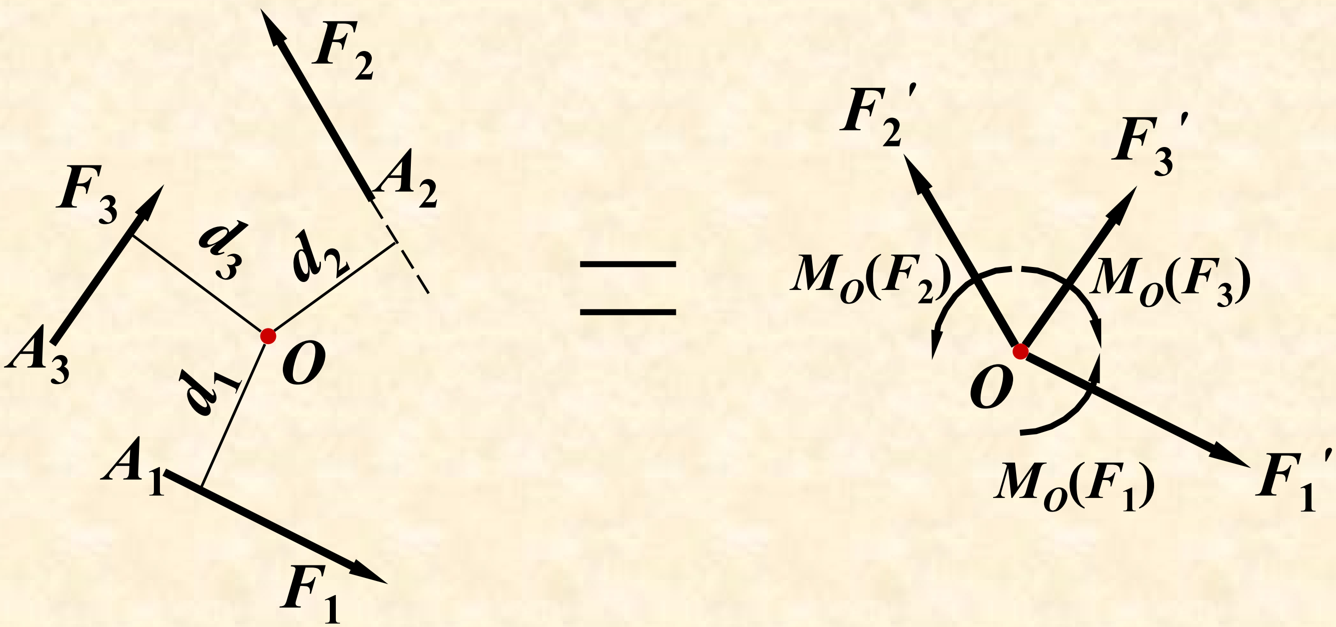
一、平面任意力系向一点简化

二、平面任意力系简化的最终成果

§4.2 平面任意力系向一点简化

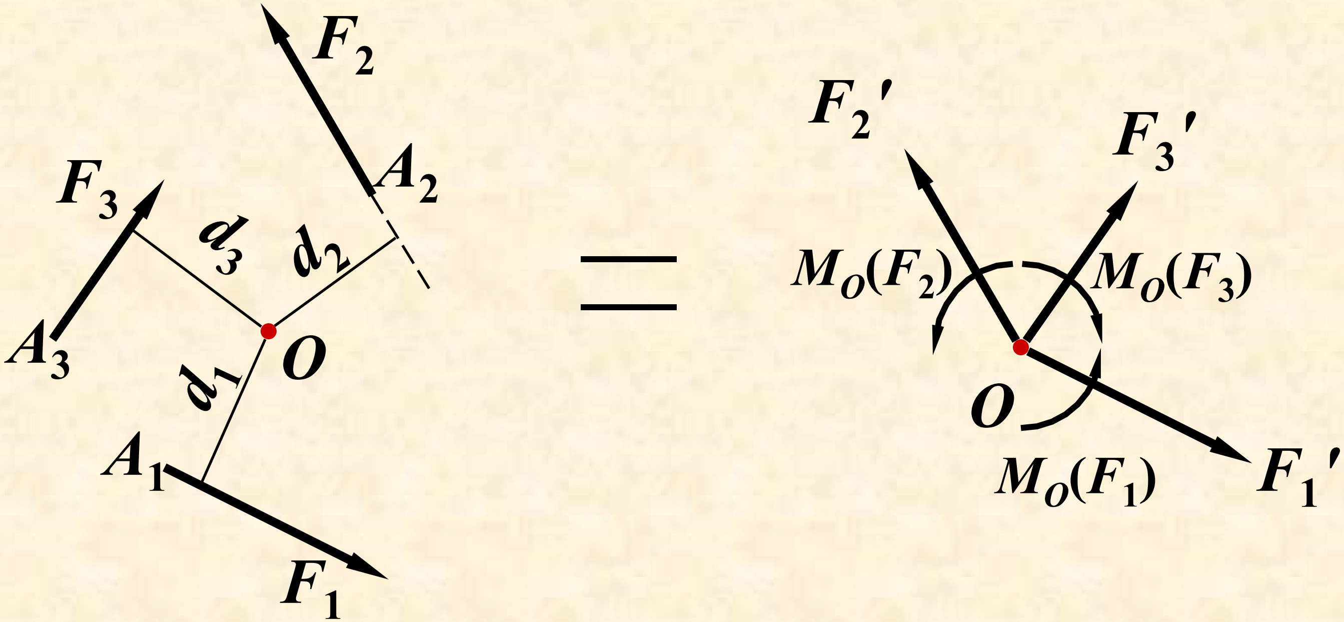
一、 平面任意力系向一点简化

利用力的平移定理，将平面任意力系 F_1、F_2、F_3 向作用面内任一点O 简化，点O 称为简化中心



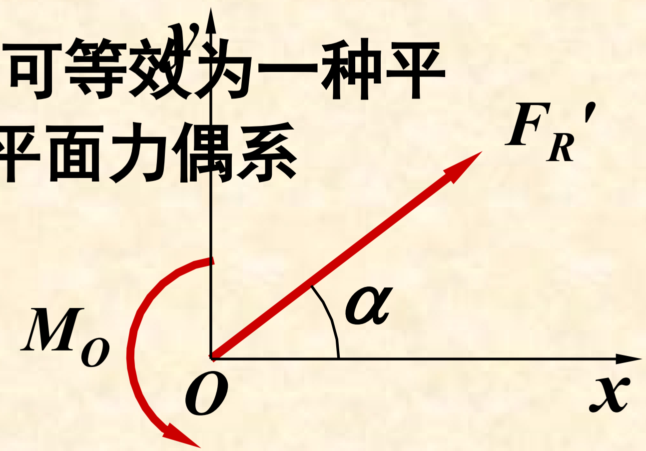
$M_O(F_1)=F_1d_1$　　$M_O(F_2)=F_2d_2$　　$M_O(F_3)=-F_3d_3$

§4.2 平面任意力系向一点简化



$$F_R' = F_1' + F_2' + F_3'$$
$$= F_1 + F_2 + F_3$$
$$= \sum F$$

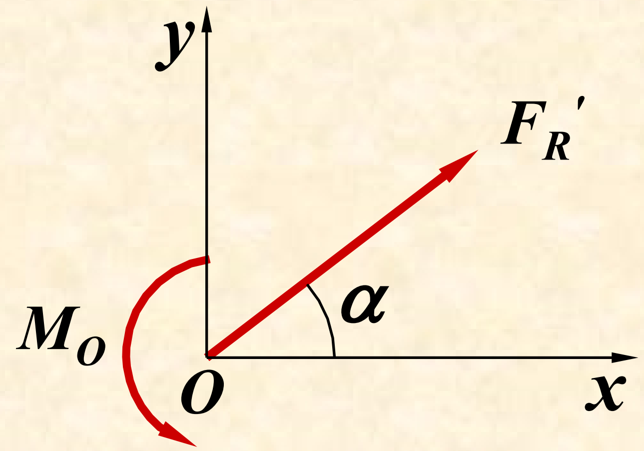
平面任意力系可等效为一种平面汇交力系和一种平面力偶系



$$M_O = M_O(F_1) + M_O(F_2) + M_O(F_3)$$
$$= \sum M_O(F)$$

§4.2 平面任意力系向一点简化

平面任意力系 (F_1、F_2 、… F_n)
向作用面内任一点O 简化可得



$F_R{}'$　原力系的主矢(主矢量)

M_O　原力系对简化中心的主矩

$$F_R{}' = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum F \quad \Rightarrow \quad F_{Rx}{}' = \sum F_x \quad F_{Ry}{}' = \sum F_y$$

主矢$F_R{}'$的大小：　$$F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_x)^2}$$

主矢$F_R{}'$的方向：　$$\tan\alpha = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

主矩：　$$M_O = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \ldots + M_O(F_n) = \sum M_O(F)$$

§4.2 平面任意力系向一点简化

平面任意力系向作用面内任意一点简化，一般可得一力和一力偶。

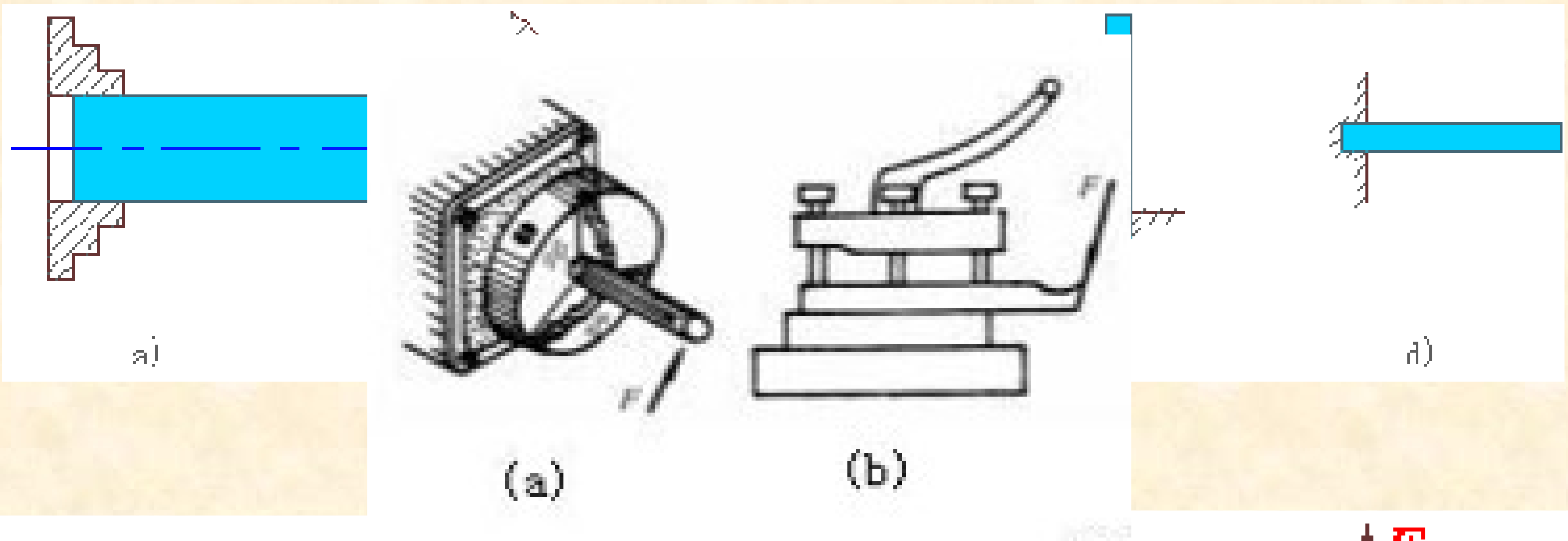
力的作用线经过简化中心，其力矢称为力系的主矢，等于力系诸力的矢量和。

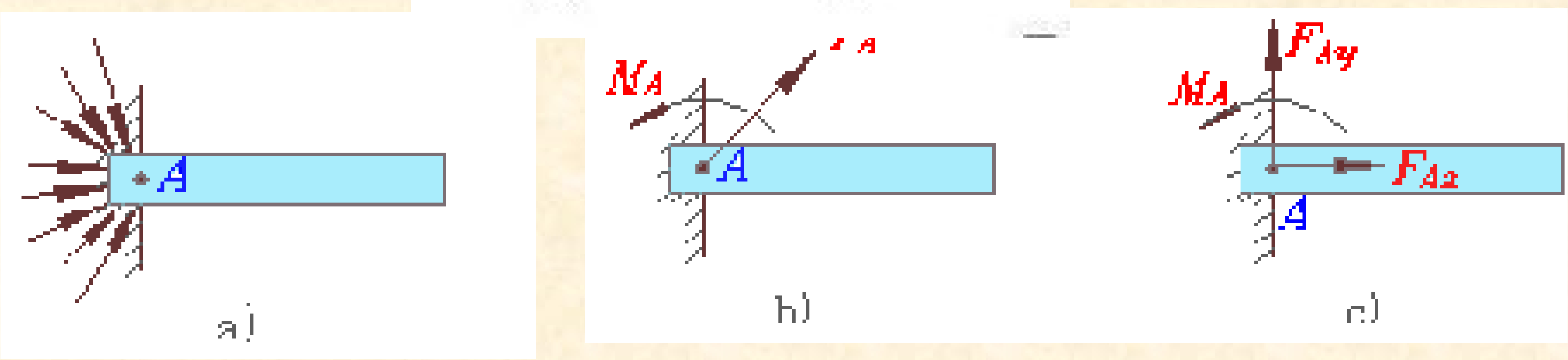
力偶作用于原平面，其力偶矩称为力系对简化中心的主矩，等于力系各力对简化中心之矩的代数和。

主矢与简化中心的选择无关；主矩一般与简化中心的选择有关

§4.2 平面任意力系向一点简化

固定端约束或插入端约束





二、 平面力系简化的最终成果

平面力系向一点 (简化中心) 简化的成果情况:

(1) $F_R'=0$，$M_O=0$　　(2) $F_R'\neq 0$，$M_O=0$

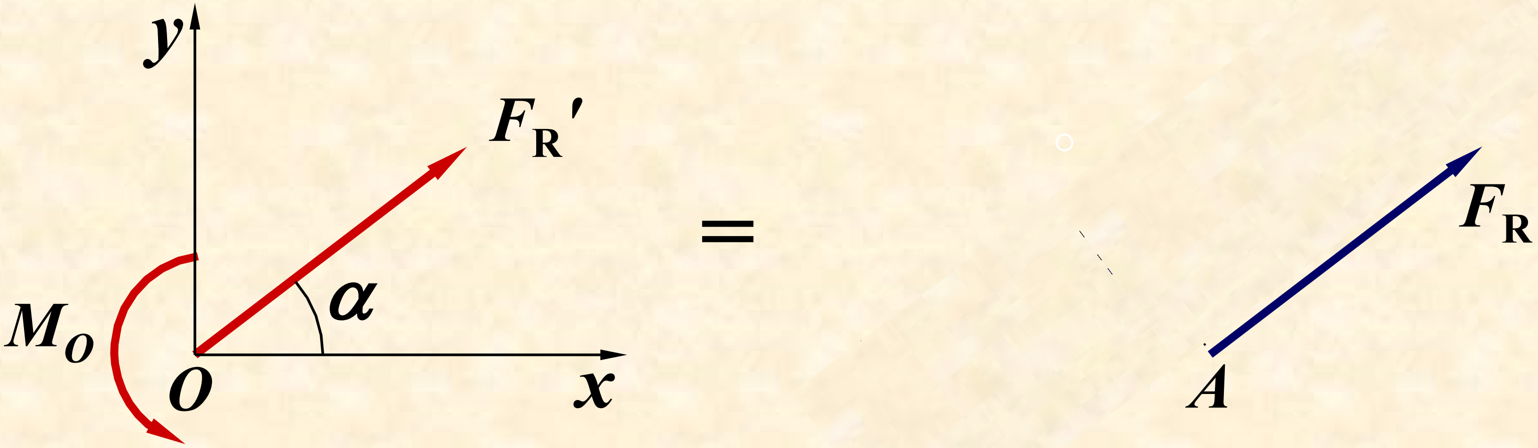
(3) $F_R'=0$，$M_O\neq 0$　　(4) $F_R'\neq 0$，$M_O\neq 0$

(1) $F_R'=0$，$M_O=0$　　原力系是一种平衡力系

(2) $F_R'\neq 0$，$M_O=0$　　原力系能够合成一种合力，即作用于简化中心的主矢

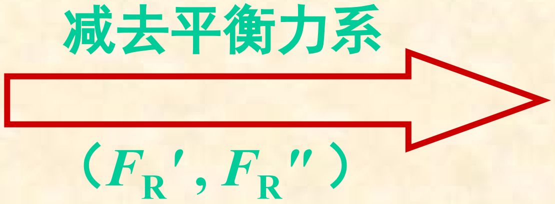
(3) $F_R'=0$，$M_O\neq 0$　　原力系合成一种力偶，合力偶矩等于主矩

(4) $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$ 能够进一步简化



$$F_R = -F_R'' = F_R'$$

$$d = \frac{|M_O|}{F_R'}$$

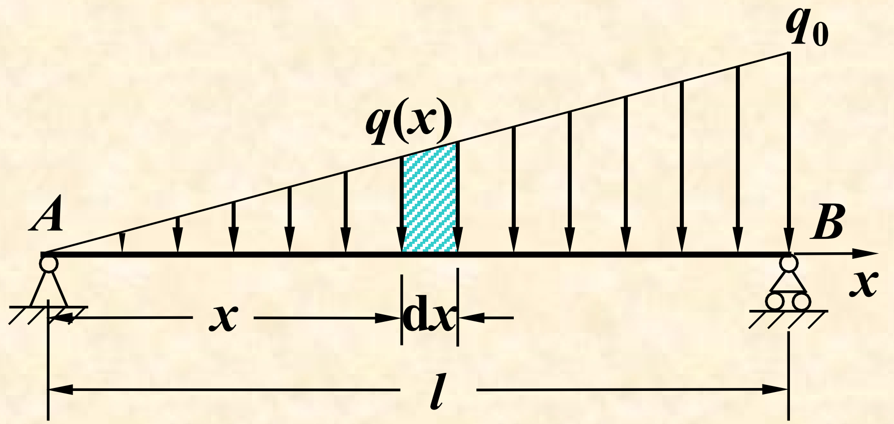


F_R 为力系的合力

例4-1 三角形分布载荷作用在水平梁AB上，如图所示。最大载荷集度为q_0，梁长l。试求该力系的合力。

解：

在梁上距A端为x处取一微段dx，其上作用力大小为$q(x)$ dx，其中$q(x)$为此处的载荷集度。由图可知，$q(x)=q_0x/l$，故分布载荷的合力为

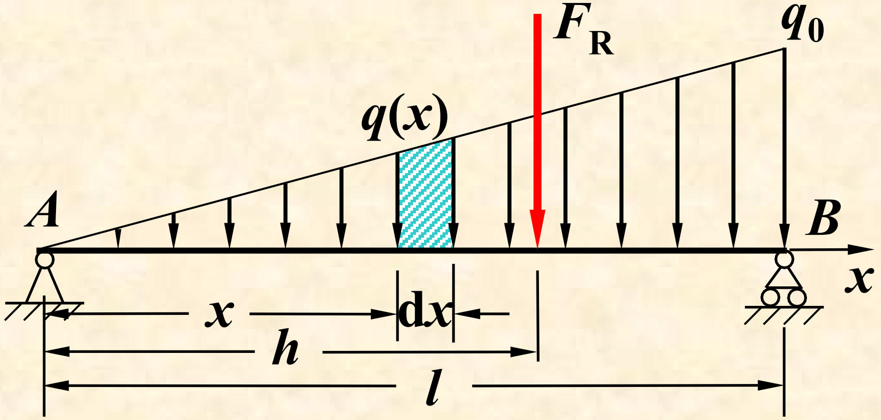


$$F_R=\int_0^l q(x)\mathrm{d}x=\int_0^l q_0\frac{x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}q_0l$$

求合力作用线位置。设合力F_R的作用线距A端的距离为h，在微段dx上的作用力对点A的矩为$-(q_x dx)x$，全部分布载荷对点A的矩为

$$-\int_0^l q(x)x\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^l q_0\frac{x}{l}x\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}q_0l^2$$



由合力矩定理，得

$$-F_Rh=-\frac{1}{3}q_0l^2$$

代入F_R的值，得 $h=\frac{2}{3}l$

§4-3　平面任意力系的平衡条件

刚体在平面任意力系作用下的平衡条件:

由 $F_R{}' = 0$，$M_O = 0$ 得到:

$$F'_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{matrix}$$

$$M_O = \sum M_O(F) = 0$$

平面任意力系平衡方程的基本形式:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases}$$