通关秘籍 07 锐角三角函数解决实际问题（2 易错 7 题型）

目录

中考预测

锐角三角形函数值题是全国中考的热点内容，更是全国中考的必考内容。每年都有一些考生因为知识残缺、基础不牢、技能不熟、答欠规范等原因导致失分。

1．从考点频率看，运算和实际问题是数学的基础，也是高频考点、必考点，所以必须提高运算能力。

2．从题型角度看，以解答题的第五题或第六题为主，分值 8 分左右，着实不少！

误区点拨

易错点一　含锐角三角形值求值

【例 1】（2024·广东深圳·一模）计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-2\cos45°+\sqrt{8}-(\pi+2024)^{0}$．

【答案】$\sqrt{2}+1$

【分析】本题考查的是零次幂，负整数指数幂的含义，含特殊角的三角函数值的混合运算，先计算零次幂，代入特殊角的三角函数值，化简二次根式，计算零次幂，再合并即可．

【详解】解：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-2\cos45°+\sqrt{8}-(\pi+2024)^{0}$

$=2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}-1=2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1$

$=\sqrt{2}+1$．

易错点拨

本题考查的是零次幂，负整数指数幂的含义，含特殊角的三角函数值的混合运算，先计算零次幂，代入特殊角的三角函数值，化简二次根式，计算零次幂，再合并即可．

【例 2】（2024·安徽蚌埠·一模）计算：$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+2\sin60^{\circ}-\sqrt{12}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{0}$．

【答案】$5-\sqrt{3}$

【分析】根据负整数指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式的化简、零指数幂运算法则求解即可．

【详解】$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+2\sin60^{\circ}-\sqrt{12}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{0}$

$=4+\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1$

$=5-\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了负整数指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式的化简、零指数幂，解题的关键是掌握以上知识点．

【例 3】（2024·安徽滁州·一模）计算$\left(-2024\right)^{0}-2\tan45^{\circ}+|-2|+\sqrt{9}$

【答案】4

【分析】本题考查实数的运算，解题的关键是先根据零指数幂、特殊角三角函数值、绝对值和算术平方根将原式化简，然后进行乘法运算，最后进行加减运算即可．

【详解】解：$\left(-2024\right)^{0}-2\tan45^{\circ}+|-2|+\sqrt{9}$

$=1-2\times1+2+3$

$=1-2+2+3$

$=4$．

【例 4】（2024·湖北襄阳·一模）计算：$\left(\sqrt{2}\right)^{2}+\left(3-\pi\right)^{0}-|-3|+2\cos60^{\circ}$．

【答案】1

【分析】本题考查特殊角的三角函数值的混合运算，先进行乘方，零指数幂，去绝对值和特殊角的三角函数值的运算，再进行加减运算即可．

【详解】解：原式$=2+1-3+2\times\frac{1}{2}=1$．

易错点二　实物情景抽象出几何图形

【例 1】（2024·河南平顶山·一模）下图是某篮球架的侧面示意图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形．其中 BE，CD，GF 为长度固定的支架，支架在 A，D，G 处与立柱 AH 连接（AH 垂直于 MN，垂足为 H），在 B，C 处与篮板连接，旋转点 F 处的螺栓可以调节 EF 长度，使支架 BE 绕点 A 旋转，进而调节篮板的高度，已

知 $DH = 209\text{cm}$.

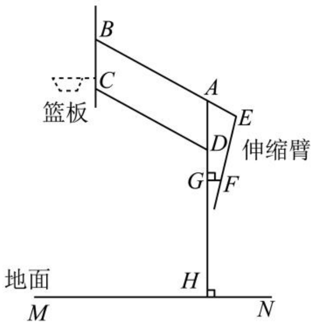


图1

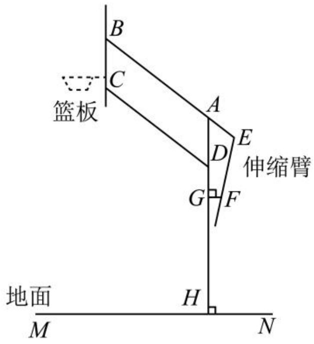


图2

(1)如图 1，当 $\angle GAE = 60°$ 时，测得点 C 离地面的高度为 289cm ，求 CD 的长度；

(2)如图 2，调节伸缩臂 EF ，将 $\angle GAE$ 由 $60°$ 调节为 $54°$ 时，请判断点 C 离地面的高度是升高了还是降低了？并计算升（或降）的距离．（参考数据 $\sin 54° \approx 0.8$，$\cos 54° \approx 0.6$ ， $\tan 54° \approx 1.4$ ）

【答案】(1) $CD = 160\text{cm}$ ；

(2)点 C 离地面的高度升高了，升高了 16cm .

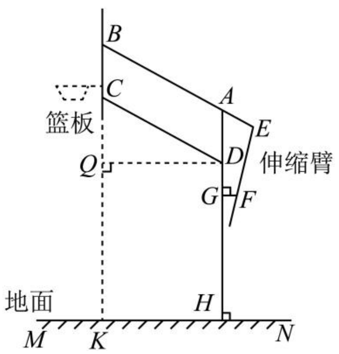
【分析】本题考查的是平行四边形性质，矩形的判定与性质，解直角三角形的实际应用，理解题意，作出合适的辅助线是解本题的关键．

（1）如图，延长 BC 与底面交于点 K ，过 D 作 $DQ \perp CK$ 于 Q ，则四边形 $DHKQ$ 为矩形，可得 $QK = DH = 208$ ，根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $AB \parallel CD$ ，当 $\angle GAE = 60°$ 时，则 $\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 60°$，此时 $\angle CDQ = 30°$ ， $CQ = 289 - 209 = 80$ ，即可求得 $CD = 2CQ = 160$ ；

（2）当 $\angle GAE = 54°$ 时，则 $\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 54°$，解直角三角形得 $CQ = CD \cdot \cos 54° \approx 160 \times 0.6 = 96$ ，从而可得答案．

【详解】（1）解：如图，延长 BC 与底面交于点 K ，过 D 作 $DQ \perp CK$ 于 Q ，则 $\angle DHK = \angle DQK = \angle HKQ = 90°$ ，四边形 $DHKQ$ 为矩形，

∴ $QK = DH = 209$ ，



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$ ，

当 $\angle GAE = 60°$ 时， 则 $\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 60°$，

此时$\angle CDQ = 30^{\circ}$，$CQ = 289 - 209 = 80cm$，

$\therefore CD = 2CQ = 160(\mathrm{cm})$；

（2）解：当$\angle GAE = 54^{\circ}$时，则$\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 54^{\circ}$，

$\therefore CQ = CD\cdot\cos 54^{\circ} \approx 160 \times 0.6 = 96cm$，

而$96>80$，$96 - 80 = 16cm$，

$\therefore$点C离地面的高度升高了，升高了$16\mathrm{cm}$.

易错点拨

本题考查的是平行四边形性质，矩形的判定与性质，解直角三角形的实际应用，理解题意，作出合适的辅助线是解本题的关键.

【例 2】(2024·江西南昌·一模）图 1 是井冈山红旗雕塑的实物图，其正面可大致简化成图 2，底座$BC = 20\mathrm{m}$，$\angle B = 26^{\circ}$，红旗边$AE = 2AB$，$EF = AC$，$AC \parallel EF$，$\angle E = 52^{\circ}$，点B，A，E在同一条直线上.

图1

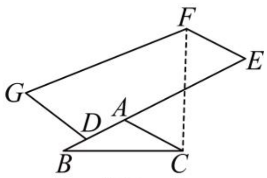


图2

(1)连接CF，求证：$\angle BCF = 90^{\circ}$.

(2)求雕塑顶端F到地面BC的距离.

（参考数据：$\sin 26^{\circ} \approx 0.44$，$\cos 26^{\circ} \approx 0.90$，$\tan 26^{\circ} \approx 0.49$）

【答案】(1)证明见解析

(2)雕塑顶端F到地面BC的距离为$19.6\mathrm{m}$.

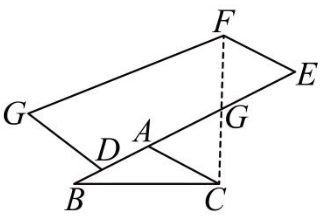
【分析】

本题考查的是全等三角形的判定与性质，解直角三角形的应用，证明$\triangle EFG \cong \triangle ACG$是解本题的关键；

（1）如图，记AE，CF的交点为G，证明$AB = AC = AG$，再利用等腰三角形的性质可得结论；

（2）利用锐角三角函数先求解$CG = 20 \times 0.49 = 9.8$，再结合全等三角形的性质可得答案.

【详解】（1）解：如图，记AE，CF的交点为G，



$\because AC \parallel EF$，$\angle E = 52^{\circ}$，

$\therefore \angle E = \angle GAC = 52^{\circ}$，$\angle EFG = \angle ACG$，

∵ $EF = AC$，

∴ $\triangle EFG \cong \triangle ACG$，

∴ $AG = EG$，

∵ $AE = 2AB$，

∴ $AB = AG$，

∵ $\angle B = 26°$，

∴ $\angle ACB = \angle GAC - \angle B = 26° = \angle B$，

∴ $AB = AC = AG$，

∴ $\angle ACG = \angle AGC = \frac{1}{2}(180° - 52°) = 64°$，

∴ $\angle BCG = 26° + 64° = 90°$，

即 $\angle BCF = 90°$．

（2）∵ $\angle B = 26°$， $\angle BCG = 90°$， $BC = 20$，

∴ $\tan\angle B = \frac{CG}{BC} = \tan 26° \approx 0.49$，

∴ $CG = 20 \times 0.49 = 9.8$，

∵ $\triangle EFG \cong \triangle ACG$，

∴ $FG = CF = 9.8$，

∴ $FC = 2 \times 9.8 = 19.6(\mathrm{m})$．

∴雕塑顶端 F 到地面 BC 的距离为 $19.6\mathrm{m}$．

【例 3】（23-24 九年级下·浙江湖州·阶段练习）如图 1 是某小区门口的门禁自动识别系统，主要由可旋转高清摄像机和其下方固定的显示屏构成．图 2 是其结构示意图，摄像机长 $AB = 20\mathrm{cm}$，点 O 为摄像机旋转轴心，O 为 AB 的中点，显示屏的上沿 CD 与 AB 平行，$CD = 15\mathrm{cm}$，AB 与 CD 连接，杆 $OE \perp AB$，$OE = 10\mathrm{cm}$，$CE = 2ED$，点 C 到地面的距离为 $60\mathrm{cm}$．若 AB 与水平地面所成的角的度数为 $36°$．

图1

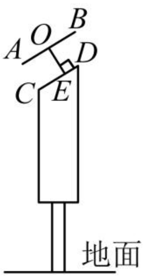


图2

(1)求显示屏所在部分的宽度 CM；

(2)求镜头 A 到地面的距离．

（参为数据：$\sin 36° \approx 0.588$，$\cos 36° \approx 0.809$，$\tan 36° \approx 0.727$，结果保留一位小数）

【答案】(1)12.1cm

(2) 68.1cm

【分析】

本题考查三角函数的实际应用，准确认清线段关系，作出合适的直角三角形是解题的关键.

（1）过点 C 作点 D 所在铅垂线的垂线，垂足为 M，则 $\angle DCM=36^\circ$，由三角形边角关系即可求出答案；

（2）连接 AC，作 AH 垂直 MC 反向延长线于点 H，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中，由 $\angle CAH=36^\circ$，$AC=10$，即可求出 CH，从而得出答案.

【详解】（1）∵ $CD\parallel AB$，AB 与水平地面所成的角的度数为 36°，

∴显示屏上沿 CD 与水平地面所成的角的度数为 36°.

过点 C 作交点 D 所成铅垂线的垂线，垂足为 M，则 $\angle DCM=36^\circ$，

∵ $CD=15\text{cm}$，

∴ $CM=CD\cos\angle DCM=15\times0.809\approx12.1(\text{cm})$；

（2）如图，连接 AC，作 AH 垂直 MC 反向延长线于点 H，

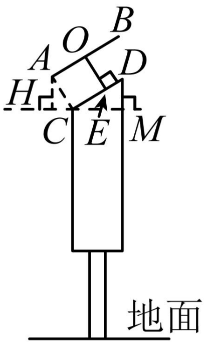


图2

∵ $AB=20\text{cm}$，O 为 AB 的中点，

∴ $AO=10\text{cm}$，

∵ $CD=15\text{cm}, CE=2ED$，

∴ $CE=10\text{cm}$，

∵ $CD\parallel AB, OE\perp AB$，

∴四边形 $ACEO$ 为矩形，$AC=OE=10\text{cm}$，

∵ $\angle ACE=90^\circ$，

∴ $\angle ACH+\angle DCM=\angle ACH+\angle CAH=90^\circ$，

∴ $\angle CAH=\angle DCM=36^\circ$，

∴ $AH=AC\cdot\cos36^\circ=10\times0.809=8.09(\text{cm})$，

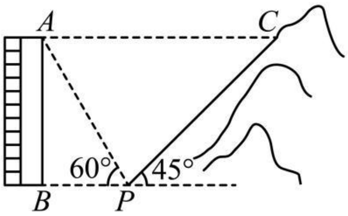
∴镜头 A 到地面的距离为 $60+8.09\approx68.1\text{cm}$.

抢分通关

题型一 仰角俯角问题

典例精讲

【例 1】（2024·安徽蚌埠·一模）如图，一居民楼底部 B 与山脚 P 位于同一水平线上，小李在 P 处测得居民楼顶 A 的仰角为 $60°$，然后他从 P 处沿坡角为 $45°$ 的山坡向上走到 C 处，这时 $PC = 30\sqrt{2}\text{m}$，点 C 与点 A 在同一水平线上，A 、B 、P 、C 在同一平面内．



(1)求居民楼 AB 的高度；

(2)求点 C 、A 之间的距离．（结果保留根号）

【答案】(1)居民楼 AB 的高度约为 30m；

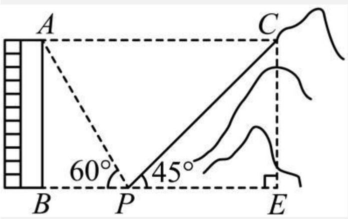
(2) C 、A 之间的距离为 $\left(10\sqrt{3}+30\right)\text{m}$

【分析】此题主要考查了解直角三角形的应用﹣仰角俯角问题，要求学生借助仰角、坡角关系构造直角三角形，并结合图形利用三角函数求解．

（1）首先分析图形：根据题意构造直角三角形，利用在 $\text{Rt}\triangle CPE$ 中，由 $\sin 45° = \dfrac{CE}{PC}$，得出 EC 的长度，进而可求出答案；

（2）在 $\text{Rt}\triangle CPE$ 中，$\tan 60° = \dfrac{AB}{BP}$，得出 BP 的长，进而得出 PE 的长，即可得出答案．

【详解】（1）解：过点 C 作 $CE \perp BP$ 于点 E，



在 $\text{Rt}\triangle CPE$ 中，$\because PC = 30\sqrt{2}\text{m}$，$\angle CPE = 45°$，

$\therefore \sin 45° = \dfrac{CE}{PC}$，

$\therefore CE = PC \cdot \sin 45° = 30\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\text{m}$，

$\because$ 点 C 与点 A 在同一水平线上，

$\therefore AB = CE = 30\text{m}$，

答：居民楼 AB 的高度约为 30m；

（2）解：在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中，$\because \angle APB = 60°$，

$\therefore \tan 60° = \frac{AB}{BP}$，

$\therefore BP = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}\text{m}$，

$\because PE = CE = 30\text{m}$，

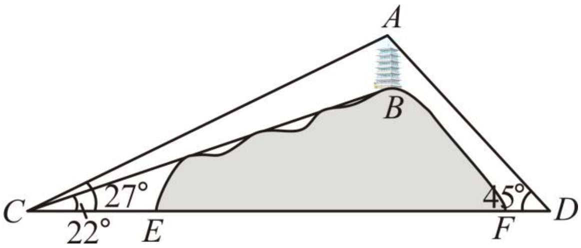
$\therefore AC = BE = \left(10\sqrt{3} + 30\right)\text{m}$，

答：C、A 之间的距离为 $\left(10\sqrt{3} + 30\right)\text{m}$．

通关指导

本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角问题，掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键．

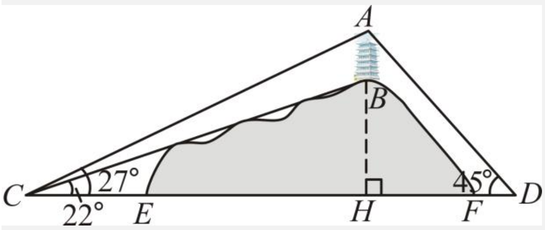
【例 2】（2024·江苏南京·一模）如图，山顶有一塔 AB，在塔的正下方沿直线 CD 有一条穿山隧道 EF，从与 E 点相距 $80\,m$ 的 C 处测得 A，B 的仰角分别为 $27°$，$22°$．从与 F 点相距 $50\,m$ 的 D 处测得 A 的仰角为 $45°$．若隧道 EF 的长为 $323\,m$，求塔 AB 的高．（参考数据：$\tan 22° \approx 0.40$，$\tan 27° \approx 0.51$．）



【答案】$33m$

【分析】延长 AB 交 CD 于点 H，则 $AH \perp CD$，结合角的正切分析求解直角三角形．

【详解】解：如图，延长 AB 交 CD 于点 H，则 $AH \perp CD$



在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中，$\angle ACH = 27^{\circ}$，

$\because \tan 27^{\circ}=\dfrac{AH}{CH}$.

$\therefore CH=\dfrac{AH}{\tan 27^{\circ}}=\dfrac{AH}{0.51}$.

在 $Rt\triangle BCH$ 中，$\angle BCH=22^{\circ}$，

$\because CH=\dfrac{BH}{\tan 22^{\circ}}=\dfrac{BH}{0.40}$，

在 $Rt\triangle ADH$ 中，$\angle D=45^{\circ}$，

$\because \tan 45^{\circ}=\dfrac{AH}{HD}$，

$\therefore HD=AH$.

由题意可得 $CE=80\,m$，$EF=323\,m$，$DF=50\,m$

$\therefore CD=CE+EF+DF=453$

$\therefore CH+DH=CH+AH=453$

又 $\because CH=\dfrac{AH}{0.51}$，

$\therefore \dfrac{AH}{0.51}+AH=453$，解得 $AH=153$，

$\therefore CH=\dfrac{153}{0.51}=300$

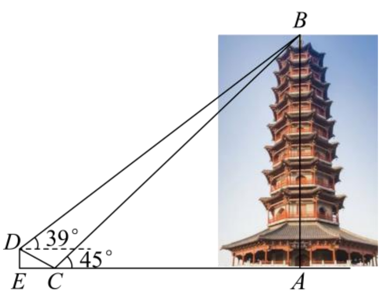
$\therefore \dfrac{BH}{0.40}=300$，解得 $BH=120$

$\therefore AB=AH-BH=33\,m$

答：塔 AB 的高为 $33m$.

名校模拟

1．（2024·江苏宿迁·一模）某校组织九年级学生到三台山森林公园游玩，数学兴趣小组同学想利用测角仪测量天和塔的高度．如图，塔 AB 前有一座高为 DE 的斜坡，已知 $CD=12\text{m}$，$\angle DCE=30^{\circ}$，点 E、C、A 在同一条水平直线上．某学习小组在斜坡 C 处测得塔顶部 B 的仰角为 45°，在斜坡 D 处测得塔顶部 B 的仰角为 39°．



(1)求 DE 的长；

(2)求塔 AB 的高度.（$\tan 39°$ 取 0.8，$\sqrt{3}$ 取 1.7，$\sqrt{2}$ 取 1.4，结果取整数）

【答案】(1) DE 的长为 6m；

(2)塔 AB 的高度约为 71m.

【分析】本题考查解直角三角形的应用.

（1）根据含 30 度角的直角三角形的性质求解即可；

（2）设 $AB=h$，分别在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 和 $\text{Rt}\triangle BCA$ 中，利用锐角三角函数定义求得 $EC=6\sqrt{3}$，$AB=h\text{m}$，过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为 F. 可证明四边形 $DEAF$ 是矩形，得到 $DF=EA=\left(h+6\sqrt{3}\right)\text{cm}$，$FA=DE=6\text{m}$. 在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中，利用锐角三角函数定义得到 $BF=DF\cdot\tan\angle BDF$，然后求解即可.

【详解】（1）解：在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，$\angle DCE=30°$，$CD=12\text{m}$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}CD=6\text{m}$.

即 DE 的长为 6m；

（2）解：设 $AB=h\text{m}$，

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，$\cos\angle DCE=\frac{EC}{CD}$，

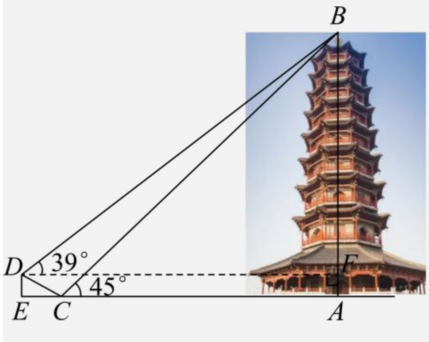
$\therefore EC=CD\cdot\cos\angle DCE=12\times\cos 30°=6\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle BCA$ 中，由 $\tan\angle BCA=\frac{AB}{CA}$，$AB=h\text{m}$，$\angle BCA=45°$，

则 $CA=\frac{AB}{\tan 45°}=h$.

$\therefore EA=CA+EC=\left(h+6\sqrt{3}\right)$.

如图，过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为 F.



根据题意，$\angle AED=\angle FAE=\angle DFA=90°$，

$\therefore$ 四边形 $DEAF$ 是矩形.

$\therefore DF=EA=\left(h+6\sqrt{3}\right)$，$FA=DE=6$.

可得 $BF=AB-FA=(h-6)$.

在Rt△BDF中，$\tan\angle BDF=\frac{BF}{DF}$，$\angle BDF=39°$，

$\therefore BF=DF\cdot\tan\angle BDF$．即$h-6=\left(h+6\sqrt{3}\right)\cdot\tan 39°$．

$\therefore h=\frac{6+6\sqrt{3}\times\tan 39°}{1-\tan 39°}\approx\frac{6+6\times1.7\times0.8}{1-0.8}\approx 71(\mathrm{m})$．

答：塔AB的高度约为$71\mathrm{m}$．

2．（2024·河南濮阳·一模）洛阳老君山风景区位于河南省洛阳市栾川县境内，在景区内有一座老子铜像（图1）．某数学兴趣小组开展了测量老子铜像高度的实践活动，具体过程如下．

【制定方案】

如图2，在老子铜像左右两侧的地面上选取C,D两处，分别测量老子铜像的仰角．且点B,C,D在同一水平直线上，图上所有点均在同一平面内．

【实地测量】

小颖同学用测角仪在点C处测量点A的仰角α为45°，小亮同学用测角仪在点D处测量点A的仰角β为53°，测得C,D两点间的距离约为$63.7\mathrm{m}$．

【解决问题】

已知测角仪的高度为$1.6\mathrm{m}$，求老子铜像高AB的值．（结果精确到$1\mathrm{m}$．参考数据：

$\sin 53°\approx\frac{4}{5},\cos 53°\approx\frac{3}{5},\tan 53°\approx\frac{4}{3}$）

图1

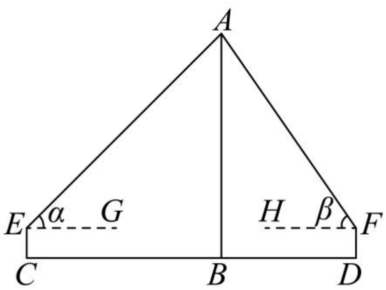


图2

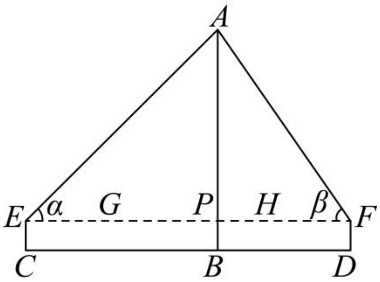
【答案】38m

【分析】

本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键．

连接EF交AB于点P，根据题意可得：$CE=DF=BP=1.6\mathrm{m}$，$EF=CD\approx 63.7\mathrm{m}$，$EF\perp AB$，然后设$AP=a\mathrm{m}$，在Rt△$AEP$中，利用锐角三角函数的定义求出$EP=AP=a\mathrm{m}$，再在Rt△$AFP$中，利用锐角三角函数的定义求出$FP\approx\frac{3}{4}a$，根据$EP+FP=EF$列出方程，进行计算即可解．

【详解】解：由题意，得$\angle AEG=45°$，$\angle AFH=53°$，$CD\approx 63.7\mathrm{m}$，$CE=DF=1.6\mathrm{m}$，



如图，连接 EF 交 AB 于点 P，则四边形 $ECDF$ 为矩形，$EF=CD\approx 63.7\text{m}$.

设 $AP=a\text{m}$. 在 $\text{Rt}\triangle AEP$ 中，$\tan 45°=\dfrac{AP}{EP}$. 即 $EP=AP=a\text{m}$.

在 $\text{Rt}\triangle AFP$ 中，$\angle AFP=53°$，$\therefore \tan 53°=\dfrac{AP}{FP}$，即 $FP\approx\dfrac{3}{4}a$.

$\because EP+FP=EF$，即 $\dfrac{3}{4}a+a\approx 63.7\text{m}$，

解得 $a\approx 36.4\text{m}$，

$\therefore AB=a+1.6=38\text{m}$.

答：老子铜像的高 AB 约为 38m.

3.（2024·浙江嘉兴·一模）综合与实践：测算校门所在斜坡的坡度.

【背景】如图 1，某学校校门在一道斜坡上，该校兴趣小组想要测量斜坡的坡度.

图 1

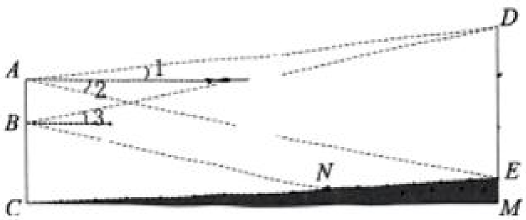


图 2

【素材 1】校门前的斜坡上铺着相同的长方形石砖，如图 2，从测量杆 AB 到校门所在位置 DE 在斜坡上有 15 块地砖.

【素材 2】在点 A 处测得仰角 $\tan\angle 1=\dfrac{1}{9}$，俯角 $\tan\angle 2=\dfrac{5}{24}$；在点 B 处直立一面镜子，光线 BD 反射至斜坡 CE 的点 N 处，测得点 B 的仰角 $\tan\angle 3=\dfrac{1}{5}$；测量杆上 $AB:BC=5:8$，斜坡 CE 上点 N 所在位置恰好是第 9 块地砖右边线.

【讨论】只需要在 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 中选择两个角，再通过计算，可得 CE 的坡度.

任务 1	分析规划	选择两个测量角的正切值：_和_.（填"$\angle 1$"，"$\angle 2$"或"$\angle 3$"）
		求 $NE:CN$ 的值.
任务 2	推理计算	求坡度 $\tan\angle ECM$ 的值.

【答案】任务 1，$\angle 2$ 和 $\angle 3$； $NE:CN=2:3$；任务 2， $\tan\angle ECM=\frac{14}{55}$.

【分析】本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形.

任务 1，选择 $\angle 2$ 和 $\angle 3$；由 $CE=15$， $CN=9$，可求得 $NE:CN=2:3$；

任务 2，过点 E 和 N 作 AC 的垂线，证明 $\triangle CGN\backsim\triangle CHE$，推出 $\frac{CG}{CH}=\frac{GN}{HE}=\frac{CN}{CE}=\frac{3}{5}$，设 $CG=3x$，$CH=5x$，$HG=x$， $BH=a$，则 $BG=a+2x$，求得 $HE=\frac{39}{5}a+15x$， $GN=5a+10x$，根据 $\frac{GN}{HE}=\frac{3}{5}$，列式计算即可求解.

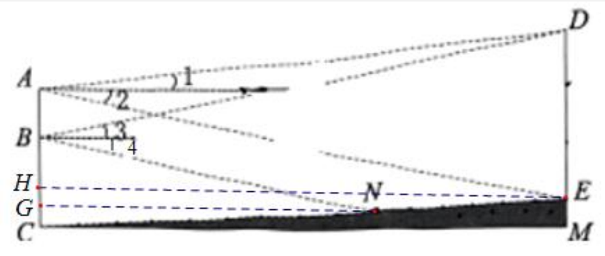
【详解】解：任务 1，选择两个测量角的正切值： $\angle 2$ 和 $\angle 3$；

$\because CE=15$， $CN=9$，

$\therefore NE=15-9=6$，

$\therefore NE:CN=6:9=2:3$；

任务 2，过点 E 和 N 作 AC 的垂线，垂足分别为点 H 和 G，



$\therefore GN\parallel HE$，

$\therefore \triangle CGN\backsim\triangle CHE$，

$\therefore \frac{CG}{CH}=\frac{GN}{HE}=\frac{CN}{CE}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$，

设 $CG=3x$， $CH=5x$， $HG=x$， $BH=a$，则 $BG=a+2x$，

$\because AB:BC=5:8$，即 $AB:(a+5x)=5:8$，

$\therefore AB=\frac{5}{8}(a+5x)$， $AH=AB+BH=\frac{13}{8}a+\frac{25}{8}x$，

由题意得 $\angle BNG=\angle 4=\angle 3$， $\angle AEH=\angle 2$， $\tan\angle 2=\frac{5}{24}$， $\tan\angle 3=\frac{1}{5}$；

$\therefore \frac{AH}{HE}=\frac{5}{24}$， $\frac{BG}{GN}=\frac{1}{5}$，

$\therefore HE=\frac{24}{5}\left(\frac{13}{8}a+\frac{25}{8}x\right)=\frac{39}{5}a+15x$， $GN=5BG=5a+10x$，

$\because \frac{GN}{HE}=\frac{3}{5}$，

$\therefore \dfrac{5a+10x}{\dfrac{39}{5}a+15x}=\dfrac{3}{5}$，

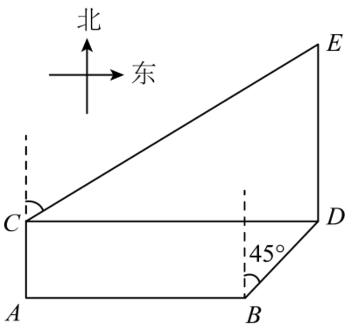
整理得 $x=\dfrac{42}{25}a$，

$\therefore \tan\angle ECM=\tan\angle HEC=\dfrac{CH}{HE}=\dfrac{5x}{\dfrac{39}{5}a+15x}=\dfrac{5\times\dfrac{42}{25}a}{\dfrac{39}{5}a+15\times\dfrac{42}{25}a}=\dfrac{14}{55}$．

题型二 方位角问题

典例精讲

【例 1】（2024·重庆·一模）为了缓解学习压力，就读于育才成功学校的小育和就读于育才本部的哥哥每周都会从各自学校出发前往奥体中心公交站汇合一同前往奥体中心打羽毛球． 经勘测，大公馆公交站点 C 在育才成功学校点 A 的正北方 200 米处，育才中学本部点 B 在点 A 的正东方 600 米处，点 D 在点 B 的东北方向，点 D 在点 C 的正东方，奥体公交站点 E 在点 D 的正北方，点 E 在点 C 的北偏东 $60°$ 方向．（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）



(1)求 BD 的长度；(结果精确到 1 米)

(2)周五放学，小育和哥哥分别从各自学校同时出发，前往点 E 汇合． 小育的路线为 $A—C—E$，他从点 A 步行至点 C 再乘坐公交车前往点 E，假设小育匀速步行且步行速度为 80 米每分钟，公交车匀速行驶且速度为 250 米每分钟，公交车行驶途中停靠了一站，上下客合计耗时 2 分钟(小育上车和下车时间忽略不计)． 哥哥的路线为 $B—D—E$，全程步行，他从点 B 经过点 D 买水(买水时间忽略不计)再前往点 E，假设哥哥匀速步行且速度为 100 米每分钟． 请问小育和哥哥谁先到达点 E 呢?说明理由．

【答案】(1) 283 米

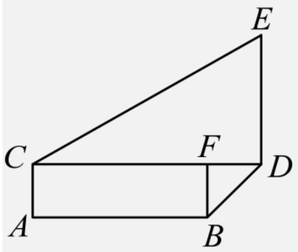
(2)小育哥哥先到达点 E

【分析】本题考查了方位，等腰直角三角形，含 $30°$ 的直角三角形，解直角三角形，勾股定理，解题的关键是熟练掌握特殊的直角三角形的性质，以及勾股定理，

（1）利用等腰直角三角形的性质即可求解；

（2）利用直角三角形的性质和勾股定理可求出CE, DE，在根据时间=路程÷速度，即可求解；

【详解】（1）解：依题意得：$AC=200\text{m}$，$AB=600\text{m}$，$BF\perp CD$于点F，



$\therefore BF=AC=200\text{m}$

$\because \angle FBD=45°$

$\therefore FD=BF=200\text{m}$，

$\therefore BD=\sqrt{2}BF=200\times 1.414\approx 283$（米）

（2）解：小育哥哥先到达点E，理由如下：

易知：$CF=AB=600\text{m}$

$\therefore CD=CF+FD=600+200=800\text{m}$，

$\because$点E在点C的北偏东$60°$方向，

$\therefore \angle ECD=90°-60°=30°$，

在$\text{Rt}\triangle EDC$中，

$\therefore CE=2ED$

由勾股定理可得：$ED^2+CD^2=CE^2$

即：$ED^2+800^2=(2ED)^2$，

解得：$ED=\dfrac{800\sqrt{3}}{3}\approx 462$，

$\therefore CE=462\times 2=924$，

$t_{AC}=200\div 80=2.5$分，$t_{CE}=924\div 250+2\approx 3.7+2=5.7$分，

小育到达点E所花总时间为：$t_{AC}+t_{CE}=2.5+5.7=8.2$分，

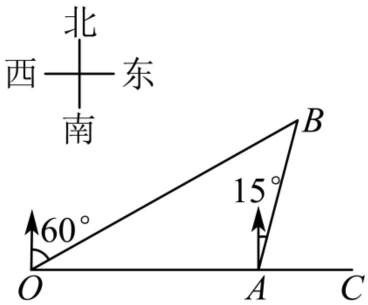
小育哥哥到达点E所花总时间为：$t=(283+462)\div 100\approx 7.5$分，

则小育哥哥先到达点E.

通关指导

本题考查了方位，等腰直角三角形，含$30°$的直角三角形，解直角三角形，勾股定理，解题的关键是熟练掌握特殊的直角三角形的性质，以及勾股定理。

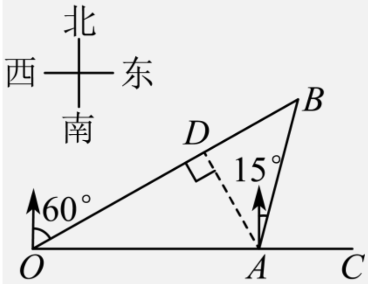
【例 2】（2024·湖北襄阳·一模）如图，港口 A 在观测站 O 的正东方向，$OA=4\text{km}$，某船从港口 A 出发，沿北偏东$15°$方向航行一段距离后到达 B 处，此时从观测站 O 处测得该船位于北偏东$60°$的方向，求该船航行的距离（即 AB 的长）.



【答案】该船航行的距离为$2\sqrt{2}\text{km}$

【分析】本题考查解直角三角形的实际应用，过点A作$AD\perp OB$，分别解$\text{Rt}\triangle ADO$和$\text{Rt}\triangle ADB$，求出AB的长即可.

【详解】解：过点A作$AD\perp OB$，



由题意，得：$\angle AOD=90°-60°=30°,\angle OAB=90°+15°=105°$，

$\therefore\angle B=180°-30°-105°=45°$，

在$\text{Rt}\triangle ADO$中，$\angle AOD=30°,OA=4$，

$\therefore AD=\frac{1}{2}OA=2$，

在$\text{Rt}\triangle ADB$中，$\angle B=45°,AD=2$，

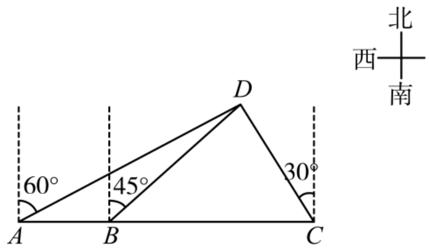
$\therefore AB=\sqrt{2}AD=2\sqrt{2}$；

答：该船航行的距离为$2\sqrt{2}\text{km}$.

名校模拟

1.（2024·重庆·一模）如图，车站 A 在车站 B 的正西方向，它们之间的距离为 100 千米，修理厂 C 在车站 B 的正东方向．现有一辆客车从车站 B 出发，沿北偏东$45°$方向行驶到达 D 处，已知 D 在 A 的北偏东$60°$方

向，D 在 C 的北偏西 $30°$ 方向．



(1)求车站 B 到目的地 D 的距离（结果保留根号）

(2)客车在 D 处准备返回时发生了故障，司机在 D 处拨打了救援电话并在原地等待，一辆救援车从修理厂 C 出发以 35 千米每小时的速度沿 CD 方向前往救援，同时一辆应急车从车站 A 以 60 千米每小时的速度沿 AD 方向前往接送滞留乘客，请通过计算说明救援车能否在应急车到达之前赶到 D 处．（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41,\sqrt{3}\approx1.73,\sqrt{6}\approx2.45$）

【答案】(1) $(50\sqrt{6}+50\sqrt{2})$ 千米

(2)能

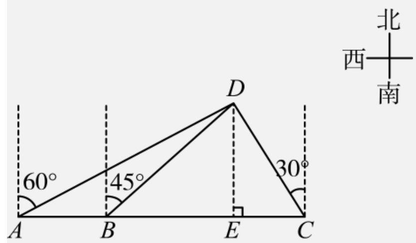
【分析】

本题考查了解直角三角形的应用-方向角问题：

（1）过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，得出 $BE=DE$，$BD=\sqrt{2}DE$，设 $BE=DE=x$ 千米，则 $BD=\sqrt{2}x$ 千米，在 $Rt\triangle ADE$ 中，$AE=\sqrt{3}x$ 千米，根据 $AE=AB+BE$ 列方程求出 $x=50\sqrt{3}+50$，从而可求出 BD；

（2）分别求出 AD,CD 的长，再求出应急车和救援车从出发地到目的地行驶时间，再进行比较即可得出答案

【详解】（1）解：过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，如图，



则 $\angle DEB=90°$,

由题意知，$\angle ADE=60°,\angle DBE=90°-45°=45°$,

∴ $\triangle DBE$ 是等腰直角三角形，

∴ $DE=BE,BD=\sqrt{2}DE$,

设 $BE=DE=x$ 千米，则 $BD=\sqrt{2}x$ 千米，

在 $Rt\triangle ADE$ 中，$\tan\angle ADE=\dfrac{AE}{DE}=\tan60°=\sqrt{3}$,

∴ $AE=\sqrt{3}DE=\sqrt{3}x$，

$\because AB+BE=AE$，

$\therefore 100+x=\sqrt{3}x$，

解得：$x=50\sqrt{3}+50$，

$\therefore BD=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\left(50\sqrt{3}+50\right)=\left(50\sqrt{6}+50\sqrt{2}\right)$千米，

即车站 B 到目的地 D 的距离为$(50\sqrt{6}+50\sqrt{2})$千米；

（2）解：根据题意得，Ð$CDE=30°$，

又$\cos\angle EDC=\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore CD=\dfrac{2}{\sqrt{3}}DE=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\left(50\sqrt{3}+50\right)=\left(100+\dfrac{100\sqrt{3}}{3}\right)$千米，

又$\because \angle DAE=30°$,

$\therefore AD=2DE=2\times\left(50\sqrt{3}+50\right)=\left(100\sqrt{3}+100\right)$千米，

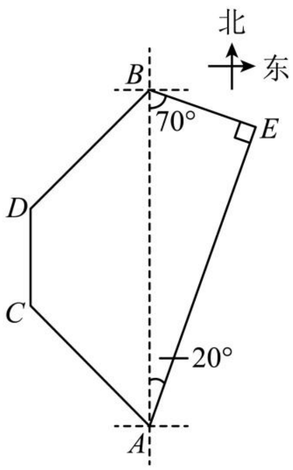
救援车所用时间为：$\left(100+\dfrac{100\sqrt{3}}{3}\right)\div 35\approx 4.5$（时）；

应急车所用时间为：$\left(100\sqrt{3}+100\right)\div 60\approx 4.55$（时）

$\because 4.5<4.55$，

$\therefore$救援车能在应急车到达之前赶到 D 处．

2．（2024·重庆开州·二模）如图，货船在港口 A 装货，要运至其正北方向 300 海里处的港口 B，由于环境因素影响，其航行路线有两条：①由港口 A 出发，经港口 C、D 休整，最后驶向港口 B；②由港口 A 出发，经港口 E 休整，最后驶向港口 B（休整时间忽略不计）.经勘测，港口 C 在港口 A 西北方向.港口 D 在港口 C 正北方向 60 海里处，在港口 B 西南方向.港口 E 在港口 B 南偏东 $70°$ 方向，在港口 A 北偏东 $20°$ 方向.



(1)求港口 A 和港口 C 之间的距离（结果精确到个位）；

(2)由于时间关系，货船需要选择路程更短的路线，请通过计算说明是选择路线①还是路线②？（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sin 20°\approx 0.342$，$\cos 20°\approx 0.940$，$\tan 20°\approx 0.364$）

【答案】(1)港口 A 和港口 C 之间的距离是170海里

(2)路线②路程更短

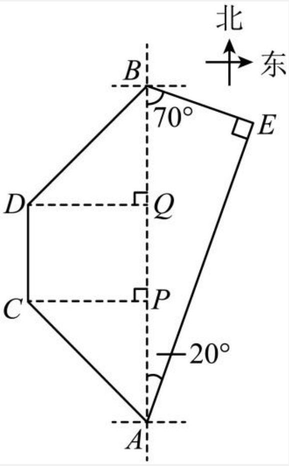
【分析】本题主要考查解直角三角形的应用．

（1）作 $DQ\perp AB$，$CP\perp AB$，先求出 $AP=BQ=DQ=CP=80$ 海里，再根据三角函数求出答案；

（2）分别求出两种路线的路程，再进行比较即可得出答案．

【详解】（1）由题意得 $\angle DBA=\angle CAB=45°$， $\angle EBA=70°$， $\angle BAE=20°$， $DC=60$， $AB=300$，

作 $DQ\perp AB$，$CP\perp AB$，



∴ $\angle DQB=\angle APC=90°$，四边形 $DCPQ$ 是矩形，

∴ $\angle DBA=\angle BDQ=\angle PCA=\angle ACP=45°$， $DQ=CP$， $DC=PQ=60$，

∴ $AP=BQ=DQ=CP$，

∵ $AB=BQ+PQ+PA=300$，

∴ $2BQ+60=300$，

∴ $AP=BQ=DQ=CP=120$，

在Rt△APC 中， $\sin45°=\dfrac{PC}{CA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{120}{CA}$，

∴ $CA=120\sqrt{2}\approx170$（海里）；

答：港口 A 和港口 C 之间的距离是170海里．

（2）在 $DC=60$ 中， $\sin45°=\dfrac{DQ}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{120}{BD}$，

∴ $CA=120\sqrt{2}$，

在Rt△ABE E 中， $\sin20°=\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{BE}{300}\approx0.342$，$\cos20°=\dfrac{AE}{BA}=\dfrac{AE}{300}\approx0.940$，

∴ $BE\approx103$（海里）， $AE\approx282$（海里），

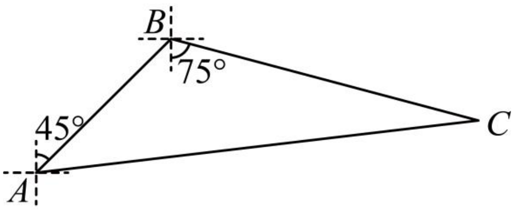
路线①的路程为 $CA+CD+BD\approx170+60+170\approx400$（海里）；

路线②的路程为 $EA+BE\approx103+282\approx385$（海里）；

$\because 385 < 400$，

$\therefore$路线②路程更短．

3．（2024·内蒙古乌海·一模）如图，禁止捕鱼期间，某海上稽查队在某海域巡逻，上午某一时刻在A处接到指挥部通知，在他们东北方向距离6海里的B处有一艘捕鱼船，正在沿南偏东$75°$方向以每小时5海里的速度航行，稽查队员立即乘坐巡逻船以每小时7海里的速度沿北偏东某一方向出发，在C处成功拦截捕鱼船．



(1)图中$\angle ABC =$_；

(2)求图中点A到捕鱼船航线BC的距离；

(3)求巡逻船从出发到成功拦截捕鱼船所用的时间．

【答案】(1)$120°$

(2) $AD = 3\sqrt{3}$ 海里

(3)巡逻船从出发到成功拦截所用时间为2小时

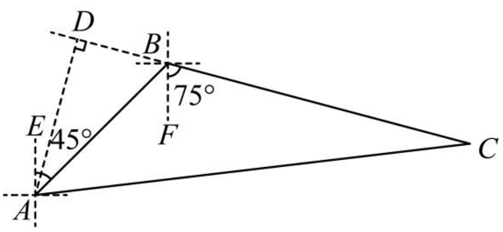
【分析】

（1）由平行线的性质可得$\angle ABF = \angle BAE = 45°$，再利用角的和差运算可得答案；

（2）过点A作$AD \perp CB$的延长线于点D，在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，求解$\angle ABD = 60°$，而$AB = 6$，再利用锐角的余弦可得答案；

（3）先求解$BD = 3$，再利用勾股定理建立方程求解即可．

【详解】（1）解：如图，由题意可得：$\angle EAB = 45°$，$\angle FBC = 75°$，$AE \parallel BF$，



$\therefore \angle ABF = \angle BAE = 45°$，

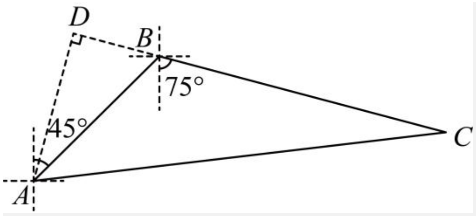
$\therefore \angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 45° + 75° = 120°$；

（2）

解：过点A作$AD \perp CB$于点D，由$\angle ABC = 120°$，得$\angle ABD = 60°$，$AB = 6$

$$\therefore \sin\angle ABD = \sin 60^{\circ} = \frac{AD}{AB}$$

$$\therefore AD = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$（海里）；



（3）

设巡逻船从出发到成功拦截所用时间为x小时；

由题意得：$\angle ABC=45°+75°=120°$，$AB=6$，$BC=5x$，$AC=7x$，

在Rt△ACD中，由勾股定理得：$(7x)^2=(5x+3)^2+(3\sqrt{3})^2$，

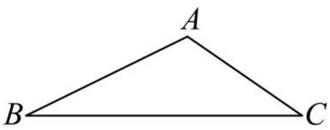
解得：$x_1=2$，$x_2=-\dfrac{3}{4}$(不合题意舍去)．

答：巡逻船从出发到成功拦截所用时间为2小时．

题型三 坡度坡比问题

典例精讲

【例1】(2024·广东江门·一模)甲、乙两人去登山，甲从小山西边山脚B处出发，已知西面山坡的坡度$i_1=1:\sqrt{3}$（坡度：坡面的垂直高度与水平长度的比，即$\tan B=1:\sqrt{3}$）．同时，乙从东边山脚C处出发，东面山坡的坡度$i_2=3:4$，坡面$AC=1000$米．



(1)求甲、乙两人出发时的水平距离BC．

(2)已知甲每分钟比乙多走10米．两人同时出发，并同时达到山顶A．求：甲、乙两人的登山速度．

【答案】(1) $BC=(600\sqrt{3}+800)$ 米

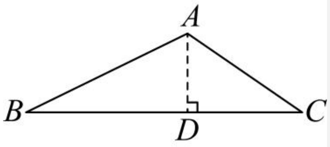
(2)甲的登山速度为60分钟/米，乙的登山速度为50分钟/米；

【分析】本题考查的是解直角三角形的应用–坡度坡角问题，掌握坡度的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键．

（1）过点A作$AD\perp BC$，根据坡度比设$AD=3x$，则$CD=4x$，利用勾股定理即可求解；

（2）设乙的速度为v分钟/米，则甲的速度为$(v+10)$分钟/米，列分式方程即可求解．

【详解】（1）解：过点A作$AD\perp BC$，如图，



由题意得：$\tan B=\dfrac{AD}{BD}=1:\sqrt{3}$，$\tan C=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{3}{4}$，

∴设 $AD=3x$，则 $CD=4x$，

∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=5x=1000$，解得：$x=200$，

∴ $AD=600$，$CD=800$

∴ $\dfrac{600}{BD}=1:\sqrt{3}$，解得：$BD=600\sqrt{3}$，

∴ $BC=BD+CD=(600\sqrt{3}+800)$ 米；

（2）解：由（1）得：$AD=600$，$BD=600\sqrt{3}$，

∴ $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=1200$，

设乙的速度为 v 分钟/米，则甲的速度为 $(v+10)$ 分钟/米，

由题意得：$\dfrac{1200}{v+10}=\dfrac{1000}{v}$，解得：$v=50$，

经检验：$v=50$ 是分式方程的解，

则 $50+10=60$，

∴甲的登山速度为 60 分钟/米，乙的登山速度为 50 分钟/米；

通关指导

本题考查的是解直角三角形的应用−坡度坡角问题，掌握坡度的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键．

【例 2】（2024·四川达州·模拟预测）如图为某单位地下停车库入口处的平面示意图，在司机开车经过坡面即将进入车库时，在车库入口 CD 的上方 BC 处会看到一个醒目的限高标志，现已知图中 BC 高度为 0.5m，AB 宽度为 9m，坡面的坡角为 $30°$．$\sqrt{3}\approx1.73$，结果精确到 0.1 米．

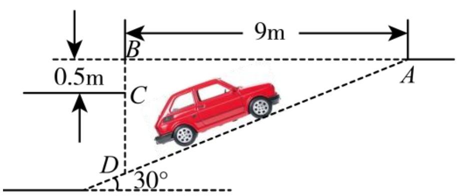


图1

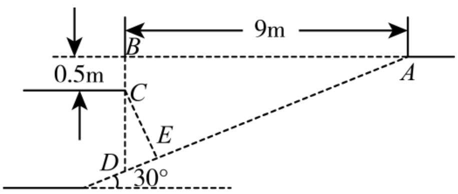


图2

(1)根据图 1 求出入口处顶点 C 到坡面的铅直高度 CD；

(2)图 2 中，线段 CE 为顶点 C 到坡面 AD 的垂直距离，现已知某货车高度为 3.9 米，请判断该车能否进入该车库停车？

【答案】(1) 4.6m

(2)该车能进入该车库停车

【分析】本题考查的是解直角三角形的应用—坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

（1）根据正切的定义求出 BD，进而求出 CD；

（2）根据正弦的定义求出 CE，根据题意解答即可.

【详解】（1）解：在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=30°$，$AB=9m$，

$\therefore BD=AB\cdot\tan\angle BAD=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}(m)$，

$\therefore CD=BD-BC=3\sqrt{3}-0.5\approx4.6(m)$，

答：点 C 到坡面的铅直高度 CD 约为 $4.6m$；

（2）解：在 $Rt\triangle CDE$ 中，$\angle CDE=60°$，$CD=\left(3\sqrt{3}-0.5\right)m$，

$\therefore CE=CD\cdot\sin\angle CDE=\left(3\sqrt{3}-0.5\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\approx4.1(m)$，

$\because 4.1>3.9$，

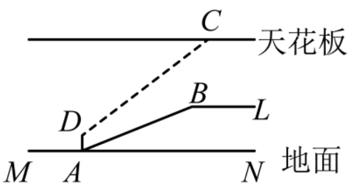
$\therefore$ 该车能进入该车库停车.

名校模拟

1．（2024·辽宁鞍山·三模）图（1）为某大型商场的自动扶梯，图（2）中的 AB 为从一楼到二楼的扶梯的侧面示意图．小明站在扶梯起点 A 处时，测得天花板上日光灯 C 的仰角为 $37°$，此时他的眼睛 D 与地面的距离 $AD=1.8m$，之后他沿一楼扶梯到达顶端 B 后又沿 BL（$BL\parallel MN$）向正前方走了 $2m$，发现日光灯 C 刚好在他的正上方．已知自动扶梯 AB 的坡度为 $1:2.4$，AB 的长度是 $13m$．

（参考数据：$\sin37°\approx0.6$，$\cos37°\approx0.8$，$\tan37°\approx0.75$）


图(1)



图(2)

(1)求图（2）中点 B 到一楼地面 MN 的距离；

(2)求日光灯 C 到一楼地面 MN 的距离．（结果保留整数）

【答案】(1) 5m

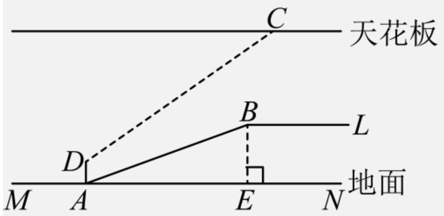
(2) 12m

【分析】此题考查了解直角三角形的应用，添加合适的辅助线是解题的关键.

（1）过点 B 作 $BE\perp MN$ 于 E，设 $AE=x\,m$，由 AB 的坡度为 $1:2.4$ $BE=\frac{5}{12}x\text{m}$，在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $x^2+\left(\frac{5}{12}x\right)^2=13^2$，解得 $x=12$，即可得到答案；

（2）过点 C 作 $CF\perp MN$ 于 F 交 BL 于 G，过点 D 作 $DJ\perp CF$ 于 J 交 BE 于 H，可证得四边形 $BEFG$，四边形 $ADJF$ 是矩形，求出 FJ 和 CJ 的长度，即可得到答案.

【详解】（1）解：过点 B 作 $BE\perp MN$ 于 E，如 $=FJ=1.8\text{m}$ 图：



设 $AE=x\,m$，

$\because$ AB 的坡度为 $1:2.4$，

$\therefore \frac{BE}{AE}=\frac{1}{2.4}$，

$\therefore BE=\frac{5}{12}x\text{m}$，

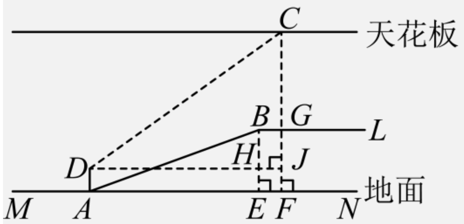
在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理得：$x^2+\left(\frac{5}{12}x\right)^2=13^2$，

解得：$x=12$，

$\therefore AE=12\text{m}$，$BE=5\text{m}$，

答：B 到一楼地面 MN 的距离为 5m；

（2）过点 C 作 $CF\perp MN$ 于 F 交 BL 于 G，过点 D 作 $DJ\perp CF$ 于 J 交 BE 于 H，



由题意知：$BG=2\text{m}$，$\angle CDJ=37^\circ$，

$\because \angle BEF=\angle EFG=90^\circ$，$\angle AEB=\angle DAE=90^\circ$，$AD\parallel BE\parallel GF$

$\therefore \angle BEF=\angle EFG=\angle BGF=90^\circ$，$\angle AEB=\angle DAE=\angle ADH=90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $BEFG$，四边形 $ADJF$ 是矩形，

$\therefore EF=BG=2\text{m}$，$AD=FJ=1.8\text{m}$，$AF=DJ$，

由（1）可知，$AF=AE+EF=12+2=14\text{m}$，

$\therefore DJ=14\text{m}$，