计算方法作业集答案及试题

参考答案 第一章

1 *1x =1.7； *2x =1.73； *3x =1.73

2 。

2 .

i	x_i^*	$\varepsilon(x_i^*)$	$\varepsilon_r(x_i^*)$	有效数字的位数
1	x_1^*	$\frac{1}{2}\times 10^{0}$	0.1397×10^{-3} 或 0.1666×10^{-3}	四位
2	x_2^*	$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$	0.1051×10^{-2} 或 0.125×10^{-2}	三位
3	x_3^*	$\frac{1}{2}\times 10^{-1}$	0.3497×10^{-3} 或 0.5×10^{-3}	四位
4	x_4^*	$\frac{1}{2}\times 10^{-2}$	0.1691×10^{-3} 或 0.25×10^{-3}	四位
5	x_5^*	$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$	0.8548×10^{-6} 或 0.1×10^{-6}	六位

$(x_1^* + x_2^* + x_3^*)| \le 0.00050$;

3 . （ 1 ） e r （ 2 ） ≤)(*

3*2*1x x x e r 0.50517； （ 3 ） ≤)/(*

4*2x x e r 0.50002。

4 . 设 6 有 n 位有效数字，由 6≈2.4494……，知 6 的第一位有效数字 1a =2。 令 3)1()1(1*

102

1102211021)(-----?≤??=?=

n n r a x ε 可求得满足上述不等式的最小正整数 n =4，即至少取四位有效数字，故满足精度要求可取 6≈2.449。 5. 答：（ 1 ）*x (0>x) 的相对误差约是*

x 的相对误差的 1/2 倍；（2）n x)(* 的相对误差约是*

x 的相对误差的 n 倍。

6． 根据******

**************sin 21)

(cos 2

1sin 21)(sin 21sin 21)(sin 21)(c b a c e c b a c b a b e c a c b a a e c b S e r ++≤ =*

*****)

()()(tgc

c e b b e a a e ++ 注意当 20*

π

<

>c tgc ，即 1

*

1

*

)()(--<="">

则有)()()(*

***c e b e a e S e r r r r ++<

7．设 20=

y ，41.1*

=y ，δ=?≤--2*00102

1y y 由 δ1

*001*111010--≤-=-y y y y ，

δ2

*111*221010--≤-=-y y y y

δ10

*991*10101010--≤-=-y y y y

即当 0y 有初始误差 δ 时，10y 的绝对误差的绝对值将减小 10

10-倍。而 110

10

<<-δ，故计算过程稳定。

8. 变形后的表达式为：

（1）)1ln(2--x x =)1ln(2-+-x x

（2）arctgx x arctg -+)1(=)

1(11

++x x arctg

（3）

1ln)1ln()1(ln 1

--++=?

+N N N N dx x N N

= +-+-

+32413121)1ln(N

N N N 1ln)11ln()1(-++

+=N N N N =1)1ln()1

1ln(-+++N N

N （4）x x sin cos 1-=x

x cos 1sin +=2x tg

第二章

1．绝对误差限 3

1110

-?, 对分 8 次

n	隔根区间	x_n	$f(x_n)$的符号
1	[1.5，2.5]	2.0	
2	[2.0，2.5]	2.25	
3	[2.25，2.5]	2.375	
4	[2.25，2.375]	2.3125	
5	[2.25，2.3125]	2.28125	
6	[2.28125，2.3125]	2.296875	
7	[2.296875，2.3125]	2.3046875	
8	[2.296875，2.3046875]	2.30078125	

2．(1) 隔根区间[0, 0.8]；

(2) 等价变形)2ln(x x -=； 迭代公式 ,2,1)2ln(1=-=-n x x n n 。

(3) 收敛性论证：用收敛性定理论证。

n	x_n	$\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
0	0.4	
1	0.4700	
2	0.4253	
3	0.4541	
4	0.4356	
5	0.4475	
6	0.4399	
7	0.4448	
8	0.4416	
9	0.4436	
10	0.4423	
11	0.4432	

3．(1) 7

210

-=x x ； (2) 2/)7(lg +=x x ； (3) 31+=x x ；

4．143)(2++='x x x f 牛顿迭代公式为： ='-=+)

()

(1n n n n x f x f x x

列表计算

n	x_n	$\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
0	0.4	
1	0.47013	0.07
2	0.46559	0.005
3	0.46557	0.00002

根的近似值为

第三章

1．x 1=2，x 2=1，x 3=1/2

2．

---=-31

32132310

313101

A 3． L =

-153012001 ， U =

--2400410321

y 1 =14, y 2 = -10, y 3 = -72 x 1 =1, x 2 =2, x 3 =3

4. x 1≈-4.00, x 2≈3.00, x 3≈2.00

5. B 的特征值为：0，0，0，ρ(B)=0<1

(E - B 1)-1B 2 的特征值为：0，2，2，ρ[(E - B 1)-1B 2]=2>1.

6. x (5)=(0.4999, 1.0004, -0.4997)T 7.∣a ∣>2 第四章 1.

k	$\mathbf{u}_k = A\mathbf{u}_{k-1}$	$\lambda_1^{(k)} = \frac{(u_k)_1}{(u_{k-1})_1}$
0	$(1,\ 1,\ 1)^T$	4.0000
1	$(4,\ 2,\ 4)^T$	3.5000
2	$(14,\ 8,\ 14)^T$	3.5714
3	$(50,\ 28,\ 50)^T$	3.5600
4	$(178,\ 100,\ 178)^T$	3.5618
5	$(634,\ 356,\ 634)^T$	3.5615
6	$(2258,\ 1268,\ 2258)^T$	3.5615

5615.3)

7(1≈λ

相应近似特征向量为 c =(2258 ， 1268 ， 2258 ）T ，（ 0≠c ）

第五章

1． 取 0x =100、1x =121 用线性插值时，115≈10.7143；

取 0x =100、1x =121、2x =144 用二次插值时，115≈10.7228。

2．选取插值节点为：0x =1.4、1x =1.5、2x =1.6，)54.1(f ≈1.9447。

3．利用∑=+'

=

p

j j n j p x x f x x x f 0

1

10)

()

(],,[ω ，并注意

当 n p ≤时，对 p j ,,1,0 = ，0)(=j x f ，故有 n p x x x f p ≤=0],,,[10

而 1+=n p 时，)()(11++'=n n x x f ω，故有 11],,,[10+==n p x x x f p ，

4.)(3x L =)(3x N =

)926913(5

123

-+-x x x 5. （1）用反插值法得根的近似值*

α=0.3376； （2）用牛顿迭代法得根的近似值*

α=0.337667。

6. 令 311)3(10))()((!

3)

(max 11-+-≤≤≤---+-k k k x x x x x x x x x f k k ξ 可求得 h ≤0.2498（或 h ≤0.2289）。

7. (1) 5982)(233+-+-=x x x x H 22)

4(3)2()1)((!41)(--=x x f x R ξ)2,1(∈ξ (2)61592)(233-+-=x x x x H)3()2)(1)((!

41)(2)

4(3---=x x x f x R ξ)3,1(∈ξ 第六章

1．

正规方程组为 ???? ??493330???? ??21x x =?

2973 3888.21≈x ， 4456.02≈x 2．

正规方程组为 ???? ??7277699532753275

b a =???? ?

5.3693214.271 9726.0≈a ， 0500.0≈b 2

0500.09726.0x y +=

3 .

取对数 at I I -=0ln ln

相应的正规方程组为

--03.25.35.37

a I 0ln =?

-1858.09890.1 72825.1ln 0=I ， 8882.2≈a 6308.50≈I t e I 8882.26308

.5-= 4 . 正规方程组为

6092.31781.31781.34???? ??b a =?

9607.124.144864.2≈a ， 4016.1≈b x y ln 4016.14864.2+= 第七章

1. 解：运用梯形公式：

8591409.1][2

1101

=+≈?e e dx e x

误差：2265235

.012

1

)01(121][3=≤--=e e f R ξ 运用辛浦生公式：7188612.1]4[611

21

01

0=++≈?e e e dx e x

误差：00094385

.02880

1
28801][=≤-=e e f R ξ 2. 解：（1）左矩形公式
将 f(x)在 a 处展开，得],[),
)(()()(x a a x f a f x f ∈-'+=ξξ
两边在[a,b]上积分，得

-'+-=-'+=b
a b
a
b a
b
a
dx a x f a f a b dx a x f dx a f dx x f))(()()())(()()(ξξ
由于（x-a ）在[a,b]上不变号，故有],[b a ∈η，使??-'+-=b
a
b a
dx a x f a f a b dx x f)()()()(η
从而有
],[))((2
1
)()()(2b a a b f a f a b dx x f b
a
∈-'+
-=?
ηη
（2）右矩形公式
将 f(x)在 b 处展开，并积分，得],[))((2
1
)()()(2b a a b f b f a b dx x f b

a

∈-'--=?

ηη

（3）中矩形公式

将 f(x)在 2

b a +处展开，得

],[,)2

)((21)2)(2()2(

)(2

b a b a x f b a x b a f b a f x f ∈+-''++-+'++=ξξ

两边在[a,b]上积分，得

]

,[,))((24

1

)2()()2()(21)2()()2

)((21)2()2()2(

)()(322

b a a b f b a f a b dx b a x f b a f a b dx b a x f dx b a x b a f b a f a b dx x f b a b a b a b

a

∈-''++-=+-''++-=+-''++-+'++-=ηηηξ

3. 解：（1）求积公式中含有三个待定参数 A -1、A 0、A 1，故令求积公式对 f(x)=1、x 、x 2 准确成立，即

=+=--=++---32)(0)(23112111

01h A A h A A h h

A A A 解得 A -1=A 1=h/3, A 0=4h/3

显然所求的求积公式（事实上为辛浦生公式）至少具有两次代数

精确度。又有

44433

33)(33

)(3h h h h dx x h h h h dx x h h

h

h

+-≠+-=

--

故 ?-++

-≈h h h f h

f h h f h dx x f)(3)0(34)(3)(具有三次代数精确度。（2）求积公式中含有两个待定参数 x 1、x 2，当 f(x)=1 时，有

)](3)(2)1([3

1)(211

1

x f x f f dx x f ++-≡?- 故令求积公式对 x 、x 2 准确成立，即：

=+=+1

321322

22121x x x x 解得，-=-=28990.068990

.052660.012660.012x x 显然)](3)(2)1([3

1

)(]321[3

12111323111

3x f x f f dx x f x x dx x ++-≈++-≠??--故

当求积节点取 x 1=0.68990，x 2=-0.12660 或 x 1=-0.28990，x 2=0.52660 时，求积公式具有两次代数精确度。

（3）求积公式中含有一个待定参数 α，当 f(x)=1、x 时，有

]11[]0[2

0]11[2

20

-++≡++≡??h h h xdx h dx h h

α

故令求积公式对 f(x)=x 2 成立，即：]202[]0[2

220

2h h h h

dx x h

-?++=

α 得

α=1/12。 显然：

]40[12]0[2]30[12

]0[232

40

42

230

3

h h h h dx x h h h h dx x h h

-++≠-++=?? 故)]()0([12

)]()0([2)(2

0h f f h h f f h dx x f h '-'+

+≈?具有三次代数精确度。

x	1	7/6	8/6	9/6	10/6	11/6	2
f(x)	0	0.15415	0.28768	0.40547	0.51083	0.60614	0.69315

T

6=1/2×1/6[0+2×(0.15415+0.28768+0.40547+0.51083+0.60614)+0.69315]≈0.38514 S

3=1/6×1/3[0+4×(0.15415+0.40547+0.60614)+2×(0.28768+0.51083)+0.69315]≈0.38629

5. 解：

.

6)(,6

)(,ln)(2

1),(28801)(2880][)4(4)4()

4(4

)4(4≤∴-=∴=≤≤-=--

=ηηηηf x

x f x x f f N

f h a b f R N

令 4102

1

][-?≤

f R N ，得 N ≥2.54.取 N=3,则至少要取 2N+1=7 个节点处的函数值。 6. 解：按照事后误差估计公式

n n n n n n n k k n

n n n n n

T T S S S S I x

f h T T T T T I 3

134),(15

1

)

(2

21

),(312221

2

1222-=

-+

≈+=-+≈∑-=+

和

k	等分 2^k	T_{2^k}	$\frac{1}{3}\left\|T_{2^k}-T_{2^{k-1}}\right\|$	$S_{2^{k-1}}$	$\frac{1}{15}\left\|S_{2^{k-1}}-S_{2^{k-2}}\right\|$
0	1	0.92073549			
1	2	0.93979328		0.94614588	
2	4	0.94451352	0.00157341	0.94608693	$0.00000393<10^{-5}$
3	8	0.94569086	$0.00039245<10^{-3}$	0.94608331	0.00000024

因此，由梯形公式得Ｉ≈T 8=0.94569086,精确到10-3；由辛浦生公式得到 Ｉ ≈S 2=0.94608693，精确到 10-5。若取 Ｉ ≈S 4=0.94608331，则精确到10-6。 精确到10-3的结果为Ｉ≈0.946.

7. 解：采用极坐标系，令 x=2cos θ，y=sin θ，则椭圆的周长为

I d d y x l 4s i n 314420

2

202

2

=+='+'=??π

π

θθθθ 由于

ππ

θθπ

π

=?

<+<?2

2sin 312

20

2d ，因此Ｉ有一个整数，故要求结果有四位有效数字，需截断误

k	等分 2^k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1	2．356194			
1	2	2．419921	2．441163		
2	4	2．422103	2．422830	2．421608	
3	8	2．422112	2．422115	2．422067	2．422074
4	16	2．422112	2．422112	2．422112	2．422113

-3 故取I=2.422113，周长为ｌ=4I=9.688。

8.（1）：取 h=0.1，三点公式取 1.2,0.2,9.1x 210===x x ，得
5932
.29)]1.2()0.2(2)9.1([1.01
)0.2(2288.22)]9.1()1.2([1
.021
)0.2(2
=+-≈''=-?≈
'f f f f f f f
（2）：取 h=0.2， 三点公式取 2.2,0.2,8.1x 210===x x ，得
7043
.29)]2.2()0.2(2)8.1([2.01
)0.2(4142
.22)]8.1()2.2([2
.021
)0.2(2
=+-≈''=-?≈'f f f f f f f
注：精确解为 556224.29)0.2(,167168.22)0.
2(=''='f f 。 第八章

x_n	y_n	$\|y(x_n)-y_n\|$
0.1	0.000000000	0.516258196×10^{-2}
0.2	0.011000000	0.102692469×10^{-1}
0.3	0.033900000	0.152817793×10^{-1}

2.

x_n	梯形法 y_n	$\|y_n-y(x_n)\|$	欧拉预-校法 y_n	$\|y_n-y(x_n)\|$
0.1	1.618181818	$.548934878\times10^{-3}$	1.620000000	$.126924692\times10^{-2}$
0.2	1.269421488	$.898558403\times10^{-3}$	1.272400000	$.207995396\times10^{-2}$
0.3	0.947708490	$.110314620\times10^{-2}$	0.951368000	$.255636391\times10^{-2}$

3. 计算结果如下：