平面向量的数量积及应用

高考概览	高考在本考点的常考题型为选择题、填空题，分值为5分，中、低等难度
考点研读	1.理解平面向量数量积的含义及其几何意义 2．了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义 3．掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算 4．能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系

目录

狂刷小题·基础练

KUANG SHUA XIAO TI JI CHU LIAN

一、基础小题

1．若单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，则实数 $\lambda=$(　　)

A．-1　　　　B．2

C．0 或-1　　　　D．2 或-1

解析　由于$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{a}^2=3$，即$(\lambda\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=3$，$\lambda^2\boldsymbol{e}_1^2-2\lambda\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2=\lambda^2-2\lambda\cos60°+1=3$，即 $\lambda^2-\lambda-2=0$，解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$.故选 D.

2．设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为$-\frac{1}{4}$，$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$

$=(\quad)$

A．-1

B．1

C．-5

D．5

解析　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为$-\frac{1}{4}$，即 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$，又$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=4\times1\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$，所以$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}^2=-2+3=1$.故选 B.

3．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}=(1，1)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B．(1，1)

C．(－1，－1)

D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

解析　$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{b}=(1，1)$．故选 B.

4．若 O 为$\triangle ABC$所在平面内任一点，且满足$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，则$\triangle ABC$的形状为(　　)

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等边三角形　　D．等腰直角三角形

解析　因为$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，即$\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，所以$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$，即$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以$\triangle ABC$是等腰三角形．故选 A.

5. 已知$\triangle ABC$外接圆O的半径为1(O为圆心)，且$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，$|\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{AB}|$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}=$(　　)

A. $-\dfrac{15}{4}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

C. $\dfrac{15}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

解析　$\because$ $\triangle ABC$外接圆O的半径为1(O为圆心)，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，$\therefore$ O为BC的中点，故$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle A$为直角. 又$|\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{AB}|$，$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-|\overrightarrow{CA}|^2=-\dfrac{15}{4}$.故选 A.

6．(多选)已知向量 $\boldsymbol{a}=(4，3-m)$，$\boldsymbol{b}=(1，m)$，则下列说法正确的是(　　)

A．若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=4$

B．若 $m=\frac{3}{5}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

C．$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$的最小值为 6

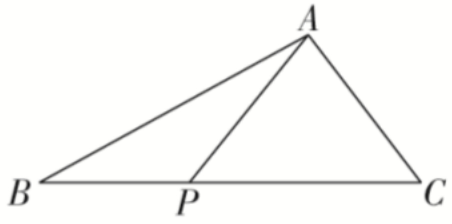
D．若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，则 $m<-1$ 或 $m>4$

解析　对于 A，$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore 4\times1+m(3-m)=0$，解得 $m=4$ 或 $m=-1$，故 A 错误；对于 B，由题意可知 $\boldsymbol{a}=\left(4,\ \dfrac{12}{5}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(1,\ \dfrac{3}{5}\right)$，即 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，故 B 正确；对于 C，由 $\boldsymbol{a}=(4,\ 3-m)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ m)$，得 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(6,\ 3+m)$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{36+(m+3)^2}$，显然当 $m=-3$ 时，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 6，故 C 正确；对于 D，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，则 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+m(3-m)<0,\\ 4m\neq3-m,\end{cases}$ 解得 $m<-1$ 或 $m>4$，故 D 正确．故选 BCD.

7．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，且$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为__$\frac{\pi}{3}$__．

解析　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}=0$，解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

8.如图，在△ABC 中，$BC=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3$，点 P 为边 BC 上的一动点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值为__$-1$__.



解析　由题意，设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in[0,1]$，所以$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BA}=-\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{PC}=(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$.又 $BC=3$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(-\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot(1-\lambda)\overrightarrow{BC}=-\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{BC}^2+(1-\lambda)\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9(\lambda^2-\lambda)+3(1-\lambda)=9\lambda^2-12\lambda+3=9\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2-1$，当 $\lambda=\frac{2}{3}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$取得最小值$-1$.

二、高考小题

9. (2023·新课标Ⅰ卷)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则(　　)

A. $\lambda+\mu=1$　　B. $\lambda+\mu=-1$

C. $\lambda\mu=1$　　D. $\lambda\mu=-1$

解析　因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$，$\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(1+\mu,1-\mu)$，由$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$可得，$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=0$，即$(1+\lambda)(1+\mu)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$，整理得 $\lambda\mu=-1$.故选 D.

10．(2023·全国甲卷)向量$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，则 $\cos\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}，\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=$(　　)

A．$-\frac{1}{5}$　　　　B．$-\frac{2}{5}$

C．$\frac{2}{5}$　　　　D．$\frac{4}{5}$