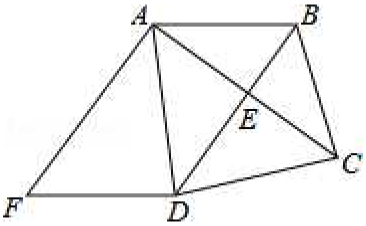
全等相似四边形综合大题

1．（2014•深圳）已知 BD 垂直平分 AC，∠BCD=∠ADF，AF⊥AC，

（1）证明 ABDF 是平行四边形；

（2）若 AF=DF=5，AD=6，求 AC 的长．



考点：平行四边形的判定；线段垂直平分线的性质；勾股定理．

分析：（1）先证得△ADB≌△CDB 求得∠ADF=∠BAD，所以 AB∥FD，因为 BD⊥AC，AF⊥AC，所以 AF∥BD，即可证得．

（2）先证得平行四边形是菱形，然后根据勾股定理即可求得．

解答：（1）证明：∵BD 垂直平分 AC，

∴AB=BC，AD=DC，

在△ADB 与△CDB 中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ AD=DC, \\ DB=DB \end{cases}$$

∴△ADB≌△CDB（SSS）

∴∠BCD=∠BAD，

∵∠BCD=∠ADF，

∴∠BAD=∠ADF，

∴AB∥FD，

∵BD⊥AC，AF⊥AC，

∴AF∥BD，

∴四边形 ABDF 是平行四边形，

（2）解：∵四边形 ABDF 是平行四边形，AF=DF=5，

∴▱ABDF 是菱形，

∴AB=BD=5，

∵AD=6，

设 BE=x，则 DE=5−x，

∴$AB^2-BE^2=AD^2-DE^2$，

即 $5^2-x^2=6^2-(5-x)^2$

解得：$x=\frac{7}{5}$，

∴$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{24}{5}$，

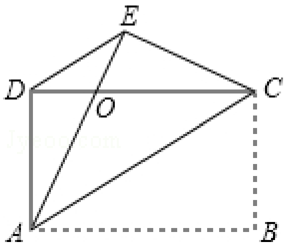
∴$AC=2AE=\frac{48}{5}$．

点评：本题考查了平行四边形的判定，菱形的判定和性质以及勾股定理的应用．

2．（7 分）（2014•呼和浩特）如图，四边形 ABCD 是矩形，把矩形沿 AC 折叠，点 B 落在点 E 处，AE 与 DC 的交点为 O，连接 DE．

（1）求证：△ADE≌△CED；

（2）求证：DE∥AC．



考点：翻折变换（折叠问题）；全等三角形的判定与性质；矩形的性质．

专题：证明题．

分析：（1）根据矩形的性质和折叠的性质可得 BC=CE=AD，AB=AE=CD，根据 SSS 可证△ADE≌△CED（SSS）；

（2）根据全等三角形的性质可得∠EDC=∠DEA，由于△ACE 与△ACB 关于 AC 所在直线对称，可得∠OAC=∠CAB，根据等量代换可得∠OAC=∠DEA，再根据平行线的判定即可求解．

解答：证明：（1）∵四边形 ABCD 是矩形，

∴AD=BC，AB=CD，

又∵AC 是折痕，

∴BC=CE=AD，

AB=AE=CD，

在△ADE 与△CED 中，

$$\begin{cases} CE=AD \\ AE=CD, \\ DE=ED \end{cases}$$

∴△ADE≌△CED（SSS）；

（2）∵△ADE≌△CED，

∴∠EDC=∠DEA，

又∵△ACE 与△ACB 关于 AC 所在直线对称，

∴∠OAC=∠CAB，

∵∠OCA=∠CAB，

∴∠OAC=∠OCA，

∴2∠OAC=2∠DEA，

∴∠OAC=∠DEA，

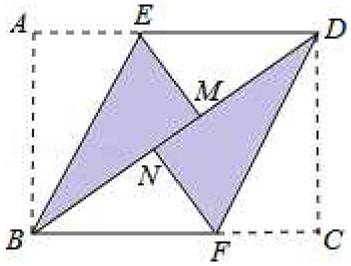
∴DE∥AC．

点评：本题考查了翻折变换（折叠问题），矩形的性质，以及全等三角形的判定与性质，正确证明三角形全等是关键．

3．（10 分）（2013•连云港）在矩形 ABCD 中，将点 A 翻折到对角线 BD 上的点 M 处，折痕 BE 交 AD 于点 E．将点 C 翻折到对角线 BD 上的点 N 处，折痕 DF 交 BC 于点 F．

（1）求证：四边形 BFDE 为平行四边形；

（2）若四边形 BFDE 为为菱形，且 AB=2，求 BC 的长．



考点：矩形的性质；平行四边形的判定；菱形的性质；翻折变换（折叠问题）

分析：（1）证△ABE≌△CDF，推出 AE=CF，求出 DE=BF，DE∥BF，根据平行四边形判定推出即可．

（2）求出∠ABE=30°，根据直角三角形性质求出 AE、BE，即可求出答案．

解答：（1）证明：∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠A=∠C=90°，AB=CD，AB∥CD，

∴∠ABD=∠CDB，

∵在矩形 ABCD 中，将点 A 翻折到对角线 BD 上的点 M 处，折痕 BE 交 AD 于点 E．将点 C 翻折到对角线 BD 上的点 N 处，

∴$\angle ABE=\angle EBD=\frac{1}{2}\angle ABD$，$\angle CDF=\frac{1}{2}\angle CDB$，

∴∠ABE=∠CDF，

在△ABE 和△CDF 中

$$\begin{cases}\angle A=\angle C\\ AB=CD\\ \angle ABE=\angle CDF\end{cases}$$

∴△ABE≌△CDF（ASA），

∴AE=CF，

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴AD=BC，AD∥BC，

∴DE=BF，DE∥BF，

∴四边形 BFDE 为平行四边形；

（2）解：∵四边形 BFDE 为为菱形，

∴BE=ED，∠EBD=∠FBD=∠ABE，

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴AD=BC，∠ABC=90°，

∴∠ABE=30°，

∵∠A=90°，AB=2，

∴$AE=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BE=2AE=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，

$\therefore BC=AD=AE+ED=AE+BE=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

点评：本题考查了平行四边形的判定，菱形的性质，矩形的性质，含 30 度角的直角三角形性质的应用，主要考查学生运用定理进行推理和计算的能力．

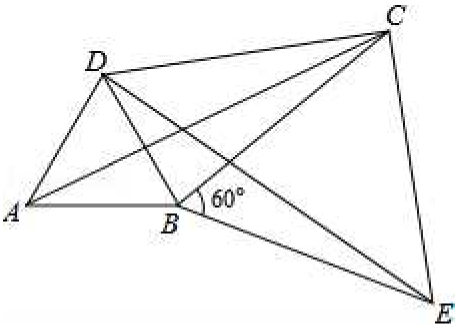
4．（10 分）（2014•兰州）给出定义，若一个四边形中存在相邻两边的平方和等于一条对角线的平方，则称该四边形为勾股四边形．

（1）在你学过的特殊四边形中，写出两种勾股四边形的名称；

（2）如图，将△ABC 绕顶点 B 按顺时针方向旋转 60°得到△DBE，连接 AD，DC，CE，已知∠DCB=30°．

①求证：△BCE 是等边三角形；

②求证：$DC^2+BC^2=AC^2$，即四边形 ABCD 是勾股四边形．



考点：四边形综合题．

分析：（1）根据定义和特殊四边形的性质，则有矩形或正方形或直角梯形；

（2）①首先证明△ABC≌△BDC，得出 AC=DE，BC=BE，连接 CE，进一步得出△BCE 为等边三角形；

②利用等边三角形的性质，进一步得出△DCE 是直角三角形，问题得解．

解答：解：（1）正方形、矩形、直角梯形均可；

证明：（2）①∵△ABC≌△DBE，

∴BC=BE，

∵∠CBE=60°，

∴△BCE 是等边三角形；

②∵△ABC≌△DBE，

∴BE=BC，AC=ED；

∴△BCE 为等边三角形，

∴BC=CE，∠BCE=60°，

∵∠DCB=30°，

∴∠DCE=90°，

在 Rt△DCE 中，

$DC^2+CE^2=DE^2$，

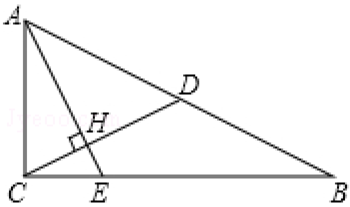
$\therefore DC^2+BC^2=AC^2$．

点评：此题主要考查勾股定理，三角形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，是一道综合性很强的题目．

5．（10 分）（2014•上海）如图，已知 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，CD 是斜边 AB 上的中线，过点 A 作 AE⊥CD，AE 分别与 CD、CB 相交于点 H、E，AH=2CH．

（1）求 sinB 的值；

（2）如果 CD=$\sqrt{5}$，求 BE 的值．



考点：解直角三角形；直角三角形斜边上的中线．

专题：几何图形问题．

分析：（1）根据∠ACB=90°，CD 是斜边 AB 上的中线，可得出 CD=BD，则∠B=∠BCD，再由 AE⊥CD，可证明∠B=∠CAH，由 AH=2CH，可得出 CH：AC=1：$\sqrt{5}$，即可得出 sinB 的值；

（2）根据 sinB 的值，可得出 AC：AB=1：$\sqrt{5}$，再由 AB=2$\sqrt{5}$，得 AC=2，则 CE=1，从而得出 BE．

解答：解：（1）∵∠ACB=90°，CD 是斜边 AB 上的中线，

∴CD=BD，

∴∠B=∠BCD，

∵AE⊥CD，

∴∠CAH+∠ACH=90°，

又∠ACB=90°

∴∠BCD+∠ACH=90°

∴∠B=∠BCD=∠CAH，即∠B=∠CAH，

∵AH=2CH，

∴由勾股定理得 AC=$\sqrt{5}$CH，

∴CH：AC=1：$\sqrt{5}$，

∴sinB=$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

（2）∵sinB=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴AC：AB=1：$\sqrt{5}$，

∴AC=2．

∵∠CAH=∠B，

∴sin∠CAH=sinB=$\frac{\sqrt{5}}{5}$=$\frac{1}{\sqrt{5}}$，

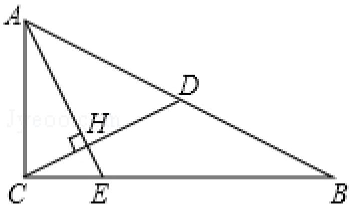
设 CE=x（x＞0），则 AE=$\sqrt{5}$x，则 $x^2+2^2=(\sqrt{5}x)^2$，

∴CE=x=1，AC=2，

在 Rt△ABC 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，

∴BC=4，

∴BE=BC−CE=3．

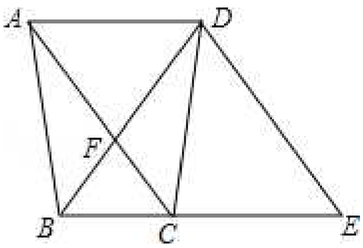


点评：本题考查了解直角三角形，以及直角三角形斜边上的中线，注意性质的应用，难度不大．

6．（12分）（2014•上海）已知：如图，梯形ABCD中，AD∥BC，AB=DC，对角线AC、BD相交于点F，点E是边BC延长线上一点，且∠CDE=∠ABD．

（1）求证：四边形ACED是平行四边形；

（2）连接AE，交BD于点G，求证：$\frac{DG}{GB}=\frac{DF}{DB}$．



考点：相似三角形的判定与性质；全等三角形的判定与性质；平行四边形的判定．

专题：证明题．

分析：（1）证△△BAD≌△CDA，推出∠ABD=∠ACD=∠CDE，推出AC∥DE即可；

（2）根据平行得出比例式，再根据比例式的性质进行变形，即可得出答案．

解答：证明：（1）∵梯形ABCD，AD∥BC，AB=CD，

∴∠BAD=∠CDA，

在△BAD和△CDA中

$$\begin{cases} AD=AD \\ \angle BAD=\angle CDA \\ AB=CD \end{cases}$$

∴△BAD≌△CDA（SAS），

∴∠ABD=∠ACD，

∵∠CDE=∠ABD，

∴∠ACD=∠CDE，

∴AC∥DE，

∵AD∥CE，

∴四边形ACED是平行四边形；

（2）∵AD∥BC，

∴$\frac{AD}{BE}=\frac{DG}{GB}$，$\frac{BC}{AD}=\frac{BF}{DF}$，

∴$\frac{BC+AD}{AD}=\frac{BF+DF}{DF}$，

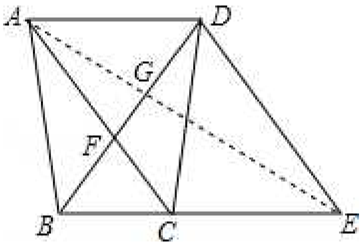
∵平行四边形ACED，AD=CE，

$\therefore \frac{BC+CE}{AD}=\frac{BF+DF}{DF}$,

$\therefore \frac{BE}{AD}=\frac{BD}{DF}$,

$\therefore \frac{AD}{BE}=\frac{DF}{BD}$,

$\therefore \frac{DG}{GB}=\frac{DF}{DB}$.

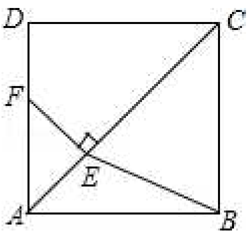


点评：本题考查了比例的性质，平行四边形的判定，平行线的判定的应用，主要考查学生运用定理进行推理的能力，题目比较好，难度适中．

7．（7 分）（2014•贵港）如图，在正方形 ABCD 中，点 E 是对角线 AC 上一点，且 CE=CD，过点 E 作 EF⊥AC 交 AD 于点 F，连接 BE．

（1）求证：DF=AE；

（2）当 AB=2 时，求 BE^2 的值．



考点：正方形的性质；角平分线的性质；勾股定理．

分析：（1）连接 CF，根据“HL”证明 Rt△CDF 和 Rt△CEF 全等，根据全等三角形对应边相等可得 DF=EF，根据正方形的对角线平分一组对角可得∠EAF=45°，求出△AEF 是等腰直角三角形，再根据等腰直角三角形的性质可得 AE=EF，然后等量代换即可得证；

（2）根据正方形的对角线等于边长的$\sqrt{2}$倍求出 AC，然后求出 AE，过点 E 作 EH⊥AB 于 H，判断出△AEH 是等腰直角三角形，然后求出 AE=AH=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AE，再求出 BH，然后利用勾股定理列式计算即可得解．

解答：（1）证明：如图，连接 CF，

在 Rt△CDF 和 Rt△CEF 中，

$\begin{cases} CF=CF \\ CE=CD \end{cases}$,

∴Rt△CDF≌Rt△CEF（HL），

∴DF=EF，

∵AC 是正方形 ABCD 的对角线，

∴∠EAF=45°，

∴△AEF 是等腰直角三角形，

∴AE=EF，

∴DF=AE；

（2）解：∵AB=2，

∴$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，

∵CE=CD，

∴$AE=2\sqrt{2}-2$，

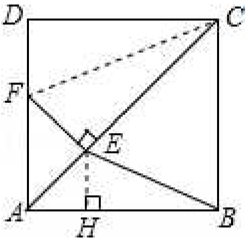
过点 E 作 EH⊥AB 于 H，

则△AEH 是等腰直角三角形，

∴$AE=AH=\frac{\sqrt{2}}{2}AE=\frac{\sqrt{2}}{2}\times（2\sqrt{2}-2）=2-\sqrt{2}$，

∴$BH=2-（2-\sqrt{2}）=\sqrt{2}$，

在 Rt△BEH 中，$BE^2=BH^2+EH^2=（\sqrt{2}）^2+（2-\sqrt{2}）^2=8-4\sqrt{2}$.

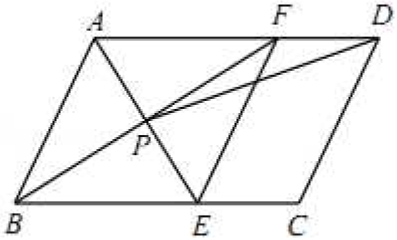


点评：本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质，勾股定理的应用，作辅助线构造出全等三角形和直角三角形是解题的关键．

8．（5 分）（2014•北京）如图，在▱ABCD 中，AE 平分∠BAD，交 BC 于点 E，BF 平分 ABC，交 AD 于点 F，AE 与 BF 交于点 P，连接 EF，PD．

（1）求证：四边形 ABEF 是菱形；

（2）若 AB=4，AD=6，∠ABC=60°，求 tan∠ADP 的值．



考点：菱形的判定；平行四边形的性质；解直角三角形．

分析：（1）先证明四边形是平行四边形，再根据平行四边形和角平分线的性质可得 AB=BE，AB=AF，AF=BE，从而证明四边形 ABEF 是菱形；

（2）作 PH⊥AD 于 H，根据四边形 ABEF 是菱形，∠ABC=60°，AB=4，得到 AB=AF=4，∠ABF=∠ADB=30°，AP⊥BF，从而得到 $PH=\sqrt{3}$，DH=5，然后利用锐角三角函数的定义求解即可．

解答：（1）证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴AD∥BC．

∴∠DAE=∠AEB．

∵AE 是角平分线，

∴∠DAE=∠BAE．

∴∠BAE=∠AEB．

∴AB=BE．

同理 AB=AF．

∴AF=BE．

∴四边形 ABEF 是平行四边形．

∵AB=BE，

∴四边形 ABEF 是菱形．

（2）解：作 PH⊥AD 于 H，

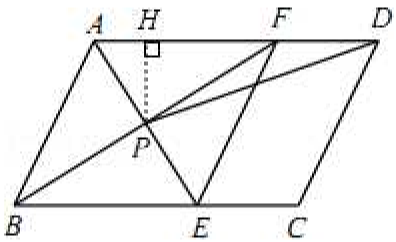
∵四边形 ABEF 是菱形，∠ABC=60°，AB=4，

∴AB=AF=4，∠ABF=∠ADB=30°，AP⊥BF，

∴AP=$\frac{1}{2}$AB=2，

∴PH=$\sqrt{3}$，DH=5，

∴tan∠ADP=$\frac{PH}{DH}$=$\frac{\sqrt{3}}{5}$．

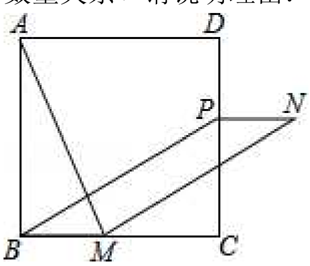


点评：本题考查了菱形的判定及平行四边形的性质，解题的关键是牢记菱形的几个判定定理，难度不大．

9．（10 分）（2014•玉林）如图，在正方形 ABCD 中，点 M 是 BC 边上的任一点，连接 AM 并将线段 AM 绕 M 顺时针旋转 90°得到线段 MN，在 CD 边上取点 P 使 CP=BM，连接 NP，BP．

（1）求证：四边形 BMNP 是平行四边形；

（2）线段 MN 与 CD 交于点 Q，连接 AQ，若△MCQ∽△AMQ，则 BM 与 MC 存在怎样的数量关系？请说明理由．



考点：相似三角形的判定与性质；平行四边形的判定与性质；正方形的性质．

分析：（1）根据正方形的性质可得 AB=BC，∠ABC=∠B，然后利用“边角边”证明△ABM 和△BCP 全等，根据全等三角形对应边相等可得 AM=BP，∠BAM=∠CBP，再求出 AM⊥BP，从而得到 MN∥BP，然后根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明即可；

（2）根据同角的余角相等求出∠BAM=∠CMQ，然后求出△ABM 和△MCQ 相似，根

据相似三角形对应边成比例可得$\frac{AB}{MC}=\frac{AM}{MQ}$，再求出△AMQ∽△ABM，根据相似三角形对应边成比例可得$\frac{AB}{BM}=\frac{AM}{MQ}$，从而得到$\frac{AB}{MC}=\frac{AB}{BM}$，即可得解．

解答：（1）证明：在正方形ABCD中，AB=BC，∠ABC=∠B，

在△ABM和△BCP中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABC=\angle B \\ CP=BM \end{cases},$$

∴△ABM≌△BCP（SAS），

∴AM=BP，∠BAM=∠CBP，

∵∠BAM+∠AMB=90°，

∴∠CBP+∠AMB=90°，

∴AM⊥BP，

∵AM并将线段AM绕M顺时针旋转90°得到线段MN，

∴AM⊥MN，且AM=MN，

∴MN∥BP，

∴四边形BMNP是平行四边形；

（2）解：BM=MC．

理由如下：∵∠BAM+∠AMB=90°，∠AMB+∠CMQ=90°，

∴∠BAM=∠CMQ，

又∵∠B=∠C=90°，

∴△ABM∽△MCQ，

∴$\frac{AB}{MC}=\frac{AM}{MQ}$，

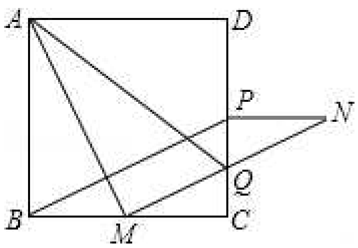
∵△MCQ∽△AMQ，

∴△AMQ∽△ABM，

∴$\frac{AB}{BM}=\frac{AM}{MQ}$，

∴$\frac{AB}{MC}=\frac{AB}{BM}$，

∴BM=MC．



点评：本题考查了相似三角形的判定与性质，正方形的性质，全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定，（1）求出两个三角形全等是解题的关键，（2）根据相似于同一个三角形的两个三角形相似求出△AMQ∽△ABM是解题的关键．