

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6, & x \leq 0 \\ \log_2(x+2) - 2, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数是 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 对于任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} < 3$ 成立, 且

满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, 若 $f(\cos \alpha) > -3\sin^2 \alpha$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$, 则实数 α 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
 C. $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

二、多选题: 本题共 4 小题, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论中正确的有 ()

- A. $f\left(\frac{7\pi}{24}\right) < f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ B. $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
 C. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增 D. 若 $f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 π

10. 下列说法中正确的有 ()

- A. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \neq x_2$, 当 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减
 B. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 在区间 $(1, 2]$ 上也单调递减, 那么 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减
 C. 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 则 $y = f(-x) + f(x)$ 为奇函数
 D. 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(g(x))$ 为偶函数

11. 若 a, b 均为正数, 且满足 $2a + b = 4$, 则 ()

- A. ab 的最大值为 2 B. $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$ 的最小值为 4

C. $\frac{4}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值是 4

D. $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{16}{5}$

12. 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 + ax - a - 1)$, 下列结论中正确的是 ()

A. 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $f(x)$ 一定有最小值

C. 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R}

D. 若 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 $\{a | a \geq -4\}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 计算: $e^{\ln 3} + 0.125^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt{3}} 27 =$ _____.

14. 写一个周期为 4 的偶函数_____.

15. 已知正数 x, y 满足 $2^{x-3} = 8^y$, 则 $x + \frac{3}{y}$ 的最小值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$, $\omega > 0, x \in \mathbf{R}$, 且 $f(\alpha) = -\frac{1}{2}, f(\beta) = \frac{1}{2}$. 若 $|\alpha - \beta|$ 的最小值为

$\frac{3\pi}{4}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$ _____, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 集合 $B = \{x | 2 - a \leq x \leq 1 + 2a\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分条件, 求 a 的取值范围;

(2) 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的必要条件, 求 a 的取值范围.

18. 若设 m 为实数, 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{m}{5^x + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 用定义法证明: $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数;

(3) 当 $x \in [-1, 2)$, 求函数 $f(x)$ 的取值范围.

19. (1) 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$, 求 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 及 $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ 的值;

(2) 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$ ($0 < \alpha < \pi$), 求 $\tan \alpha$ 的值.

20. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $(0, -1)$, 若 x_1, x_2 满足对 $\forall x \in \mathbf{R}$,

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $f(x_2) - f(x_1) = 4$ 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调区间及最值.

21. 设函数 $f(x) = x^2 - mx + m$, 其中 $m \in R$.

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有唯一的零点, 求 m 的取值范围;

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求 m 的取值范围.

22. 设 λ 为实数, 已知函数 $f(x) = 2^x + \lambda \cdot 2^{-x}$.

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 求 λ 的值和此时不等式 $f(x) < \frac{3}{2}$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) + 1 \geq (1 - \lambda) \cdot 2^x + 2^{-x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 求 λ 的取值范围.

A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

B. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

C. $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$

D. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出不等式 $|x-m| < 1$ 的解集，再由集合间的包含关系即可求出 m 的取值范围。

【详解】解不等式 $|x-m| < 1$ 可得 $m-1 < x < m+1$,

又不等式 $|x-m| < 1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, 所以可得 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \sqsubset (m-1, m+1)$;

$$\text{即} \begin{cases} m-1 \leq \frac{1}{3} \\ m+1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{解得} -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{4}{3};$$

经检验不等式两边不会同时取到等号,

所以 m 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$.

故选: D

4. 若 a, b, c 满足 $a = 2^{0.3}$, $b = \log_3 2$, $c = \log_5 2$, 则 ()

A. $c < a < b$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $c < b < a$

【答案】D

【解析】

【分析】利用对数函数和指数函数的单调性分别求出 a, b, c 的大致范围, 结合中间数比较大小.

【详解】 $a = 2^{0.3} > 2^0 = 1$,

$\log_3 \sqrt{3} < \log_3 2 < \log_3 3$, 则 $\frac{1}{2} < b < 1$,

$\log_5 1 < \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5}$, 则 $0 < c < \frac{1}{2}$,

所以 $c < b < a$.

故选: D.

5. 若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数, $f(2) = 0$, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为

()

A. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

D. $(-2, 0)$

【答案】A

【解析】

【分析】先由函数的奇偶性可得函数在 $(-\infty, 0)$ 上 $f(x) < 0$ 的解集，再得函数在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$ 的解集，再求并集即可得解.

【详解】解：由函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，又 $f(2) = 0$ ，

所以 $f(-2) = 0$ ，由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，

所以当 $x \in (-\infty, -2)$ 时， $f(x) > 0$ ，当 $x \in (-2, 0)$ 时， $f(x) < 0$ ，

又函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，

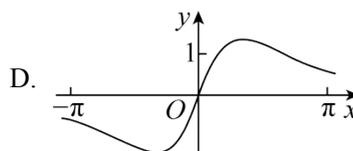
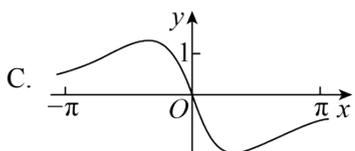
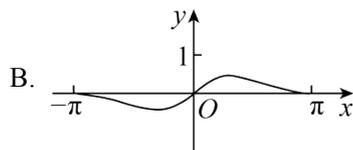
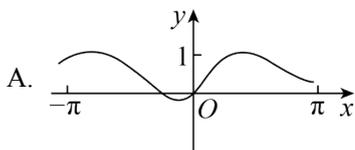
当 $x \in (0, 2)$ 时， $f(x) > 0$ ，当 $x \in (2, +\infty)$ 时， $f(x) < 0$ ，

即 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ ，

故选:A.

【点睛】本题考查了利用函数的性质求解不等式，重点考查了函数性质的应用，属基础题.

6. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



【答案】D

【解析】

【分析】先判断函数的奇偶性，得 $f(x)$ 是奇函数，排除A，再注意到选项的区别，利用特殊值得正确答案.

【详解】由 $f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = \frac{-\sin x - x}{\cos x + x^2} = -f(x)$ ，得 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称. 又

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{4 + 2\pi}{\pi^2} > 1, f(\pi) = \frac{\pi}{-1 + \pi^2} > 0. \text{ 故选 D.}$$

【点睛】本题考查函数的性质与图象，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养. 采取性质法或赋值法，利用数形结合思想解题.

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6, x \leq 0 \\ \log_2(x+2) - 2, x > 0 \end{cases}$ 的零点个数是 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据函数 $f(x)$ 的解析式，结合分段条件，分别令 $f(x) = 0$ ，即可求解.

【详解】 由题意，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6, x \leq 0 \\ \log_2(x+2) - 2, x > 0 \end{cases}$,

当 $x \leq 0$ 时，令 $x^2 + x - 6 = 0$ ，解得 $x = -3$ 或 $x = 2$ (舍去)；

当 $x > 0$ 时，令 $\log_2(x+2) - 2 = 0$ ，即 $\log_2(x+2) = 2$ ，解得 $x = 2$ ，

所以函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

故选： B.

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数，对于任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} < 3$ 成立，且

满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ ，若 $f(\cos \alpha) > -3\sin^2 \alpha$ ， $\alpha \in [-\pi, \pi]$ ，则实数 α 的取值范围是 ()

A. $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据题意，构造函数 $g(x) = f(x) - 3x^2$ ，判断函数的单调性及奇偶性，利用单调性及奇偶性的性质建立不等式，解三角不等式得解.

【详解】 不妨设 $0 \leq x_1 < x_2$ ，

由 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} < 3$ 可得 $f(x_1) - 3x_1^2 > f(x_2) - 3x_2^2$ ，

令 $g(x) = f(x) - 3x^2$ ，则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，

且 $g(-x) = f(-x) - 3(-x)^2 = f(x) - 3x^2 = g(x)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，即 $g(x)$ 为偶函数.

$$\text{又 } g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -3,$$

$$g(\cos \alpha) = f(\cos \alpha) - 3\cos^2 \alpha > -3\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha = -3 = g\left(\frac{1}{2}\right),$$

由偶函数性质及单调性可得, $|\cos \alpha| < \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{1}{2}$,

又 $\alpha \in [-\pi, \pi]$,

$$\text{所以 } -\frac{2\pi}{3} < \alpha < -\frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3},$$

故选: A

二、多选题: 本题共 4 小题, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论中正确的有 ()

A. $f\left(\frac{7\pi}{24}\right) < f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

B. $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增

D. 若 $f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 π

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正切函数的性质周期, 定义域, 函数值和单调性等选项逐个判断即可.

【详解】已知函数 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 函数的定义域为 $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 故 B 选项正确;

$$f\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

则 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right) > f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, 故 A 选项错误;

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 故 C 选项正确;

因为 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的周期 $T = \frac{\pi}{2}$,

所以若 $f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, 故 D 选项错误;

故选: BC.

10. 下列说法中正确的有 ()

A. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 \neq x_2$, 当 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减

B. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 在区间 $(1, 2]$ 上也单调递减, 那么 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减

C. 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 则 $y = f(-x) + f(x)$ 为奇函数

D. 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 则 $f(g(x))$ 为偶函数

【答案】AD

【解析】

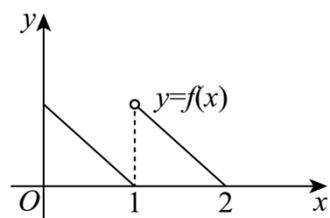
【分析】根据函数单调性的定义和判定方法, 以及函数奇偶性的定义和判定方法, 结合函数的图象, 逐项判定, 即可求解.

【详解】对于 A 中, 不妨设 $x_1 < x_2$, 因为 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 可得 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减, 所以 A 正确;

对于 B 中, 如图是, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 在区间 $(1, 2]$ 上也单调递减,

当函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上不是单调递减函数, 所以 B 错误;



对于 C 中, 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 设 $g(x) = f(-x) + f(x)$,

可得 $g(-x) = f(x) + f(-x) = g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 为偶函数, 所以 C 错误;

对于 D 中, 由函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数,

令 $h(x) = f(g(x))$, 可得 $h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$,

所以 $f(g(x))$ 为偶函数, 所以 D 正确.

故选: AD.

11. 若 a, b 均为正数, 且满足 $2a + b = 4$, 则 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/967052115044006146>