

2024年新结构模拟适应性特训卷（二）

高三数学

+ 考 试 时 间 × 150 分 钟 试 卷 总 分 × 150 分 -

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知角 θ 的终边经过点 $P(x, -5)$ ，且 $\tan\theta = \frac{5}{12}$ ，则 x 的值是（ ）

- A. -13 B. -12 C. 12 D. 13

2. “二十四节气”是中国古代劳动人民伟大的智慧结晶，其划分如图所示。小明打算在网上搜集一些与二十四节气有关的古诗。他准备在春季的 6 个节气与夏季的 6 个节气中共选出 3 个节气，则小明选取节气的不同情况的种数是（ ）



- A. 90 B. 180 C. 220 D. 360

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$ ，则 $a_{2023} + a_{2024}$ 的值是（ ）

- A. 8094 B. 8095 C. 8096 D. 8097

4. 已知直线 $kx - y + 2 = 0$ 和以 $M(3, -2)$ ， $N(2, 5)$ 为端点的线段相交，则实数 k 的取值范围为（ ）

- A. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$ B. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

C. $\left[-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$

D. $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

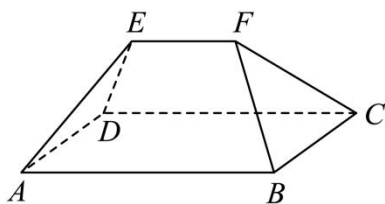
5. 已知函数 $f(x) = a \cdot e^{x^2} + bx^2 + x - 2$, 若 $f'(1) = 1$, 则 $f'(-1) = ()$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

6. 中国古建筑闻名于世, 源远流长. 如图甲所示的五脊殿是中国传统建筑中的一种屋顶形式, 该屋顶的结构示意图如图乙所示, 在结构示意图中, 已知四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$, $AB = 2EF = 4$, $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 都是边长为 2 的等边三角形, 若点 A, B, C, D, E, F 都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 $()$



甲



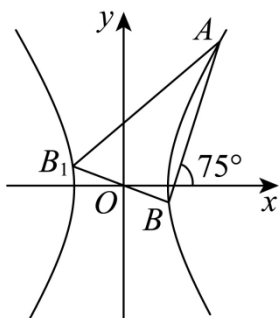
乙

- A. 22π B. 11π C. $\frac{11}{2}\pi$ D. $\frac{11\pi}{4}$

7. 已知随机事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{7}{16}$, 则 $P(B) = ()$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{16}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{41}{48}$

8. 如图, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条弦 AB 所在直线的倾斜角为 75° , 点 B 关于原点 O 的对称点为 B_1 , 若 $\angle BAB_1 = 30^\circ$, 双曲线 C 的离心率为 e , 则 $e^2 = ()$



- A. 3 B. $2 + \sqrt{3}$ C. $3 + \sqrt{3}$ D. 4

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z_1, z_2 满足 $3z_1 + z_2 = -1 - 2i$, $z_1 + 3z_2 = 5 + 2i$, 则 $()$

- A. $z_1 = -1 - i$ B. $z_2 = 2 + i$
 C. $z_1 - z_2 = -3 + 2i$ D. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 - i}{5}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{2}$, $C = 45^\circ$, 则 A 可能为 $()$

- A. 30° B. 150° C. 120° D. 60°

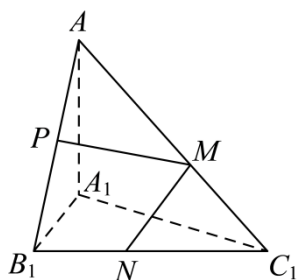
11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上一点, 则 ()

- A. $|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2| = 4 - \sqrt{3}$ B. $|PF_1| |PF_2|$ 的最大值为 8
 C. $|\overline{PF_1} + \overline{PF_2}|$ 的取值范围是 $[2, 4]$ D. $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$ 的取值范围是 $[-2, 1]$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合 $A = \{x | 2^x < 1\}, B = \{x | x \geq a\}$, 若 $\exists x \in A, x \in B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

13. 如图, 在三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, $A_1B_1 = 2A_1A = 2B_1C_1 = 2$, P 为线段 AB_1 的中点, M, N 分别为线段 AC_1 和线段 B_1C_1 上任意一点, 则 $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值为_____.



14. 已知 $f(x) = x \ln x, g(x) = x \cdot e^x$, 若存在 $x_1 \in (0, +\infty), x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) = g(x_2) > 0$ 成立, 则 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 其中第 15 题 13 分, 第 16, 17 题 15 分, 第 18, 19 题 17 分, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (满分 13 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_5 = 3, S_5 = 35$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

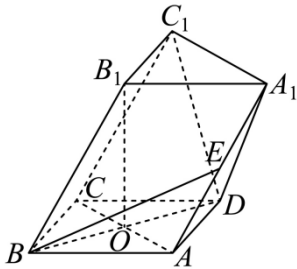
(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{10} .

16. (满分 15 分) 某运动队为评估短跑运动员在接力赛中的作用, 对运动员进行数据分析. 运动员甲在接力赛中跑第一棒、第二棒、第三棒、第四棒四个位置, 统计以往多场比赛, 其出场率与出场时比赛获胜率如下表所示.

比赛位置	第一棒	第二棒	第三棒	第四棒
出场率	0.3	0.2	0.2	0.3
比赛胜率	0.6	0.8	0.7	0.7

- (1) 当甲出场比赛时, 求该运动队获胜的概率.
- (2) 当甲出场比赛时, 在该运动队获胜的条件下, 求甲跑第一棒的概率.
- (3) 如果你是教练员, 将如何安排运动员甲比赛时的位置? 并说明理由.

17. (满分 15 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, 四边形 $ABCD$ 是菱形, AC 与 BD 交于点 O , $OB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = OB_1 = 4$.



- (1) 若点 E 为 AA_1 中点, 求异面直线 BE 与 DC_1 所成角的余弦值;
- (2) 求平面 A_1C_1D 与平面 BCC_1B_1 的夹角的余弦值.

18. (满分 17 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 点 $P(0, 2)$ 在椭圆 C 上, 过点 P 的

两条直线 PA, PB 分别与椭圆 C 交于另一点 A, B , 且直线 PA, PB, AB 的斜率满足 $k_{PA} + k_{PB} = 4k_{AB} (k_{AB} \neq 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 证明直线 AB 过定点;

(3) 椭圆 C 的焦点分别为 F_1, F_2 , 求凸四边形 F_1AF_2B 面积的取值范围.

19. (满分 17 分) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 且对于任意不同的 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 都有

$|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2|$, 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的“ k 类函数”.

(1) 若 $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$, 判断 $f(x)$ 是否为 $[1, 2]$ 上的“3 类函数”;

(2) 若 $f(x) = a(x-1)e^x - \frac{x^2}{2} - x \ln x$ 为 $[1, e]$ 上的“2 类函数”, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $f(x)$ 为 $[1, 2]$ 上的“2 类函数”, 且 $f(1) = f(2)$, 证明: $\forall x_1, x_2 \in [1, 2], |f(x_1) - f(x_2)| < 1$.

2024 年新结构模拟适应性特训卷（二）

高三数学

+ 考 试 时 间 × 150 分 钟 试 卷 总 分 × 150 分 -

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知角 θ 的终边经过点 $P(x, -5)$ ，且 $\tan\theta = \frac{5}{12}$ ，则 x 的值是 ()

- A. -13 B. -12 C. 12 D. 13

【答案】B

【分析】根据任意角正切函数定义计算.

【详解】根据任意角三角函数定义，

$$\tan\theta = \frac{-5}{x} = \frac{5}{12}, \text{ 所以 } x = -12.$$

故选：B.

2. “二十四节气”是中国古代劳动人民伟大的智慧结晶，其划分如图所示. 小明打算在网上搜集一些与二十四节气有关的古诗. 他准备在春季的 6 个节气与夏季的 6 个节气中共选出 3 个节气，则小明选取节气的不同情况的种数是 ()



- A. 90 B. 180 C. 220 D. 360

【答案】C

【分析】根据组合知识进行求解.

【详解】小明选取节气的不同情况的种数为 $C_{12}^3 = 220$.

故选: C

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$, 则 $a_{2023} + a_{2024}$ 的值是 ()

- A. 8094 B. 8095 C. 8096 D. 8097

【答案】A

【分析】利用前 n 项和和通项公式的关系求出通项公式, 再求值即可.

【详解】易知 $a_1 = S_1 = 1 + 1 = 2$, $S_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1$,

故 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - ((n-1)^2 + n - 1) = 2n$, 当 $n=1$ 时符合题意, 故 $a_n = 2n$ 成立,

显然 $a_{2023} + a_{2024} = 4046 + 4048 = 8094$.

故选: A

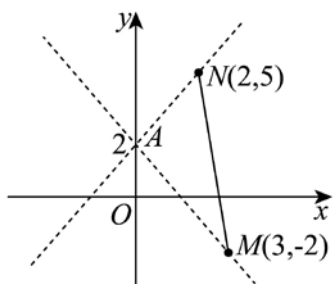
4. 已知直线 $kx - y + 2 = 0$ 和以 $M(3, -2)$, $N(2, 5)$ 为端点的线段相交, 则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$ B. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$
C. $\left[-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

【答案】C

【分析】根据题意可知直线 $kx - y + 2 = 0$ 恒过定点 $A(0, 2)$, 根据斜率公式结合图象分析求解.

【详解】因为直线 $kx - y + 2 = 0$ 恒过定点 $A(0, 2)$, 如图.



又因为 $k_{AM} = -\frac{4}{3}$, $k_{AN} = \frac{3}{2}$, 所以直线的斜率 k 的范围为 $\left[-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

故选: C.

5. 已知函数 $f(x) = a \cdot e^{x^2} + bx^2 + x - 2$, 若 $f'(1) = 1$, 则 $f'(-1) =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】C

【分析】求出 $f'(x)$, 计算出 $f'(x) + f'(-x)$, 结合已知条件即可得解.

【详解】因为 $f(x) = a \cdot e^{x^2} + bx^2 + x - 2$, 则 $f'(x) = 2axe^{x^2} + 2bx + 1$,

则 $f'(-x) = -2axe^{(-x)^2} - 2bx + 1 = -2axe^{x^2} - 2bx + 1$,

所以, $f'(x) + f'(-x) = (2axe^{x^2} + 2bx + 1) + (-2axe^{x^2} - 2bx + 1) = 2$,

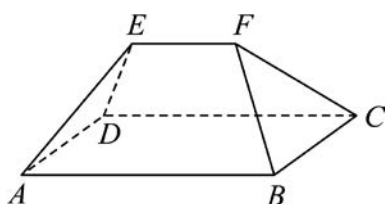
所以, $f'(1) + f'(-1) = 1 + f'(-1) = 2$, 故 $f'(-1) = 1$.

故选: C.

6. 中国古建筑闻名于世, 源远流长. 如图甲所示的五脊殿是中国传统建筑中的一种屋顶形式, 该屋顶的结构示意图如图乙所示, 在结构示意图中, 已知四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$, $AB = 2EF = 4$, $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 都是边长为 2 的等边三角形, 若点 A, B, C, D, E, F 都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 ()



甲



乙

A. 22π

B. 11π

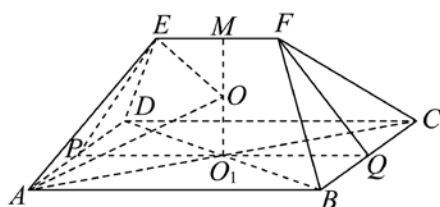
C. $\frac{11}{2}\pi$

D. $\frac{11\pi}{4}$

【答案】A

【分析】如图, 根据球的性质可得 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 根据中位线的性质和勾股定理可得 $MO_1 \perp PQ$ 且 $MO_1 = \sqrt{2}$, 分类讨论当 O 在线段 O_1M 上和 O 在线段 MO_1 的延长线上时, 由球的性质可得球半径的平方为 $R^2 = \frac{11}{2}$, 再用球的表面积公式计算即可.

【详解】如图, 连接 AC, BD ,



设 $AC \cap BD = O_1$, 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 O_1 为矩形 $ABCD$ 外接圆的圆心.

连接 OO_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

分别取 EF, AD, BC 的中点 M, P, Q ,

根据几何体 $ABCDEF$ 的对称性可知, 直线 OO_1 交 EF 于点 M .

连接 PQ , 则 $PQ \parallel AB$, 且 O_1 为 PQ 的中点,

因为 $EF \parallel AB$, 所以 $PQ \parallel EF$, 连接 EP, FQ ,

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$, 易知 $EP = FQ = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以梯形 $EFQP$ 为等腰梯形,

所以 $MO_1 \perp PQ$, 且 $MO_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 - \left(\frac{4-2}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$.

设 $OO_1 = m$ ，球 O 的半径为 R ，连接 OE ， OA ，

当 O 在线段 O_1M 上时，由球的性质可知 $R^2 = OE^2 = OA^2$ ，易得 $O_1A = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

则 $(\sqrt{2} - m)^2 + 1^2 = \sqrt{5}^2 + m^2$ ，此时无解。

当 O 在线段 MO_1 的延长线上时，由球的性质可知， $\sqrt{5}^2 + m^2 = (\sqrt{2} + m)^2 + 1^2$ ，

解得 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $R^2 = OE^2 = \frac{11}{2}$ ，

所以球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 22\pi$ 。

故选：A。

7. 已知随机事件 A ， B 满足 $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A|B) = \frac{3}{4}$ ， $P(\bar{B}|A) = \frac{7}{16}$ ，则 $P(B) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{16}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{41}{48}$

【答案】A

【分析】根据已知结合条件概率公式，即可得出 $P(A\bar{B}) = \frac{7}{48}$ ，进而推得 $P(AB) = \frac{3}{48}$ 。即可根据条件概

率公式，得出答案。

【详解】由已知可得， $P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{7}{16}$ 。

因为 $P(A) = \frac{1}{3}$ ，

所以， $P(A\bar{B}) = \frac{7}{48}$ 。

又 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = \frac{1}{3}$ ，

所以， $P(AB) = \frac{3}{48}$ 。

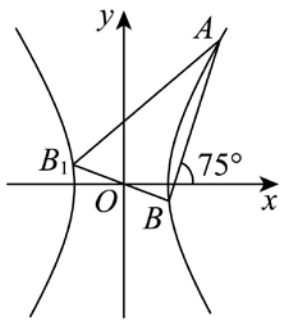
又 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{4}$ ，

所以， $P(B) = \frac{1}{4}$ 。

故选：A。

8. 如图，已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条弦 AB 所在直线的倾斜角为 75° ，点 B 关于原点 O 的

对称点为 B_1 ，若 $\angle BAB_1 = 30^\circ$ ，双曲线 C 的离心率为 e ，则 $e^2 = (\quad)$



- A. 3 B. $2+\sqrt{3}$ C. $3+\sqrt{3}$ D. 4

【答案】C

【分析】由题意结合两角和的正切公式求出 k_{AB_1}, k_{AB} ，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，利用点差法可推出

$k_{AB} \cdot k_{AB_1} = \frac{b^2}{a^2}$ ，再根据 $e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1$ ，即可求得答案.

【详解】由题可知，弦 AB 所在直线的倾斜角为 75° ， $\angle BAB_1 = 30^\circ$ ，

则直线 AB_1 的倾斜角为 45° ，

$$k_{AB_1} = \tan 45^\circ = 1, k_{AB} = \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 2 + \sqrt{3}.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $B_1(-x_2, -y_2)$ ，

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ 两式相减可得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{即 } k_{AB} \cdot k_{AB_1} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ 则 } \frac{b^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{故 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + 1 = 3 + \sqrt{3},$$

故选：C.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知复数 z_1, z_2 满足 $3z_1 + z_2 = -1 - 2i$ ， $z_1 + 3z_2 = 5 + 2i$ ，则 ()

- A. $z_1 = -1 - i$ B. $z_2 = 2 + i$
 C. $z_1 - z_2 = -3 + 2i$ D. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 - i}{5}$

【答案】ABD

【分析】根据复数的四则运算求解即可.

【详解】 $\because 3z_1 + z_2 = -1 - 2i, z_1 + 3z_2 = 5 + 2i,$

$$\therefore z_1 = -1 - i, z_2 = 2 + i,$$

$$\therefore \text{所以 } z_1 - z_2 = -3 - 2i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{2+i} = \frac{-(1+i)(2-i)}{5} = \frac{-3-i}{5},$$

故选: ABD

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{2}$, $C = 45^\circ$, 则 A 可能为 ()

- A. 30° B. 150° C. 120° D. 60°

【答案】 CD

【分析】 由正弦定理可得答案.

【详解】 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又因为 $a > c$, 所以 $A > C$,

因为 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 60^\circ$ 或 $A = 120^\circ$.

故选: CD.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上一点, 则 ()

- A. $|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2| = 4 - \sqrt{3}$ B. $|PF_1||PF_2|$ 的最大值为 8
C. $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|$ 的取值范围是 $[2, 4]$ D. $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围是 $[-2, 1]$

【答案】 CD

【分析】 利用椭圆的定义, 结合基本不等式判断 AB; 设出点 P 的坐标, 利用向量的坐标运算, 结合椭圆的范围计算判断 CD.

【详解】 由椭圆定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 4$, $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$, $|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2| = 4 - 2\sqrt{3}$, A 错误;

$$|PF_1||PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2} \right)^2 = 4, \text{ 当 } |PF_1| = |PF_2| \text{ 时取等号, B 错误;}$$

$$F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0), \text{ 设 } P(x, y), \text{ 则 } -2 \leq x \leq 2, y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}, \overrightarrow{PF_1} = (-\sqrt{3} - x, -y), \overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{3} - x, -y),$$

$$|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = 2\sqrt{+y^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}, \text{ 由 } -2 \leq x \leq 2, \text{ 得 } 2 \leq |\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| \leq 4, \text{ C 正确;}$$

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x^2 - 3 + y^2 = \frac{3}{4}x^2 - 2, \text{ } -2 \leq \frac{3}{4}x^2 - 2 \leq 1, \text{ D 正确.}$$

故选: CD

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合 $A = \{x | 2^x < 1\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 若 $\exists x \in A, x \in B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 0)$

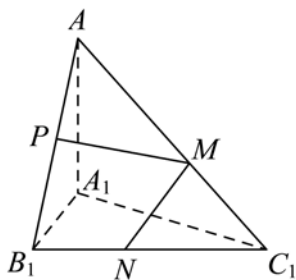
【分析】 由命题的真假得出 $a \in A$ ，从而易得其范围。

【详解】 $A = \{x | 2^x < 1\} = \{x | x < 0\}$ ， $B = \{x | x \geq a\}$ ，

因为 $\exists x \in A, x \in B$ ，所以 $a \in A$ ，所以 a 的范围是 $(-\infty, 0)$ ，

故答案为： $(-\infty, 0)$ 。

13. 如图，在三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ， $A_1B_1 = 2A_1A = 2B_1C_1 = 2$ ， P 为线段 AB_1 的中点， M, N 分别为线段 AC_1 和线段 B_1C_1 上任意一点，则 $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值为_____。



【答案】 $\sqrt{5}$

【分析】 根据题意，证得 $B_1C_1 \perp$ 平面 AB_1A_1 ，得到 $B_1C_1 \perp AB_1$ ，根据 $S_{\square AB_1M} + S_{\square B_1MC_1} = S_{\square AB_1C_1}$ ，得到 $\sqrt{5}PM \sin \angle MPB_1 + MN \sin \angle MNC_1 = \sqrt{5}$ ，进而得到 $\sqrt{5} \leq \sqrt{5}PM + MN$ ，进而得到 M 为 AC_1 的中点，且 N 为 B_1C_1 的中点，即可求解。

【详解】 因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $A_1B_1, B_1C_1 \subset$ 面 $A_1B_1C_1$ ，所以 $AA_1 \perp B_1C_1, AA_1 \perp A_1B_1$ ，

又因为 $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ， $B_1C_1 \perp A_1B_1$ ，

因为 $AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$ ， $AA_1, A_1B_1 \subset$ 平面 AB_1A_1 ，所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 AB_1A_1 ，

又因为 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1A_1 ，所以 $B_1C_1 \perp AB_1$ ，

在 $Rt \triangle AA_1B_1$ 中，可得 $AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{5}$ ，

在 $Rt \triangle AB_1C_1$ 中， $S_{\square AB_1M} + S_{\square B_1MC_1} = S_{\square AB_1C_1}$ ，

故 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times PM \sin \angle MPB_1 + \frac{1}{2} \times 1 \times MN \sin \angle MNC_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5}$ ，

则 $\sqrt{5}PM \sin \angle MPB_1 + MN \sin \angle MNC_1 = \sqrt{5}$ ，

又因为 $\sqrt{5}PM \sin \angle MPB_1 \leq \sqrt{5}PM, MN \sin \angle MNC_1 \leq MN$ ，

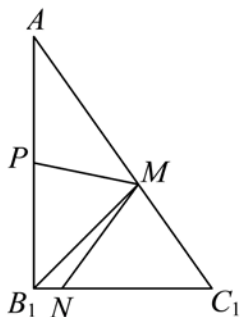
所以 $\sqrt{5}PM \sin \angle MPB_1 + MN \sin \angle MNC_1 \leq \sqrt{5}PM + MN$ ，

即 $\sqrt{5} \leq \sqrt{5}PM + MN$ ，当且仅当 $\angle MPB_1 = 90^\circ, \angle MNC_1 = 90^\circ$ 时，等号成立，

当 $\angle MPB_1 = 90^\circ$ 时， M 为 AC_1 的中点，此时当 $\angle MNC_1 = 90^\circ$ 时， N 为 B_1C_1 的中点，

综上所述， $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值是 $\sqrt{5}$ 。

故答案为： $\sqrt{5}$



14. 已知 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = x \cdot e^x$, 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) = g(x_2) > 0$ 成立, 则 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大

值为_____.

【答案】 $\frac{1}{e}/e^{-1}$

【分析】根据两函数的同构特征, 不难发现 $f(x_1) = g(\ln x_1)$, 考查利用函数 $g(x) = x \cdot e^x$ 的单调性推得 $\ln x_1 = x_2$, 从而将 $\frac{x_2}{x_1}$ 转化为 $\frac{\ln x_1}{x_1}$, 最后通过 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, ($x > 1$) 的最大值求得 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值.

【详解】因 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = x \cdot e^x$, 则 $f(x_1) = x_1 \ln x_1 = \ln x_1 \cdot e^{\ln x_1} = g(\ln x_1)$,

由 $g(x) = x \cdot e^x$ 知 $x > 0$ 时, $g'(x) = (x+1)e^x > 0$, 即函数 $g(x) = x \cdot e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由 $f(x_1) = g(x_2) > 0$ 可得: $x_1 > 1, x_2 > 0$ 且 $g(\ln x_1) = g(x_2)$, 故得: $\ln x_1 = x_2$,

则 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\ln x_1}{x_1}$, 不妨设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, ($x > 1$), 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, ($x > 1$),

故当 $1 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增, 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减,

即 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$, 故 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

故答案为: $\frac{1}{e}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 其中第 15 题 13 分, 第 16, 17 题 15 分, 第 18, 19 题 17 分, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_5 = 3$, $S_5 = 35$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{10} .

【答案】 (1) $a_n = 13 - 2n$

(2) 52

【分析】 (1) 设出 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 利用等差数列通项公式和前 n 项和公式求解即可;

(2) 由 (1) 判断出 $\{a_n\}$ 前六项为正, 后四项为负, 进而利用前 n 项和公式求解即可.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/968005007006006121>