陕西省渭南市2023届高三下学期教学质量检测2（二模）数学试题

一、单选题

1．（2023·陕西渭南·统考二模）已知集合$A=\left\{x\left|y=\sqrt{2-x}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\log_2 x<1\right.\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(0,2)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$(0,2]$

2．（2023·陕西渭南·统考二模）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=20$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

3．（2023·陕西渭南·统考二模）已知$\{a_n\}$为等差数列，其前n项和为S_n，若$a_1=1$，$a_3=5$，$S_n=64$，则$n=$（　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

4．（2023·陕西渭南·统考二模）在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得n次测量分别得到x_1，x_2，…，x_n共n个数据.我们规定所测量物理量的"最佳近似值"a应该满足与所有测量数据的差的平方和最小.由此规定，从这些数据得出的"最佳近似值"a应是（　）

A．$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$　　B．$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{n}$　　C．$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$　　D．$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}$

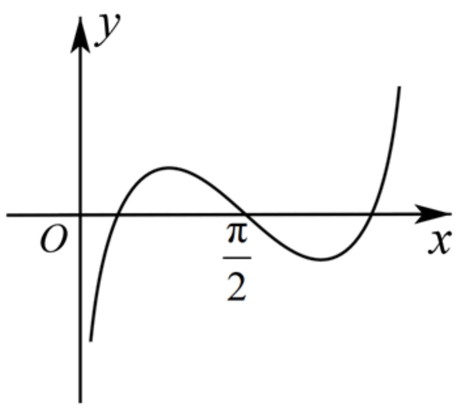
5．（2023·陕西渭南·统考二模）棣莫弗公式$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$（i为虚数单位）是由法国数学家棣莫弗（1667-1754）发现的.若复数z满足$z\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)=|1+\mathrm{i}|$，复数$z$对应的点在复平面内的（　）

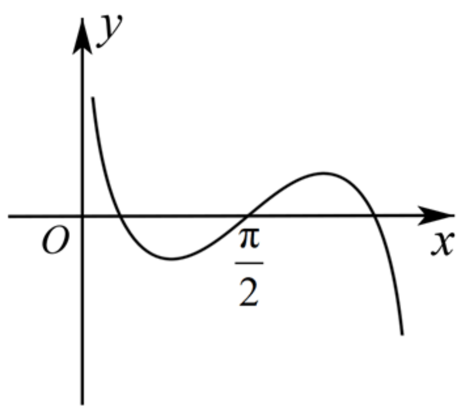
A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

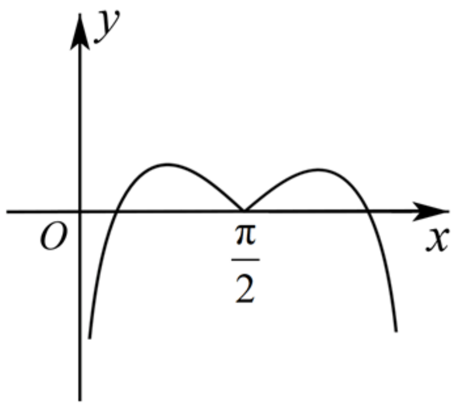
6．（2023·陕西渭南·统考二模）将抛物线$y^2=mx$绕其顶点顺时针旋转90°之后，正好与抛物线$y=2x^2$重合，则$m=$（　）

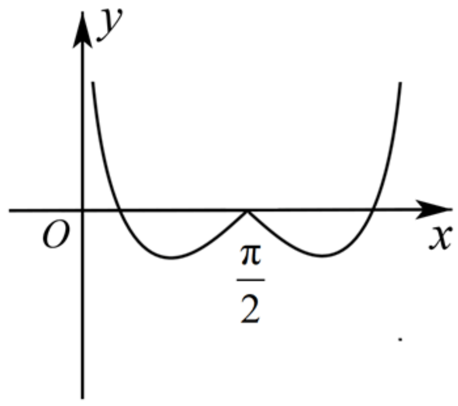
A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．2

7．（2023·陕西渭南·统考二模）函数$f(x)=[\ln(\pi-x)+\ln x]\cos x$的大致图像为（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

8.（2023·陕西渭南·统考二模）2022 年 2 月 28 日，国家统计局发布了我国 2021 年国民经济和社会发展统计公报，在以习近平同志为核心的党中央坚强领导下，各地区各部门沉着应对百年变局和世纪疫情，构建新发展格局，实现了“十四五”良好开局.2021 年，全国居民人均可支配收入和消费支出均较上一年有所增长，结合如下统计图表，下列说法中正确的是（　）

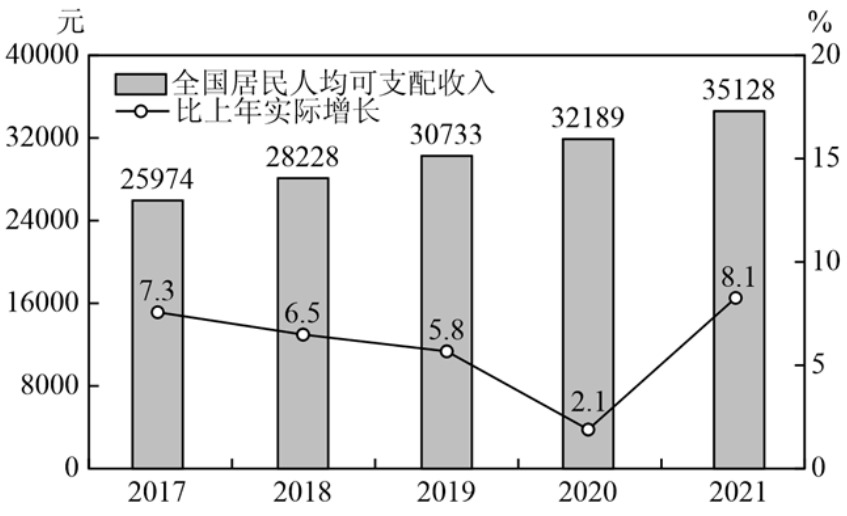


图 1：2017－2021 年全国居民人均可支配收入及其增长速度

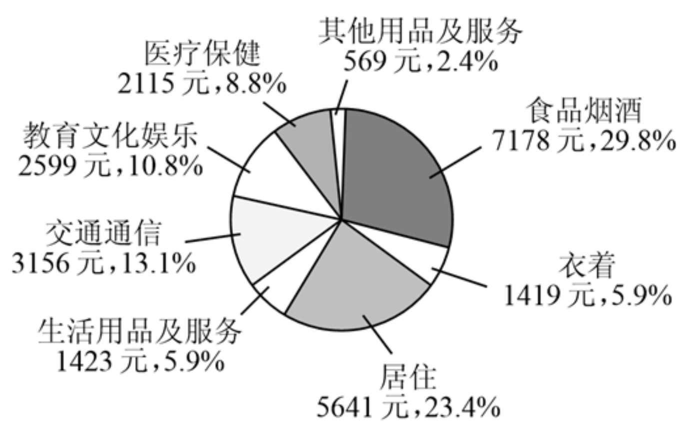


图 2：2021 年全国居民人均消费支出及其构成

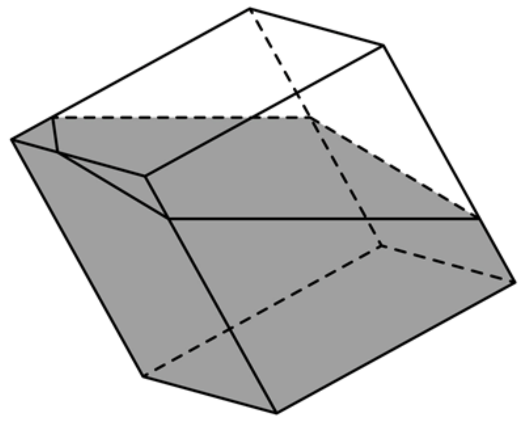
A．2017-2021 年全国居民人均可支配收入逐年递减

B．2021 年全国居民人均消费支出 24100 元

C．2020 年全国居民人均可支配收入较前一年下降

D．2021 年全国居民人均消费支出构成中食品烟酒和居住占比超过 60%

9.（2023·陕西渭南·统考二模）如图，一个棱长 1 分米的正方体形封闭容器中盛有 V 升的水，若将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，则 V 的取值范围是（　）



A．$\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　C．$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$

10．（2023·陕西渭南·统考二模）已知直线l过双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{2}=1$的左焦点F且与C的左、右两支分别交于A,B两点，设O为坐标原点，P为AB的中点，若$\triangle OFP$是以FP为底边的等腰三角形，则直线l的斜率为（　）

A．$\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$　　B．$\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

11．（2023·陕西渭南·统考二模）在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=4$，G为CD的中点，点P在线段BC_1（不含端点）上运动，点Q在棱BC上运动，M为空间中任意一点，则下列结论不正确的是（　）

A．异面直线DP与AD_1所成角的取值范围是$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

B．若$MA+MD=8$，则三棱锥$A-MBD$体积的最大值为$5\sqrt{3}$

C．$PQ+QG$的最小值为$3\sqrt{2}$

D．A_1P // 平面ACD_1

12．（2023·陕西渭南·统考二模）已知函数$f(x)=\sin x+\ln x$，将$f(x)$的所有极值点按照由小到大的顺序排列，得到数列$\{x_n\}$，对于$\forall n\in\mathbf{N}_+$，则下列说法中正确的是（　）

A．$n\pi<x_n<(n+1)\pi$　　B．$x_{n+1}-x_n<\pi$

C．数列$\left\{\left|x_n-\frac{(2n-1)\pi}{2}\right|\right\}$是递增数列　　D．$f(x_{2n})<-1+\ln\frac{(4n-1)\pi}{2}$

二、填空题

13．（2023·陕西渭南·统考二模）设$a>0$，$b>0$且$\frac{a}{2}+b=\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x$，则$\frac{2}{a+1}+\frac{1}{b}$的最小值是____________.

14．（2023·陕西渭南·统考二模）写出与圆$x^2+y^2=1$和圆$x^2+y^2+6x-8y+9=0$都相切的一条直线的方程____________.

15．（2023·陕西渭南·统考二模）甲、乙、丙3人去食堂用餐，每个人从A,B,C,D,E这5种菜中任意选用2种，则A菜恰有2人选用的情形共有______________种.（用数字作答）

16．（2023·陕西渭南·统考二模）若函数$y=f(x),x\in\mathrm{R}$的关系式由方程$x|x|+y|y|=4$确

定.则下述命题中所有真命题的序号为____________.

①函数 $y=f(x)$ 是减函数；

②函数 $y=f(x)$ 是奇函数；

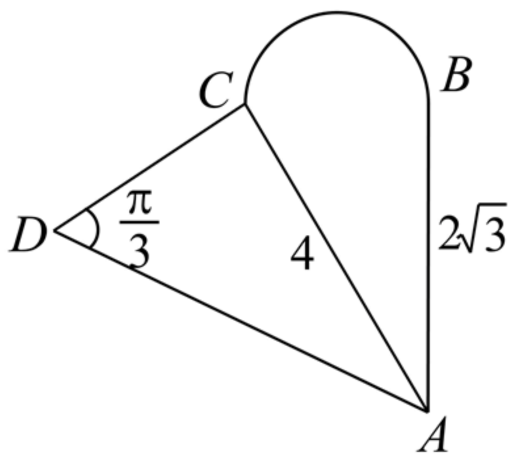
③函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$

④方程 $f(x)+x=0$ 无实数根；

⑤函数 $y=f(x)$ 的图像是轴对称图形.

三、解答题

17.（2023·陕西渭南·统考二模）随着生活水平的不断提高，人们更加关注健康，重视锻炼.通过“小步道”，走出“大健康”，健康步道成为引领健康生活的一道亮丽风景线.如图，$A-B-C-A$ 为某区的一条健康步道，AB,AC 为线段，$\overset{\frown}{BC}$ 是以 BC 为直径的半圆，$AB=2\sqrt{3}\,\text{km}$，$AC=4\,\text{km}.\angle BAC=\frac{\pi}{6}$



(1)求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度；

(2)为满足市民健康生活需要，提升城市品位，改善人居环境，现计划新建健康步道 $A-D-C$（B、D 在 AC 两侧），其中 AD,CD 为线段.若 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求新建的健康步道 $A-D-C$ 的路程最多可比原有健康步道 $A-B-C$ 的路程增加多少长度？

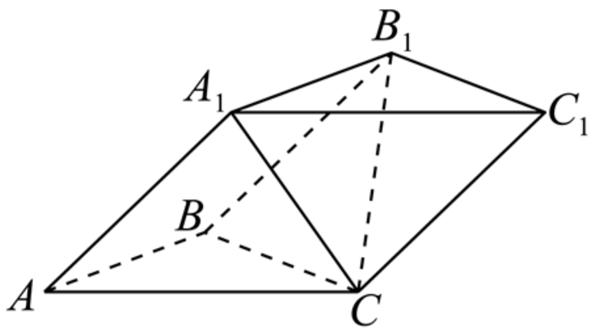
18.（2023·陕西渭南·统考二模）在数字通信中，信号是由数字“0”和“1”组成的序列.现连续发射信号 n 次，每次发射信号“0”和“1”是等可能的.记发射信号“1”的次数为 X .

(1)当 $n=6$ 时，求 $P(X\le 2)$；

(2)已知切比雪夫不等式：对于任一随机变量 Y，若其数学期望 $E(Y)$ 和方差 $D(Y)$ 均存在，则对任意正实数 a，有 $P(|Y-E(Y)|<a)\ge 1-\frac{D(Y)}{a^2}$.根据该不等式可以对事件“$|Y-E(Y)|<a$”的概率作出下限估计.为了至少有98%的把握使发射信号“1”的频率在0.4

与0.6之间，试估计信号发射次数n的最小值.

19.（2023·陕西渭南·统考二模）在斜三棱柱（侧棱不垂直于底面）$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$AA_1C_1C\perp$底面ABC，底面$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，$A_1A=A_1C$，$A_1A\perp A_1C$.



（1）求证：$A_1C_1\perp B_1C$；

（2）求二面角$B_1-A_1C-C_1$的正弦值

20.（2023陕西渭南统考二模）在直角坐标系xOy中，已知椭圆$E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右顶点、下顶点、右焦点分别为A，B，F.

(1)若直线BF与椭圆E的另一个交点为C，求四边形$ABOC$的面积；

(2)设M，N是椭圆E上的两个动点，直线OM与ON的斜率之积为$-\frac{1}{2}$，若点P满足：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$.问：是否存在两个定点$G$，$H$，使得$|PG|+|PH|$为定值？若存在，求出$G$，$H$的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（2023·陕西渭南·统考二模）已知函数$f(x)=e^x,g(x)=\frac{1+\ln x}{x}-m.(m\in\mathbf{R})$

(1)证明：$f(x)\geq x+1$；

(2)若$f(x)\geq g(x)$，求实数m的取值范围；

(3)证明：$\sum\limits_{k=1}\left(\frac{1}{k}\right)^k<\frac{e}{e-1}.(n\in N_+)$

22.（2023·陕西渭南·统考二模）在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{\cos\alpha},\\ y=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha},\end{cases}$（$\alpha$为参数，$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

(1)求曲线C的普通方程和直线l的直角坐标方程；

(2)已知点$P(2,0)$，若直线l与曲线C交于A，B两点，求$\left|\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}\right|$的值.

23．（2023·陕西渭南·统考二模）已知函数$f\left(x\right)=\left|x+a\right|+2\left|x-1\right|$．

(1)当$a=1$时，求$f\left(x\right)$的最小值；

(2)若$a>0$，$b>0$时，对任意$x\in\left[1,2\right]$使得不等式 $f\left(x\right)>x^2-b+1$恒成立，证明：

$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2>2$．

参考答案：

1．B

【分析】求集合 A 中函数的定义域，解集合 B 中的不等式，得到这两个集合再求交集.

【详解】函数 $y=\sqrt{2-x}$ 有意义，则有 $2-x\geq 0$，即 $x\leq 2$，可得 $A=\{x|x\leq 2\}$，

由不等式 $\log_2 x<1$，解得 $0<x<2$，可得 $B=\{x|0<x<2\}$，

则 $A\cap B=\{x|0<x<2\}$.

故选：B.

2．C

【分析】由数量积运算求得 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，再根据数量积定义求和夹角余弦，从而得夹角.

【详解】$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=20$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=4^2-20=-4$，

$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-4}{4\times 2}=-\dfrac{1}{2}$，而 $<\vec{a},\vec{b}>\in[0,\pi]$，所以 $<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{2\pi}{3}$.

故选：C.

3．C

【分析】根据 $a_1=1$，$a_3=5$，求得公差 d，再代入等差数列的前 n 项和公式,计算即可.

【详解】$\because a_1=1$，$a_3=5$，$\therefore d=\dfrac{a_3-a_1}{3-1}=\dfrac{5-1}{2}=2$，

$\because S_n=a_1\cdot n+\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot d=n+\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 2=64$，解得：$n=8$.

故选：C.

4．A

【分析】$f(a)=(a-x_1)^2+(a-x_2)^2+\cdots+(a-x_n)^2=na^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)a+(x_1^2+\cdots+x_n^2)$,看成关于 a 的二次函数，即可求解.

【详解】根据题意得：

$f(a)=(a-x_1)^2+(a-x_2)^2+\cdots+(a-x_n)^2=na^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)a+(x_1^2+\cdots+x_n^2)$,

由于 $n>0$, 所以 $f(a)$ 是关于 a 的二次函数，因此当 $a=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 即 $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ 时，$f(a)$ 取得最小值.

故选：A.

5．D

【分析】根据复数运算求得 z，进而确定 z 对应点所在象限.

【详解】依题意，$z\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$z\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$，

$z\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$，

$z=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$，

由于 $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}>0,-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}<0$，

所以 z 对应点 $\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8},-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)$ 在第四象限.

故选：D

6．A

【分析】根据抛物线旋转规律可得，其焦点坐标从 x 轴负半轴旋转到 y 轴正半轴，即可得 $m=-\frac{1}{2}$.

【详解】根据题意可得抛物线 $y^2=mx$ 的焦点坐标为 $\left(\frac{m}{4},0\right)$，

抛物线 $y=2x^2$ 的标准方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$，可得其焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$，

易知 $\left(\frac{m}{4},0\right)$ 绕原点顺时针旋转 90° 之后得到 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$，即可得 $\frac{m}{4}=-\frac{1}{8}$，

解得 $m=-\frac{1}{2}$.

故选：A

7．A

【分析】先求出定义域，由解析式得到 $f(\pi-x)=-f(x)$，判断出图像关于 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称.排除 C、D；再利用特殊点 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的正负排除 B，即可得到正确答案

【详解】要使函数 $f(x)=\left[\ln(\pi-x)+\ln x\right]\cos x$ 有意义，只需 $\begin{cases}\pi-x>0\\x>0\end{cases}$，解得：$0<x<\pi$，即函数的定义域为 $(0,\pi)$.

因为 $f(\pi-x)=\left[\ln(\pi-(\pi-x))+\ln(\pi-x)\right]\cos(\pi-x)=\left[\ln x+\ln(\pi-x)\right](-\cos x)=-f(x)$，

所以$f(x)$的图像关于$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称.排除C、D；

令$f(x)=\left[\ln(\pi-x)+\ln x\right]\cos x=0$，解得：

$x_1=\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4}}{2}\approx 0.359, x_2=\frac{\pi}{2}, x_3=\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4}}{2}\approx 2.782$.

所以$x_1<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

又$f(x_1)=0$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left[\ln\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\ln\frac{\pi}{3}\right]\cos\frac{\pi}{3}>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[\ln\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\ln\frac{\pi}{2}\right]\cos\frac{\pi}{2}=0$.

对照选项A、B的图像，选A.

故选：A

8．B

【分析】根据条形图、折线图、扇形图等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A选项，根据条形图可知，2017-2021年全国居民人均可支配收入逐年递增，A选项错误.

B选项，根据扇形图可知，2021年全国居民人均消费支出为：

5641+1419+7178+569+2115+2599+3156+1423= 24100元，B选项正确.

C选项，根据条形图可知，2020年全国居民人均可支配收入较前一年上升，C选项错误.

D选项，2021年全国居民人均消费支出构成中食品烟酒和居住占比：

$\frac{7178+5641}{24100}\times 100\%\approx 53.2\%<60\%$，D选项错误.

故选：B

9．A

【分析】找到水最多和水最少的临界情况，如图分别为多面体$ABCDA_1B_1D_1$和三棱锥$A-A_1BD$，从而可得出答案.

【详解】将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，

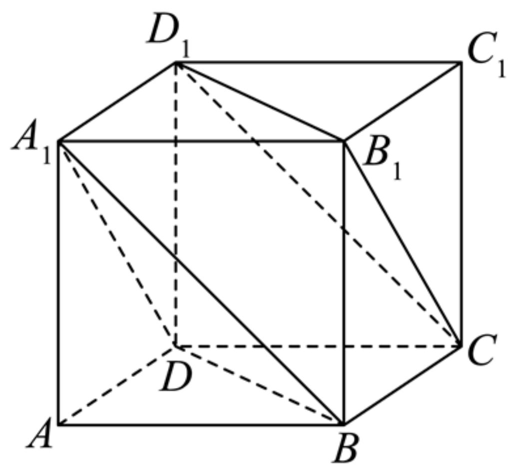
则如图，水最少的临界情况为，水面为面A_1BD，

水最多的临界情况为多面体 $ABCDA_1B_1D_1$，水面为BC_1D_1，

因为$V_{A-A_1BD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{6}$，

$V_{ABCDA_1B_1D_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{C-B_1C_1D_1}=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{5}{6}$，

所以$\frac{1}{6}<V<\frac{5}{6}$，即$V\in\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$.



故选：A.

10．D

【分析】设出直线l的方程并与双曲线方程联立，化简写出根与系数关系，由$|OP|=c$列方程来求得直线l的斜率.

【详解】对于双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{2}=1$，$a=1,b=\sqrt{2},c=\sqrt{3}$，

所以$F\left(-\sqrt{3},0\right)$，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$，

设直线l的斜率为k，要使直线l与双曲线C的左右两支都相交，则$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，

直线l的方程为$y=k\left(x+\sqrt{3}\right)$，

由$\begin{cases}y=k\left(x+\sqrt{3}\right)\\x^2-\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$消去$y$并化简得$\left(2-k^2\right)x^2-2\sqrt{3}k^2x-3k^2-2=0$，

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

则$x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}k^2}{2-k^2},y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2\sqrt{3}k=k\cdot\frac{2\sqrt{3}k^2}{2-k^2}+2\sqrt{3}k=\frac{4\sqrt{3}k}{2-k^2}$，

由于P是AB的中点，所以$P\left(\frac{\sqrt{3}k^2}{2-k^2},\frac{2\sqrt{3}k}{2-k^2}\right)$.

由于$\triangle OFP$是以FP为底边的等腰三角形，

所以$|OP|=|OF|=c=\sqrt{3}$，

即$\left(\frac{\sqrt{3}k^2}{2-k^2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}k}{2-k^2}\right)^2=3$，整理得$k^2=\frac{1}{2}$，

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

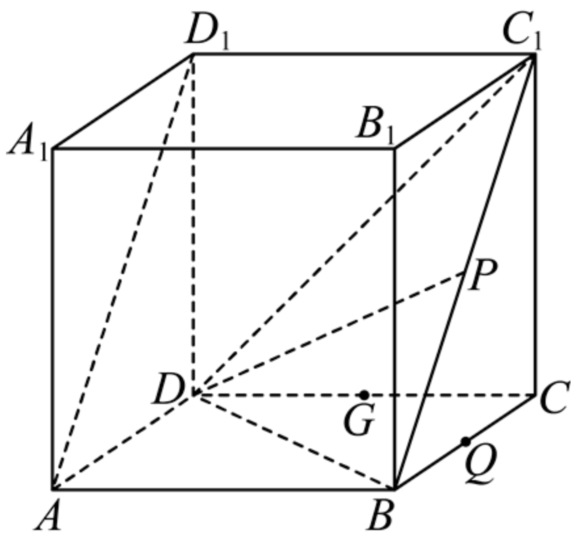
故选：D

11．B

【分析】对于 A，将异面直线平移可知直线 DP 与 AD_1 所成的角即为直线 DP 与 BC_1 所成的角，即可得 A 正确；对于 B，易知点 M 的轨迹是椭球表面，根据等体积法可得当点 M 在 AD 中点的正上方时，三棱锥 $A-MBD$ 的体积最大值为 $V_{M-ABD}=\frac{16}{3}\sqrt{3}$，即 B 错误；对于 C，将平面展开可得当 G,P,Q 三点共线，$PQ+QG$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$，即 C 正确；对于 D，利用面面平行的性质可得平面 A_1C_1B// 平面 ACD_1，又 $AP\subset$ 平面 A_1C_1B，

所以 A_1P // 平面 ACD_1，即 D 正确.

【详解】对于 A，如下图所示：



易知 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $AD_1//BC_1$，

所以异面直线 DP 与 AD_1 所成的角即为直线 DP 与 BC_1 所成的角，又点 P 在线段 BC_1（不含端点）上运动，

可知 $\triangle BC_1D$ 是等边三角形，当点 P 趋近于 BC_1 两端时，直线 DP 与 AD_1 所成的角大于且趋近于 $\frac{\pi}{3}$，

当点 P 为 BC_1 的中点时，直线 DP 与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$，

所以异面直线 DP 与 AD_1 所成角的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，即 A 正确；

对于 B，若 $MA+MD=8$，又 $AD=4$，所以在同一平面内，点 M 的轨迹是以 A,D 为焦点的椭圆，

又因为 M 为空间中任意一点，所以点 M 的轨迹是长轴为 8，短轴为 $4\sqrt{3}$，焦距 $AD=4$ 的椭球表面，