4.5 函数的应用（二）

函数的零点与方程的解

方程可以清晰、简洁地表示数量间的相等关系。在解决实际问题时，如工程设计、物理运动、化学反应速率、财务计算等领域，方程可以帮助我们将复杂情境转化为数学模型，并通过求解方程找到答案。

运用数学模型分析和解决问题时，会解方程就变得尤为重要.

本单元我们来学习运用函数性质求方程近似解的基本方法.

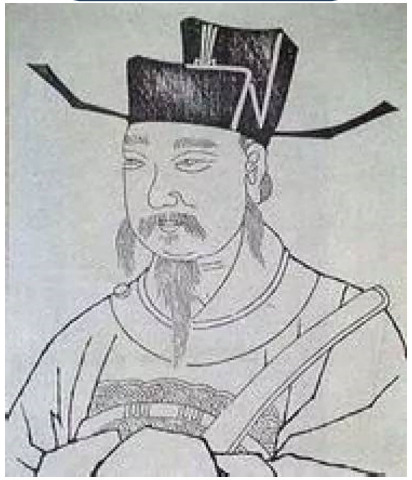
1世纪

刘徽《九章算术》 一次方程组

7世纪

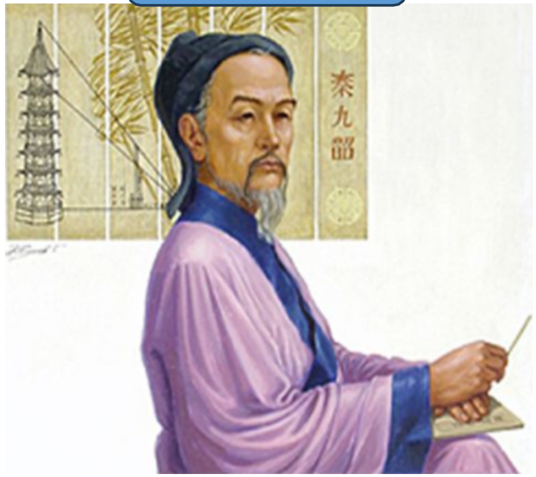
王孝通《缉古算经》解三次方程正根

11世纪



贾宪《解锁算书》解高次方程正根

13世纪



秦九韶《数书九章》 “正负开方术”解任意次方程正根

9世纪

花拉子米 一次、二次方程一般解

16世纪

卡尔达诺、塔尔塔利亚
三次方程一般解

16世纪

费拉里
四次方程一般解

19世纪

阿贝尔
五次及以上方程没有根式解

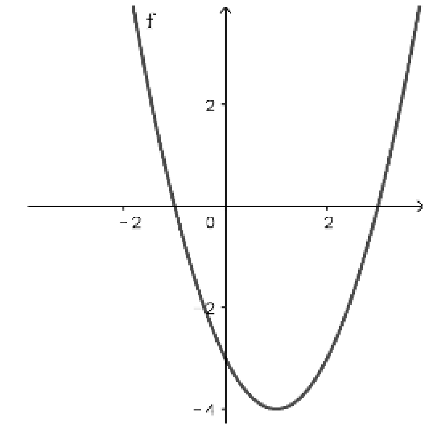
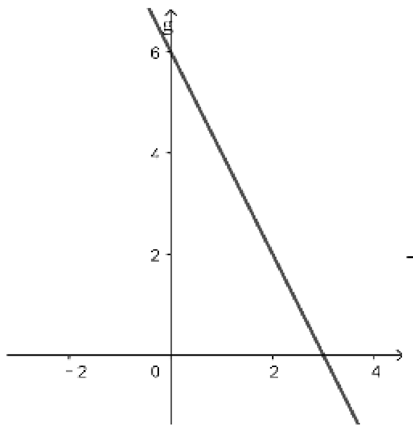
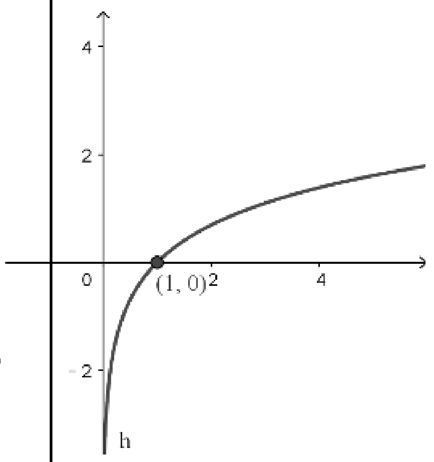
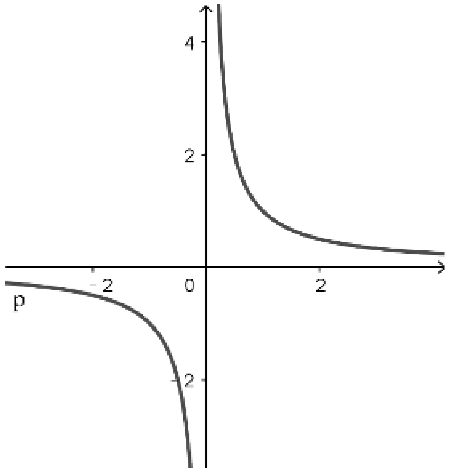
$$x^5 + 2x + 2 = 0$$

方程是否存在实数解？

方程的解是多少？

现代数学之父 华罗庚

要善于退，足够的退，退到最原始而不失重要的地方，是学好数学的一个诀窍。

方程	$x^2-2x-3=0$	$6-2x=0$	$\ln x=0$	$\frac{1}{x}=0$
方程的解	$x_1=-1, x_2=3$	$x=3$	$x=1$	无解
函数	$f(x)=x^2-2x-3$	$f(x)=6-2x$	$f(x)=\ln x$	$f(x)=\frac{1}{x}$
函数的图象				
函数图象与x轴公共点的坐标	(-1,0)、(3,0)	(3,0)	(1,0)	无

温故知新 形成概念

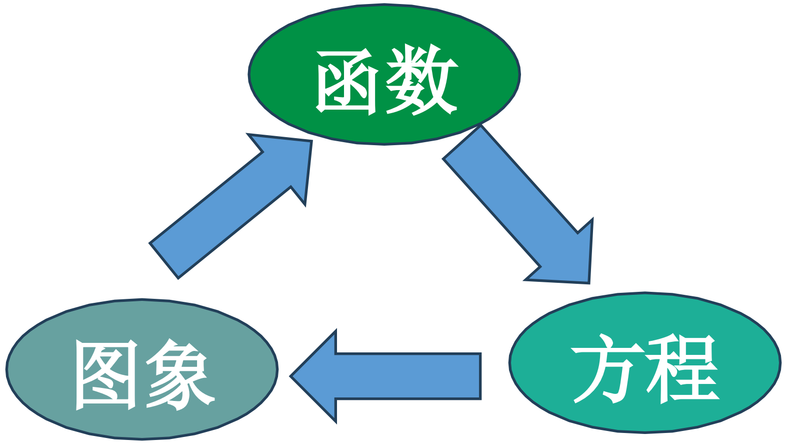
函数零点：

我们把使$f(x)=0$的实数x叫做函数$y=f(x)$的零点.

思考：零点是点吗？

零点是实数

x_0是函数$y=f(x)$的零点



x_0是$y=f(x)$的图象与x轴公共点的横坐标

x_0是方程$f(x)=0$的实数解

方程$f(x)=0$有实数解

$\Leftrightarrow$ 函数$y=f(x)$有零点

$\Leftrightarrow$ 函数$y=f(x)$的图象与x轴有公共点

师生互动 发现定理

动画展示

问题4：对于二次函数$f(x)=x^2-2x-3$，观察图象，我们发现它在区间$[a,b]$上有零点.此时

（1）函数图象与x轴有什么关系？

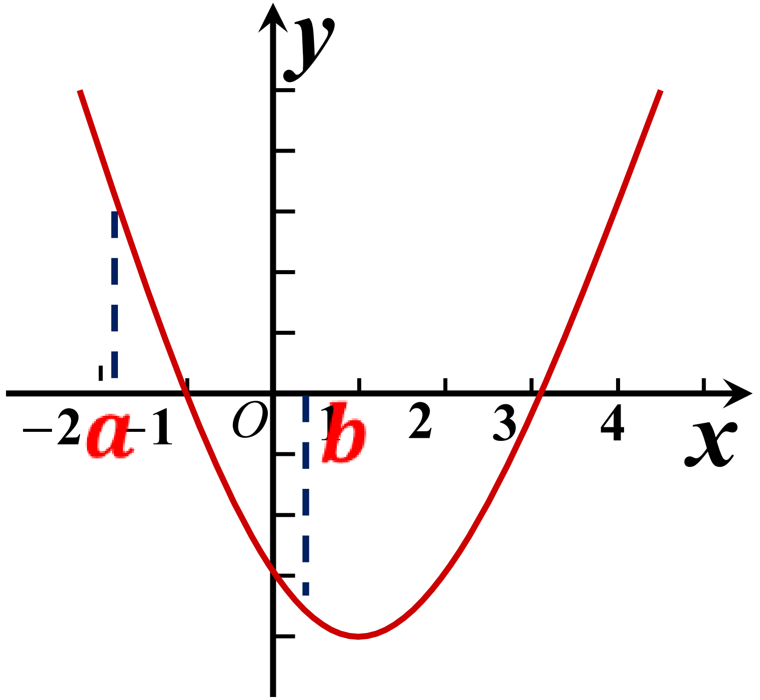
零点附近，函数的图象穿过x轴

形

（2）你认为应如何利用函数$f(x)$的取值来刻画这种关系？

数

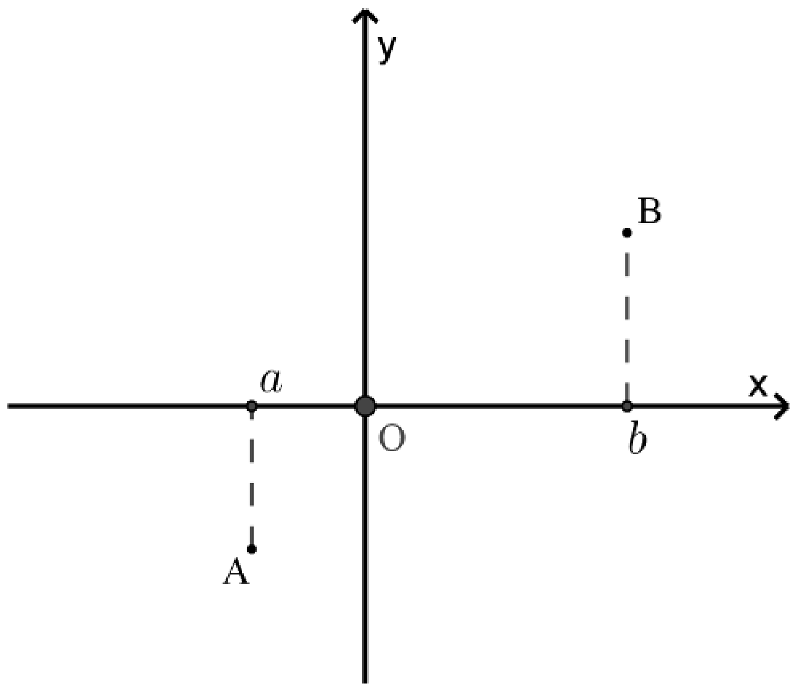
零点附近，函数值异号

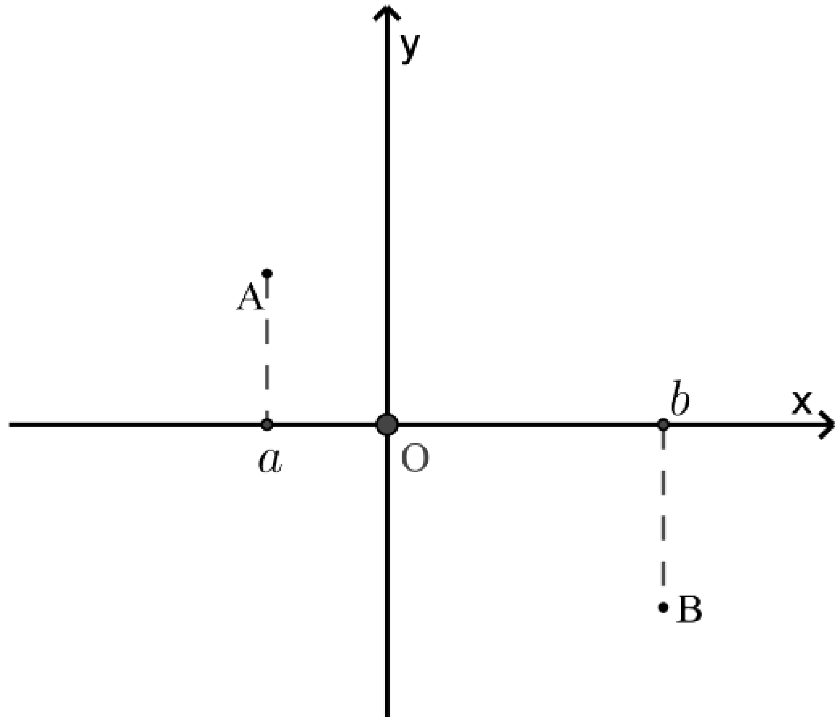


问题5：函数$f(x)$在区间$[2,4]$是否也有这种关系？

师生互动 发现定理

问题6：函数$y=f(x)$的图象经过A、B两点，请同学们将$f(x)$在区间$[a,b]$的可能图象补充完整，并讨论$f(x)$在区间$[a,b]$内零点的个数.





师生互动 发现定理

函数零点存在定理：

如果函数$y=f(x)$在区间[a, b]上的图象是一条__连续不断__的曲线，且有__$f(a)f(b)<0$__，那么，函数$y=f(x)$在区间(a, b)内至少有一个零点，即存在$c\in(a,b)$，使得__$f(c)=0$__，这个c也就是方程$f(x)=0$的解

加强版

条件： ①$f(x)$在[a,b]连续且单调；
②$f(a)f(b)<0$

结论： $f(x)$在(a,b)内有且只有一个零点