专题 11　开放探究　2021 届中考数学压轴大题专项训练（解析版）

1．定义：到三角形的两个顶点距离相等的点，叫做三角形的“中垂心”．如图 1，在△ABC 中，PA=PB ，则点 P 叫做△ABC 的“中垂心”．

（1）根据定义，中垂心可能在三角形顶点处的三角形有________（举一个例子即可）；

（2）应用：如图 2；在△ABC 中，请画出“中垂心”P，使 PA=PB=PC ．（保留作图痕迹，不写画法）

（3）探究：△如图 3，已知△ABC 为直角三角形，△C=90°，△ABC=60°，AC= $4\sqrt{3}$，“中垂心”P在 AC 边上，求 PA 的长．

△如图 4，若 PA=PB 且“中垂心”P在△ABC 内部，总有 AC+BC　2AP ，请说明理由．

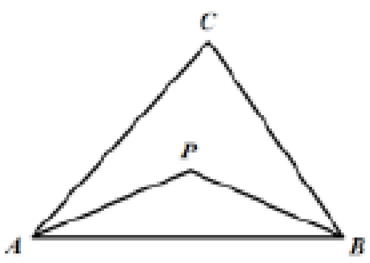


图1

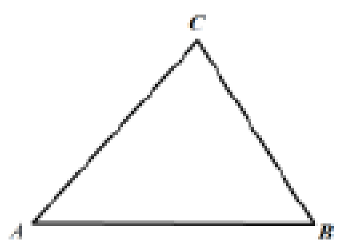


图2

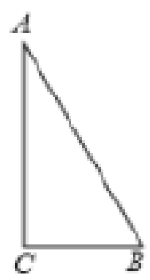


图3

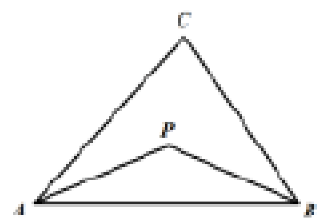


图 4

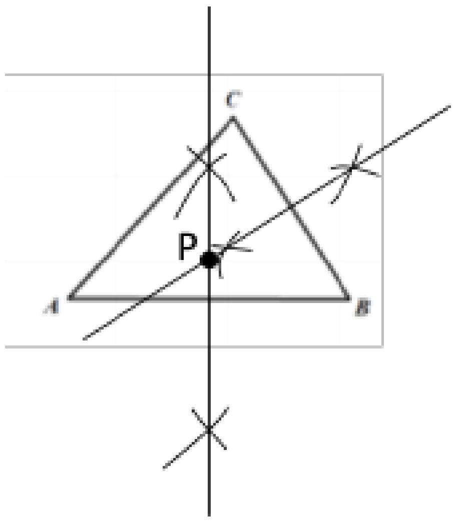
【解析】解：（1）根据题意，若点 C 为△ABC 的“中垂心”

可得 CA=CB

△△ABC 为等腰三角形

故答案为：等腰三角形（答案不唯一）；

（2）分别作出 BC 和 AB 的垂直平分线，交于点 P



根据垂直平分线的性质可得 PA=PB=PC

△点 P 即为所求；

（3）△△△C=90°，△ABC=60°，

△△A=90°－△ABC=30°

△AB=2BC

设 BC=x，则 AB=2x

△$BC^2+AC^2=AB^2$

△$x^2+(4\sqrt{3})^2=(2x)^2$

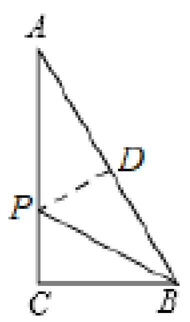
解得：x=4 或-4（不符合实际，舍去）

△BC=4，AB=8

△P在 AC 边上，△C=90°

△PB＞PC，即不存在“中垂心”P，使 PB=PC

若 PA=PB，如下图所示



设 PA=PB=a ，则 PC=AC －PA= $4\sqrt{3}-a$

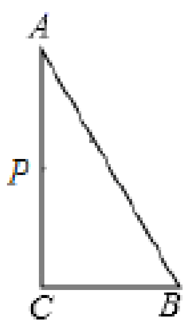
△$PC^2+BC^2=BP^2$

△（$4\sqrt{3}$ －a）$^2+4^2=a^2$

解得：a=$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

即 PA= $\frac{8\sqrt{3}}{3}$；

若 PA=PC ，如下图所示



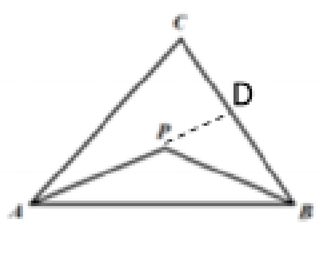
则点 P 为 AC 的中点

△PA=$\frac{1}{2}$AC $=2\sqrt{3}$

综上：PA= $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 或 $2\sqrt{3}$；

△理由如下

延长 AP 交 BC 于 D



根据三角形的三边关系可得：AC ＋CD ＞AD ，DP ＋DB ＞PB

△AC＋CD ＋DP ＋DB ＞AD ＋PB

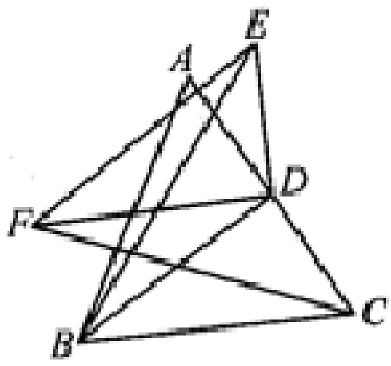
△AC＋（CD ＋DB ）＋DP ＞PA ＋DP ＋PB

△AC＋BC ＞PA ＋PB

△PA=PB

△AC+BC 2AP

2．如图，在 ABC 中，D 为 AC 的中点，将 ABD 绕点 D 顺时针旋转 0 360 得到 EFD ，连结 BE 、CF ．



（1）若 ABC 为等边三角形，试探究 BE 与 CF 有何数量关系？证明你的结论；

（2）若 ABC 为等边三角形，当 的值为多少时，EE AB ？

（3）当 ABC 不是等边三角形时，（1）中结论是否仍然成立？若不成立，请添加一个条件，使得结论成立，并说明理由.

【解析】解 （1）BE CF ，证明如下：

△BD 为等边 ABC 的中线，△BD AC ，即 BDA BDC 90 ，△ EDA FDB ，△ EDA BDA FDB BDC ，即 EDB CDF ，由旋转的性质得到 DE DA DC ，BD FD ，△ EDB CDF ，△BE CF ．

（2） 60 或 240.

当 60 时，由 ABC 为等边三角形，得到 A 60 ，△ A EDA 60 ，△ED // AB ；

当 240 时， A EDC 60 ，△ED // AB ．

（3）不成立，添加的条件为 BA BC 理由如下：

△BA BC ，DA DC ，△BD AC ，即 BDC BDA 90 .△ EDA FDB ，△ EDA BDA FDB BDC ，即 EDB CDF .由旋转的性质得到 BD FD ，DA DC DE ，△ EDB CDF ，△BE CF .

3．在△ABC 中，AB =AC，点 D 与点 E 分别在 AB、AC 边上，DE //BC，且 DE =DB，点 F 与点 G 分别在 BC、AC 边上，△FDG $\frac{1}{2}$△BDE .

（1）如图 1，若△BDE =120°，DF △BC，点 G 与点 C 重合，BF =1，直接写出 BC =____；

（2）如图 2，当 G 在线段 EC 上时，探究线段 BF、EG、FG 的数量关系，并给予证明；

（3）如图 3，当 G 在线段 AE 上时，直接写出线段 BF、EG、FG 的数量关系：______________.

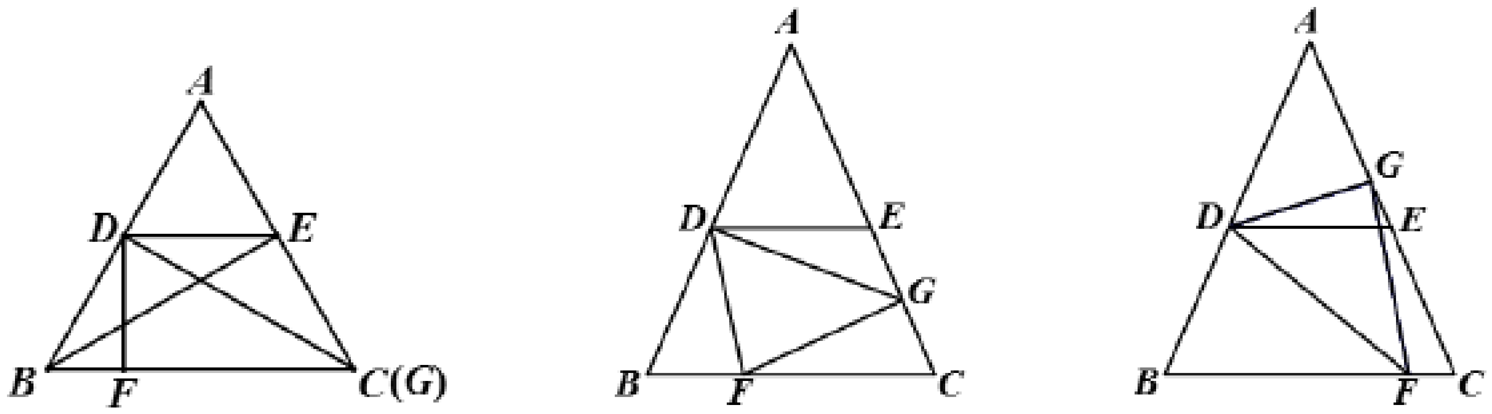


图 1　　　图 2　　　图 3

【解析】（1）△DE△BC，

△△BDE+△ABC=180°，

△△BDE=120°，

△△ABC=60°，

△DF△BF，

△△BFD=90°，

△DF=BF•tan60° 1 $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$，

△△CDF $\frac{1}{2}$△BDE=60°，△DFC=90°，

△CF=DF•tan60° $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ 3，

△BC=BF+CF=1+3=4 ；

（2）如图 2 中，结论：FG=BF+EG .

理由：在 EA 上截取 EH，使得 EH=BF .

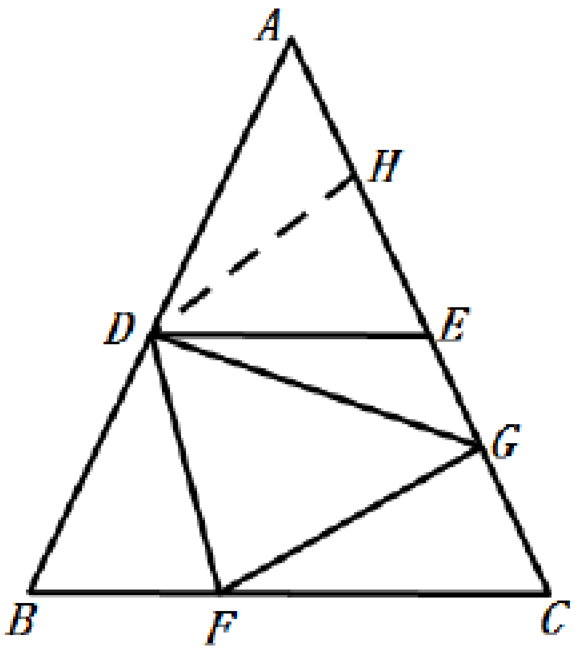


图 2

△AB=AC ，

△△B=△C,

△DE△BC，

△△ADE=△B，△AED=△C，

△△ADE=△AED ，

△△DEH=△B，

在△DBF 和△DEH 中，

BF EH
B DEH ，
BD DE

△△DBF△△DEH（SAS ），

△DF=DH ，△BDF=△EDH ，

△△FDG $\frac{1}{2}$△BDE，

△△BDF+△EDG=△EDH+△EDG=△GDH $\frac{1}{2}$△BDE，

△△GDF=△GDH ，

在△DGF 和△DGH 中，

DF　DH
GDF　　GDH　，
DG　DG

△△DGF△△DGH（SAS），

△FG=HG，

△HG=EG+HE=EG+BF　，

△FG=BF+EG　；

（3）如图 3 中，结论：FG=BF −EG．

理由：在射线 EA 上截取 EH，使得 EH=BF　．

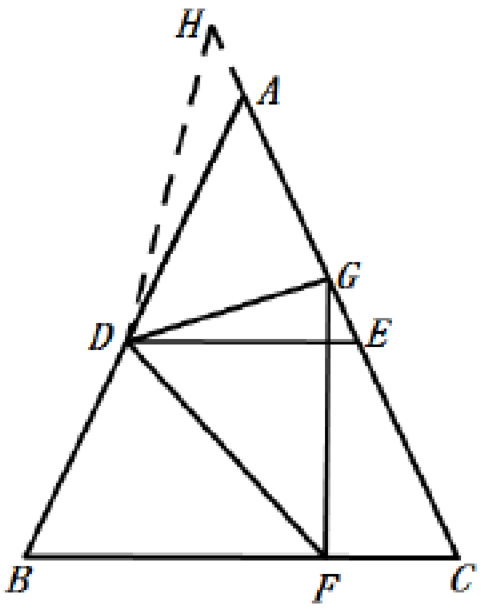


图 3

△AB=AC，

△△B=△C,

△DE△BC，

△△ADE=△B，△AED=△C，

△△ADE=△AED，

△△DEH=△B，

在△DBF 和△DEH 中，

BF　EH
B　DEH　，
BD　DE

△△DBF△△DEH（SAS），

△DF=DH，△BDF=△EDH，

△△BDE=△FDH ，

△△FDG $\frac{1}{2}$△BDE $\frac{1}{2}$△FDH ，

△△GDF=△GDH ，

在△DGF 和△DGH 中，

$$\begin{array}{ccc} DF & & DH \\ GDF & & GDH \\ DG & & DG \end{array},$$

△△DGF△△DGH （SAS ），

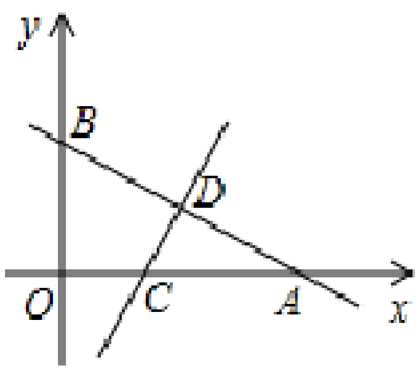
△FG=HG ，

△HG=HE -GE=BF -EG ，

△FG=BF= -EG .

4．如图，点 A 的坐标为 16, 0 ，点 B 的坐标为 0, 12 ，将 AOB 沿直线 CD 对折，使点 A 与点 B 重合，直线 CD 与 x 轴交于点 C 与 AB 交于点 D .

△



（1）求出 AB 的长度；

（2）求 ADC 的面积；

（3）在平面上是否存在点 P ，使得△PAB 是等腰直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由.

【解析】解：（1）△点 A 的坐标为 16, 0 ，点 B 的坐标为 0, 12 ，

△OA ＝16，OB ＝12，

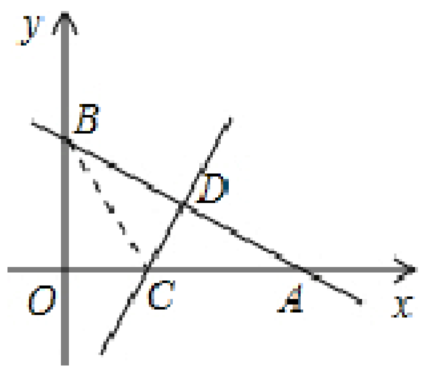
在 Rt△AOB 中，AB $\sqrt{OA^2 \quad OB^2}$

$\sqrt{16^2 \quad 12^2}$

20，

△AB ＝20；

（2）如图，连接 BC，



△折叠，

△AC ＝BC，△ADC ＝△BDC ＝90°，AD ＝BD ＝10，

设 AC ＝BC ＝x，则 OC ＝16－x，

在 Rt△BOC 中，$OC^2 \quad OB^2 \quad BC^2$，

△$(16 \quad x)^2 \quad 12^2 \quad x^2$，

解得 $x \quad \frac{25}{2}$，

△$AC \quad \frac{25}{2}$，

△在 Rt△ACD 中，$CD \quad \sqrt{AC^2 \quad AD^2}$

$\sqrt{(\frac{25}{2})^2 \quad 10^2}$

$\frac{15}{2}$

△$S_{\triangle ADC} \quad \frac{1}{2} AD \quad CD$

$\frac{1}{2}$ 10 $\frac{15}{2}$

$\frac{75}{2}$,

△ ADC 的面积为$\frac{75}{2}$;

(3)如图 1,当点 P 在第一象限,PB =AB 且△PBA =90°时,
△

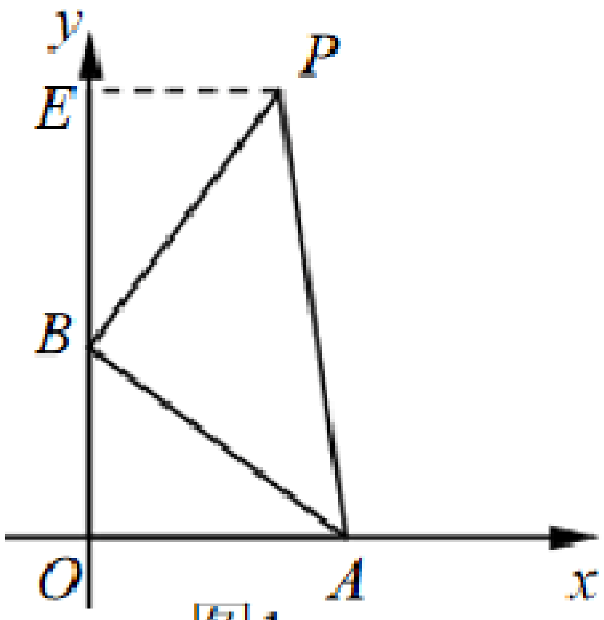


图1

过点 P 作 PE△OB 交 y 轴于点 E,

则△PEB=△AOB =90°,

△△PBE+△BPE=90°,

△△PBA=90°,

△△PBE+△ABO =90°,

△△BPE=△ABO ,

△△PEB=△AOB ,△BPE=△ABO ,PB =AB ,

△△PEB△△BOA ,

△PE=OB =12,BE =OA =16,

△OE=BE +OB =28,

△点 P 的坐标为（12，28），

如图 2，当点 P 在第三象限，PB =AB 且△PBA =90°时，

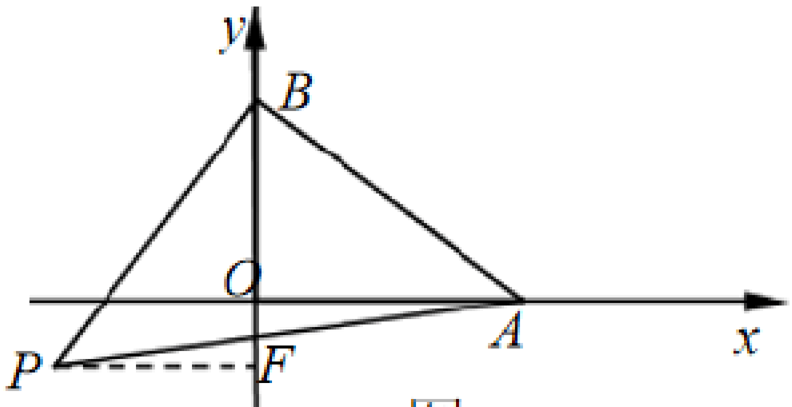


图2

过点 P 作 PF△OB 交 y 轴于点 F，

则△PFB＝△AOB =90°，

△△PBF＋△BPF＝90°，

△△PBA＝90°，

△△PBF＋△ABO =90°，

△△BPF═△ABO ，

△△PFB═△AOB ，△BPF＝△ABO ，PB =AB ，

△▵PFB△▵BOA ，

△PF═OB =12，BF =OA =16，

△OF＝BF －OB =4，

△点 P 的坐标为（－12，－4），

如图 3，当点 P 在第一象限，PA =AB 且△PAB =90°时，

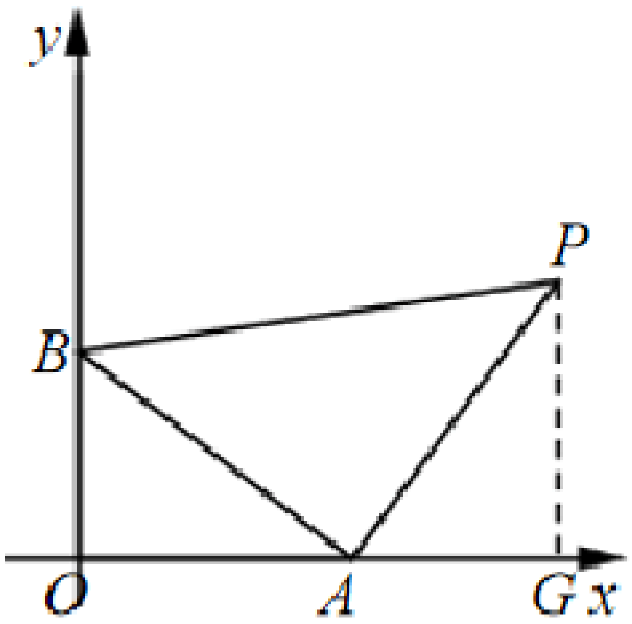


图3

过点 P 作 PG△OA 交 x 轴于点 G，

则△PGA ＝△AOB ＝90°，

△△PAG＋△APG ＝90°，

△△PAB＝90°，

△△PAG＋△BAO ＝90°，

△△APG＝△BAO ，

△△PGA＝△AOB ，△APG ＝△BAO ，PA ＝AB ，

△△PAG△ △ABO ，

△PG＝OA ＝16，AG ＝OB ＝12，

△OG ＝OA ＋AG ＝28，

△点 P 的坐标为（28，16），

如图 4，当点 P 在第四象限，PA ＝AB 且△PAB ＝90°时，

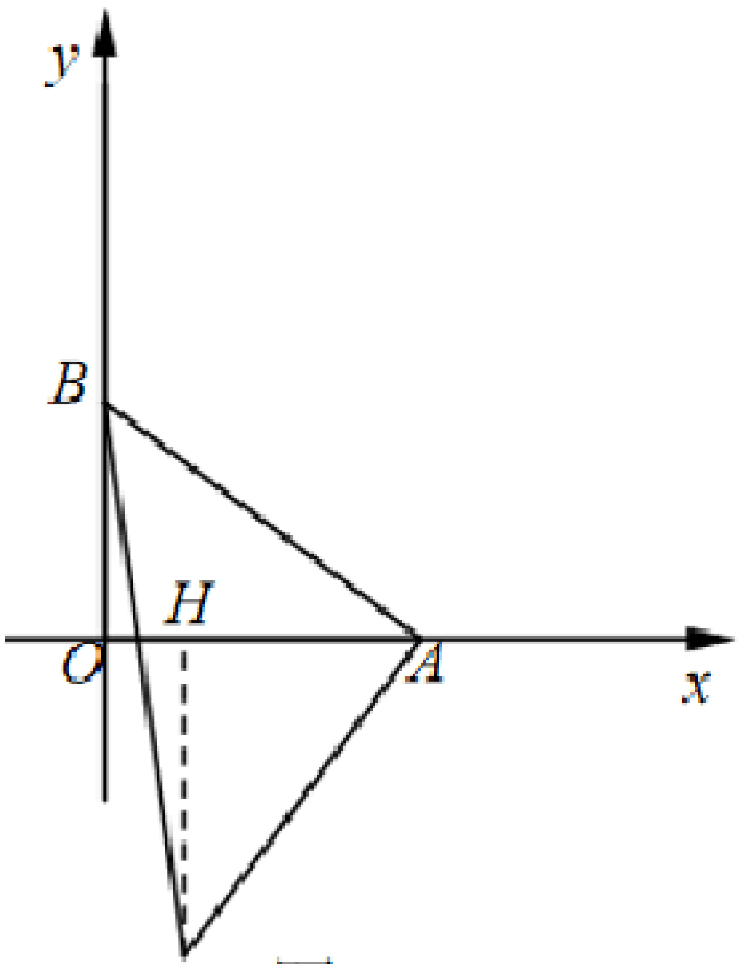


图4

过点 P 作 PH△OA 交 x 轴于点 H，

则△PHA =△AOB =90°,

△△PAH+△APG =90°,

△△PAB=90°,

△△PAH+△BAO =90°,

△△APH=△BAO ，

△△PHA=△AOB ，△APH =△BAO ，PA =AB ，

△▵PAH△ ▵ABO ，

△PH=OA =16，AH =OB =12，

△OH =OA −AH =4，

△点 P 的坐标为（4，−16），

如图 5，当点 P 在第四象限，PA =PB 且△APB =90°时，

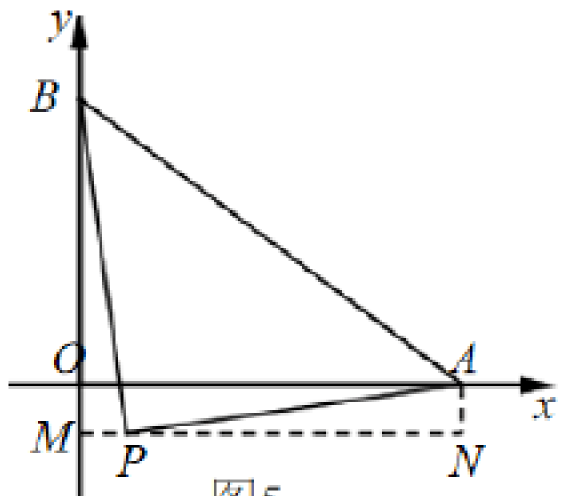


图5

过点 P 作 PM△OB 交 y 轴于点 M ，过点 A 作 AN△PM ，交 MP 的延长线于点 N ，

则△PNA ＝△PMB ＝90°，

△△PAN＋△APN ＝90°，

△△APB＝90°，

△△APN＋△BPM ＝90°，

△△PAN＝△BPM ，

△△PNA＝△PMB ，△PAN ＝△BPM ，PA ＝PB ，

△△PAN△ △BPM ，

△PM＝AN ，BM ＝PN ，

设 PM ＝AN ＝a，

则 PN ＝BM ＝12＋a，

△MN ＝OA ＝16，

△a＋12＋a＝16

解得 a＝2，

△PM＝2，OM ＝AN ＝2，

△点 P 的坐标为（2，－2），

如图 6，当点 P 在第一象限，PA ＝PB 且△APB ＝90°时，

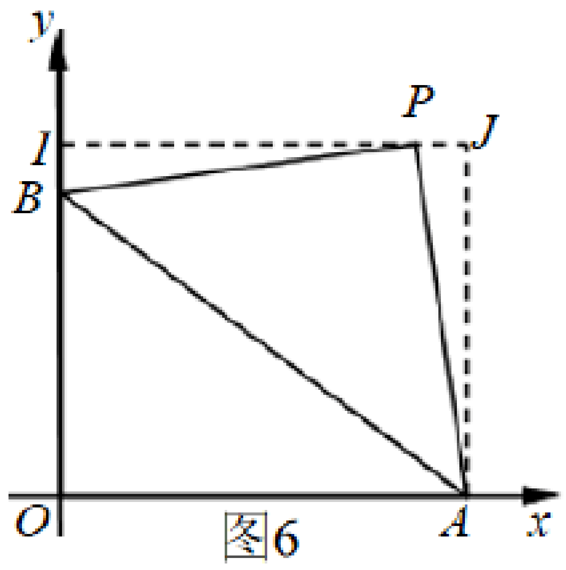


图6

过点 P 作 PI△OB 交 y 轴于点 I，过点 A 作 AJ△PI，交 IP的延长线于点 J，

则△PJA＝△PIB＝90°，

△△PAJ＋△APJ＝90°，

△△APB＝90°，

△△APJ＋△BPI＝90°，

△△PAJ＝△BPI，

△△PJA＝△PIB，△PAJ＝△BPI，PA ＝PB，

△▵PAJ△▵BPI，

△PI＝AJ，BI＝PJ，

设 PI＝AJ＝b，

则 PJ＝BI＝b－12，

△IJ＝OA ＝16，

△b＋b－12＝16，

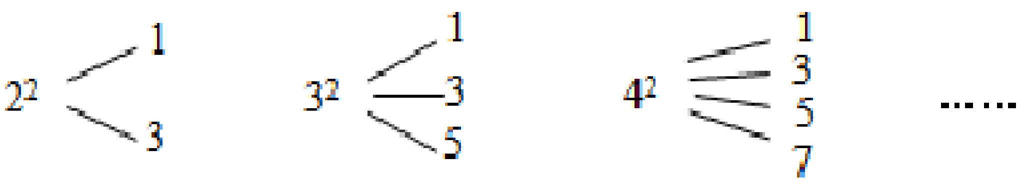
解得 b＝14，

△PI＝14，OI＝AJ＝14，

△点 P 的坐标为（14，14），

综上所述，点 P 的坐标为（12，28），（－12，－4），（28，16），（4，－16），（2，－2），（14，14）.

5．已知 n　2，且 n 自然数，对 n^2 进行如下"分裂"，可分裂成 n 个连续奇数的和，如图：



即如下规律：

$2^2=1+3$,

$3^2=1+3+5$

$4^2=1+3+5+7$ … …;

（1）按上述分裂要求，5^2　______，10^2 可分裂的最大奇数为______

（2）按上述分裂要求，n^2 可分裂成连续奇数和的形式是：n^2　__________；

（3）用上面的规律求：$n \quad 1^2 \quad n^2$

【解析】解：（1）通过观察已知算式可得平方数的分裂规律有：平方数的底数是多少，分裂后的奇数加数就有多少个；奇数加数是从 1 开始算起的连续奇数，

△$5^2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$，

又$10^2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$，

所以10^2　可分裂的最大奇数为 19；

故答案为$5^2=1+3+5+7+9$，19；

（2）由（1）可以进一步得知，一个平方数分裂后的最大奇数等于平方数底数的 2 倍减去 1，

△n^2 可分裂的最大奇数为 $2n-1$，

△n^2 1 3 5 ?•• 2n 1 ,

故答案为 n^2 1 3 5 ?•• 2n 1 ；

（3）由（2）得：

n 1 ^{2} 1 3 5 ?•• 2n 1 2n 2 1

=1 3 5 ?•• 2n 1 2n 1 ,

n^2 1 3 5 ?•• 2n 1 ,

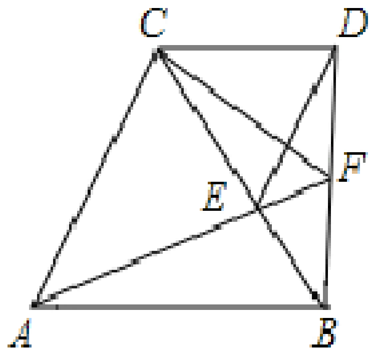
△ n 1 ^{2} n^2 1 3 5 ?•• 2n 1 2n 1 1 3 5 ?•• 2n 1 =2n+1 .

6．如图，△ABC 和△CDE 都是等边三角形，点 E 在 BC 上，AE 的延长线交 BD 于点 F.

（1）求证：△ACE△△BCD ;

（2）探究 CFD 的度数;

（3）探究 EF、DF 、CF 之间的关系.



【解析】解：（1）△△ABC 和△CDE 都为等边三角形，

△△ACE=△BCD=60°，AC=BC ，CE=CD ，

在△ACE 和△BCD 中

AC BC
ACE BCD ,
CE CD