云南省昆明市官渡区2023-2024学年高一上学期1月期末数学试题

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 3\},B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

【答案】B

【解析】因为 $A=\{x|1\le x\le 3\},B=\{-1,0,1,2\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

故选：B.

2. 设命题 p：$\forall n\in\mathbf{N},n^2\le 2n+5$，则 p 的否定为（　　）

A. $\forall n\in\mathbf{N},n^2>2n+5$　　B. $\forall n\in\mathbf{N},n^2=2n+5$

C. $\exists n\in\mathbf{N},n^2>2n+5$　　D. $\exists n\in\mathbf{N},n^2\le 2n+5$

【答案】C

【解析】含一个量词的命题的否定方法：修改量词，否定结论，

故 $\forall n\in\mathbf{N},n^2\le 2n+5$ 的否定为：$\exists n\in\mathbf{N},n^2>2n+5$.

故选：C.

3. 为了得到 y＝cos$\dfrac{x}{4}$ 的图象，只需把 y＝cosx 的图象上的所有点(　　)

A. 横坐标伸长到原来的4倍，纵坐标不变

B. 横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{4}$，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长到原来的4倍，横坐标不变

D. 纵坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{4}$，横坐标不变

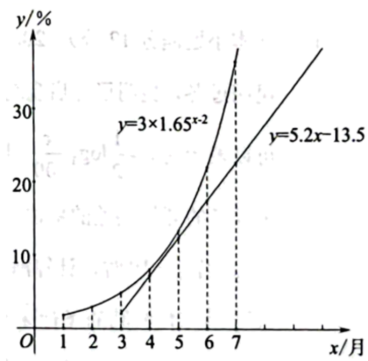
【答案】A

【解析】ω 从 1 变为 $\dfrac{1}{4}$，三角函数周期变为原来的 4 倍，

故 $y=\cos x$ 横坐标伸长到原来的4倍，纵坐标不变得到 $y=\cos\dfrac{x}{4}$.

故选：A.

4. 滇池是云南省面积最大的高原淡水湖，一段时间曾由于人类活动的加剧，滇池水质恶化，藻类水华事件频发．在适当的条件下，藻类的生长会进入指数增长阶段．滇池外海北部某年从1月到7月的水华面积占比符合指数增长，其模型为 $y=3\times1.65^{x-2}$．经研究"以鱼控藻"模式能有效控制藻类水华．如果3月开始向滇池投放一定量的鱼群后，鱼群消耗水华面积占比呈现一次函数 $y=5.2x-13.5$，将两函数模型放在同期进行比较，如图所示．下列说法正确的是（参考数据：$1.65^6\approx20.2, 1.65^7\approx33.3$）（　　）



A. 水华面积占比每月增长率为1.65

B. 如果不采取有效措施，到8月水华的面积占比就会达到60%左右

C. "以鱼控藻"模式并没有对水华面积占比减少起到作用

D. 7月后滇池藻类水华会因"以鱼控藻"模式得到彻底治理

【答案】B

【解析】对于A，由于模型 $y=3\times1.65^{x-2}$ 呈指数增长，故A错误；

对于B，当 $x=8$ 时，$y=3\times1.65^{8-2}\approx3\times20.2=60.6$，故B正确；

对于C，因为鱼群消耗水华面积占比呈现一次函数 $y=5.2x-13.5$，

所以"以鱼控藻"模式对水华面积占比减少起到作用，故C错误；

对于D，由两函数模型放在同期进行比较的图象可知，

7月后滇池藻类水华并不会因"以鱼控藻"模式得到彻底治理，故D错误.

故选：B.

5. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. π 是函数 $f\left(x\right)$ 的一个周期

B. 函数 $f\left(x\right)$ 的对称轴是 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$

C. 函数 $f\left(x\right)$ 取最大值时自变量 x 的集合为 $\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. 函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$

【答案】B

【解析】对于 A：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$，故 A 错误；

对于 B：令 $x-\frac{\pi}{4}=k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，则 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，故 B 正确；

对于 C：令 $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，则 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以取最大值时 x 的取值集合为 $\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 C 错误；

对于 D：令 $2k\pi-\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，解得 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以单调递增区间是 $\left[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，故 D 错误.

故选：B.

6. 下列说法正确的是（　　）

A. 若 $ab\neq 0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的最小值为 2

B. 若 $x>1$，则 $x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值为 2

C. 若正实数 a,b 满足 $a+b=2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 2

D. 若 $x\in\left(0,\pi\right)$，则 $\sin x+\frac{4}{\sin x}$ 的最小值为 4

【答案】C

【解析】对于 A：当$ab>0$时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，当且仅当$a=b$时取等号，

当$ab<0$时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-\left[\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(-\frac{a}{b}\right)\right]\leq -2\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)}=-2$，

当且仅当$a=-b$时取等号，由上可知，A 错误；

对于 B：因为$x>1$，所以$x-1>0$，

所以$x+\frac{1}{x-1}=(x-1)+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\times\frac{1}{x-1}}+1=3$，

当且仅当$x-1=\frac{1}{x-1}$，即$x=2$时取等号，所以最小值为3，故 B 错误；

对于 C：因为$a+b=2$，所以$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=1$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 1+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$，

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=b=1$时取等号，所以最小值为2，故 C 正确；

对于 D：当$x\in(0,\pi)$时，$\sin x\in(0,1]$，

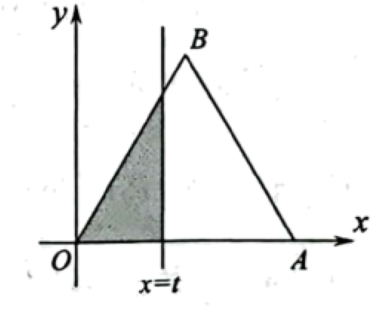
因为$\sin x+\frac{4}{\sin x}\geq 2\sqrt{\sin x\cdot\frac{4}{\sin x}}=4$，

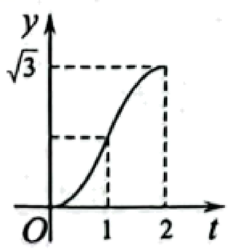
当且仅当$\sin x=\frac{4}{\sin x}$，即$\sin x=2$时取等号，

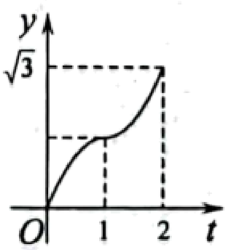
显然$\sin x=2$不成立，故等号取不到，故 D 错误.

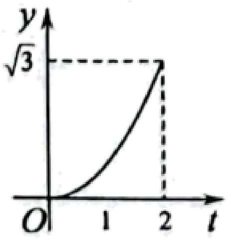
故选：C.

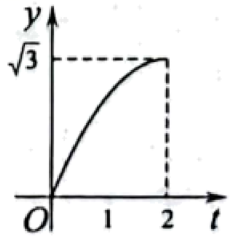
7. 如图，$\triangle OAB$是边长为 2 的正三角形，记$\triangle OAB$位于直线$x=t\left(0\leq t\leq 2\right)$左侧的图形的面积为$f\left(t\right)$. 则函数$y=f\left(t\right)$的图象大致为（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】依题意，当$0<t\le 1$时，可得直角三角形的两条直角边分别为$t,\sqrt{3}t$，

从而可以求得$f(t)=\dfrac{1}{2}t\cdot\sqrt{3}t=\dfrac{\sqrt{3}t^2}{2}$，

当$1<t\le 2$时，阴影部分可以看做大三角形减去一个小三角形，

可求得$f(t)=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}(2-t)^2}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t-\sqrt{3}$，

所以$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}t^2}{2}(0<t\le 1)\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t-\sqrt{3}(1<t\le 2)\end{cases}$，

从而可知选项 A 的图象满足题意.

故选：A.

8. 设$a=\log_{0.2}0.3,b=\log_2 3,c=\log_3 5$，则$a,b,c$的大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

【答案】D

【解析】因为$3^2>2^3$，所以$\log_2 3^2>\log_2 2^3$，即$2\log_2 3>3\log_2 2=3$，则$b=\log_2 3>\dfrac{3}{2}$；

因为$5^2<3^3$，所以$\log_3 5^2<\log_3 3^3$，即$2\log_3 5<3\log_3 3=3$，

所以$c=\log_3 5<\dfrac{3}{2}$，同时$c=\log_3 5>\log_3 3=1$，即$1<c<\dfrac{3}{2}$；

而$a=\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$，所以$b>\dfrac{3}{2}>c>1>a$.

故选：D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 若$a>b$，则$a^2>b^2$

B. 若$|a|>|b|$，则$a^2>b^2$

C. 若$a>b$，则$ac^2>bc^2$

D. 若$a>b>0$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

【答案】BD

【解析】A 选项采用反例排除：设$a=0>b=-1$，但$a^2<b^2$，故 A 选项错误；

B 选项利用不等式的性质：$a>b\geq 0\Rightarrow a^2>b^2\geq 0$，

设$c=|a|>0,d=|b|\geq 0\Rightarrow c>d\geq 0$，

由不等式的性质可知：$c^2>d^2\geq 0$，即$|a|^2>|b|^2\geq 0\Rightarrow a^2>b^2$，故 B 选项正确，

C 选项利用反例排除：当$c^2=0$时，只能得出$ac^2=bc^2$，故 C 选项错误；

D 选项：若$a>b>0\Rightarrow 0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，故 D 选项正确.

故选：BD.

10. 已知定义域为 A 的函数$f(x)$，若对任意的$x_1,x_2\in A$且$x_1\neq x_2$，有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数$f(x)$为“定义域上的凹函数”．例如，$f(x)=2^x$就是**R**上的凹函数．以下函数是“定义域上的凹函数”的有（　　）

A. $f(x)=2x+1$

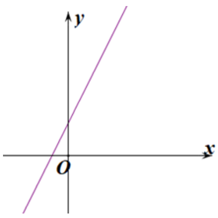
B. $f(x)=x^3$

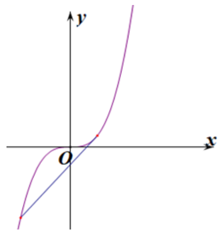
C. $f(x)=x^2+1$

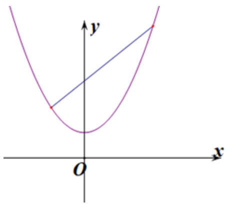
D. $f(x)=-\lg x$

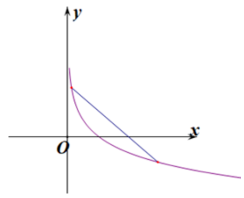
【答案】CD

【解析】分别作出 ABCD 的图象，如图：

A 

B 

C 

D 

根据 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$ 可知：

定义域上的凹函数是函数图象上任意两点连线的中点都在图象的上方，

故 CD 符合，AB 不符合.

故选：CD.

11．已知 $f\left(x\right)=\ln x+x+1, g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2-2f\left(x\right)-3$，关于函数 $y=g\left(x\right)$ 的零点，下列说法正确的是（　　）

A．函数 $y=g\left(x\right)$ 有 1 个零点

B．函数 $y=g\left(x\right)$ 有 2 个零点

C．函数 $y=g\left(x\right)$ 有一个零点在区间 $\left(1,2\right)$ 内

D．函数 $y=g\left(x\right)$ 有一个零点在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内

【答案】BC

【解析】因为 $y=\ln x, y=x+1$ 均在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f\left(x\right)=\ln x+x+1$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f\left(x\right)\to+\infty$，所以 $f\left(x\right)$ 的值域为 R，

又因为 $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)+1\right]\left[f\left(x\right)-3\right]$，令 $g\left(x\right)=0$，所以 $f\left(x\right)=-1$ 或 $f\left(x\right)=3$，

当 $f\left(x\right)=-1$ 时，此方程有1个解记为 x_1，

当 $f\left(x\right)=3$ 时，此方程有1个解记为 x_2，

所以 $g(x)=0$ 有 2 个解，所以 $y=g(x)$ 有 2 个零点，故 A 错误，B 正确；

令 $f_1(x)=f(x)+1$，显然 $f_1(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f_1\left(\frac{1}{e^2}\right)=f\left(\frac{1}{e^2}\right)+1=\ln\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^2}+1+1=\frac{1}{e^2}>0$，

$f_1\left(\frac{1}{e^3}\right)=f\left(\frac{1}{e^3}\right)+1=\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^3}+1+1=\frac{1}{e^3}-1<0$，

所以 $f_1\left(\frac{1}{e^3}\right)\cdot f_1\left(\frac{1}{e^2}\right)<0$，

所以 $f_1(x)=f(x)+1$ 的唯一零点在 $\left(\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right)$ 内，所以 $x_1\in\left(\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^2}\right)$；

令 $f_2(x)=f(x)-3$，显然 $f_2(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f_2(1)=f(1)-3=\ln 1+1+1-3=-1<0$，

$f_2(2)=f(2)-3=\ln 2+2+1-3=\ln 2>0$，

所以 $f_2(1)\cdot f_2(2)<0$，

所以 $f_2(x)=f(x)-3$ 的唯一零点在 $(1,2)$ 内，所以 $x_2\in(1,2)$，

由上可知，C 正确，D 错误.

故选：BC.

12. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，已知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$ 单调递增，下列结论正确的是（　　）

A. ω 的值可能为 1

B. $f\left(\frac{3\pi}{10}\right)>\frac{1}{2}$

C. 若 $f(\pi)<0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{101}{100}\pi\right)$ 有且仅有 1 个零点

D. 若 $f(\pi)<0$，$f(x)$ 在 $\left[\frac{2}{5}\pi,\pi\right]$ 单调递减

【答案】ABC

【解析】设 $y=\sin t$，$t=\omega x+\frac{\pi}{6}$，

当 $\omega<0$ 时，$x\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\omega\cdot\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，

因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$ 单调递增，而 $t=\omega x+\frac{\pi}{6}$ 单调递减，

所以 $t=\omega x+\frac{\pi}{6}$ 需落在 $y=\sin t$ 的减区间，

$\left(\omega\cdot\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 不可能是函数 $y=\sin t$ 的减区间，故舍去；

当 $\omega>0$ 时，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\omega\cdot\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\right)$，

由题意可知，$\left(\frac{\pi}{6},\omega\cdot\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\begin{cases}\omega\cdot\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}\\ \omega>0\end{cases}$，解得 $0<\omega\le\frac{5}{3}$，故 A 正确；

$f\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\omega\cdot\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6}\right)$，由 $0<\omega\le\frac{5}{3}$，则 $\omega\cdot\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，

此时 $\sin\left(\omega\cdot\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，故 B 正确；

$f\left(\pi\right)=f\left(\omega\cdot\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，由 $0<\omega\le\frac{5}{3}$，则 $\omega\cdot\pi+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，

因为 $f\left(\pi\right)=f\left(\omega\cdot\pi+\frac{\pi}{6}\right)<0$，所以 $\omega\cdot\pi+\frac{\pi}{6}\in\left(\pi,\frac{11\pi}{6}\right]$，此时 $\frac{5}{6}<\omega\le\frac{5}{3}$，

当 $x\in\left(0,\frac{101}{100}\pi\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\omega\cdot\frac{101}{100}\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，$\omega\cdot\frac{101\pi}{100}+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{121\pi}{120},\frac{111\pi}{60}\right]$，

此时只有当 $\omega x+\frac{\pi}{6}=\pi$ 时，$f\left(x\right)=0$，故 C 正确；

由以上可知，$\frac{5}{6}<\omega\le\frac{5}{3}$，当 $x\in\left[\frac{2\pi}{5},\pi\right]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\omega\cdot\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{6},\omega\cdot\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，

当$\omega=\frac{5}{3}$时，$\frac{5}{3}x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，此时$\left[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$单调递减，$\left[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right]$单调递增，

所以不成立，故 D 错误.

故选：ABC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知一个扇形弧长为l，半径为$r,l=2r$，扇形的面积为 2，则$r=$______.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】因为扇形的面积为 2，且$l=2r$，所以$\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r\times 2r=r^2=2$，

解得$r=\sqrt{2}$（负值舍去），所以$r=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

14. 设集合$A=\left\{x\middle|x^2-2x\le 0\right\}$，集合$B=\left\{x\middle|x-a\le 0\right\}$，且$A\cup B=B$，则$a$的值可以是______.（写出满足条件的一个答案即可）

【答案】2（答案不唯一，满足$a\ge 2$即可）

【解析】因为$A=\left\{x\middle|x^2-2x\le 0\right\}=\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$，$B=\left\{x\middle|x-a\le 0\right\}=\left\{x\middle|x\le a\right\}$，

又$A\cup B=B$，即$A\subseteq B$，所以$a\ge 2$，则a的值可以是2.

故答案为：2（答案不唯一，满足$a\ge 2$即可）.

15. 定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，且$f\left(-3\right)=-3$，则$f\left(2023\right)+f\left(2024\right)=$______.

【答案】3

【解析】由$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$可得$f\left(x\right)$为周期函数，且周期为 4，

又$f\left(x\right)$为$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f\left(0\right)=0$，

$f\left(2023\right)+f\left(2024\right)=f\left(3\right)+f\left(4\right)=-f\left(-3\right)+f\left(0\right)=3+0=3$.

故答案为：3.

16. 意大利画家达芬奇在创作《抱银貂的女子》时思考了一个问题：画中女子佩戴着一条长长的项链，项链所形成的曲线是什么?这就是著名的“悬链线问题”

．选择适当的坐标系后，悬链线的方程是双曲余弦函数$\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，类似的有双曲正弦函数$\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$．则$[\cosh(x)]^2-[\sinh(x)]^2=$________，设函数$f(x)=\sinh(x)\cdot\cosh(x)$，则不等式$f(x)<\dfrac{1-e^4}{4e^2}$的解集为________．

【答案】1　　$(-\infty,-1)$

【解析】$[\cosh(x)]^2-[\sinh(x)]^2=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=1$；

$f(x)=\sinh(x)\cdot\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\times\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}$，

所以$f(x)<\dfrac{1-e^4}{4e^2}\Leftrightarrow e^{2x}-e^{-2x}<e^{-2}-e^2$，

令$g(x)=e^{2x}-e^{-2x}$，且$y=e^{2x}$在R上递增，$y=e^{-2x}$在R上递减，所以$g(x)$在R上递增，

又因为$e^{2x}-e^{-2x}<e^{-2}-e^2\Leftrightarrow g(x)<g(-1)$，所以$x<-1$，故解集为$(-\infty,-1)$．

故答案为：1　　$(-\infty,-1)$．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 求值：（1）$\log_2\sqrt{2}+\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}-3^{\log_3 5}$；

（2）$\sin\dfrac{13\pi}{3}+\tan\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$．

解：（1）原式$=\log_2 2^{\frac{1}{2}}+\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}-5=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}-5=-3$．

（2）原式$=\sin\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\left(-\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$．

18. 2023年11

月，大批红嘴鸥从西伯利亚飞越数千公里抵达云南昆明过冬，昆明已开启观鸥季．科学家研究发现候鸟的飞行速度v（单位：$\mathrm{km/min}$）可以表示为$v=\frac{1}{2}\log_3\frac{x}{100}-\lg x_0$，其中$x$表示候鸟的耗氧量的单位数，$x_0$表示测量过程中候鸟的耗氧偏差的单位数．（参考数据：$3^{0.3}\approx1.39,3^{0.6}\approx1.93,3^{1.2}\approx3.74$）．

（1）当$x_0=10$时，计算海鸥静止时耗氧量的单位数；

（2）若雄性海鸥的飞行速度为$0.8\mathrm{km/min}$，雌性海鸥的飞行速度为$0.5\mathrm{km/min}$，那么此时雄性海鸥的耗氧量是雌性海鸥的耗氧量的多少倍．

解：（1）将$x_0=10$，$v=0$，代入$v=\frac{1}{2}\log_3\frac{x}{100}-\lg x_0$，

得$0=\frac{1}{2}\log_3\frac{x}{100}-\lg10$，则$\log_3\frac{x}{100}=2\lg10=2$，

即$\frac{x}{100}=3^2=9$，解得$x=900$，

故候鸟停下休息时，它每分钟的耗氧量为900个单位.

（2）设雄鸟每分钟的耗氧量为x_2个单位，雌鸟每分钟耗氧量为x_1个单位，

由题意得$\begin{cases}0.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_1}{100}-\lg x_0\\0.8=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_2}{100}-\lg x_0\end{cases}$，

两式相减得$0.3=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_2}{x_1}$，解得$\frac{x_2}{x_1}=3^{0.6}\approx1.93$，

所以雄鸟每分钟的耗氧量是雌鸟每分钟耗氧量的1.93倍.

19. 已知α,β为锐角，$3\sin\alpha=4\cos\alpha,\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求$\cos2\alpha$的值；

（2）求$\sin\beta$的值.

解：（1）因为$3\sin\alpha=4\cos\alpha$，所以$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，又$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，

变形得$\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{7}{25}$，从而$\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$.

（2）因为 α,β 为锐角，即 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，

因 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

联立 $\begin{cases}3\sin\alpha=4\cos\alpha\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5}\end{cases}$（负值舍去），

所以 $\sin\beta=\sin\left[\left(\alpha+\beta\right)-\alpha\right]=\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\alpha-\cos\left(\alpha+\beta\right)\sin\alpha$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$.

（1）判断函数 $y=f\left(x\right)$ 的奇偶性，并证明；

（2）若 $k>0$，根据函数单调性的定义证明函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\sqrt{k},+\infty\right)$ 上单调递增.

解：（1）函数 $y=f(x)$ 为奇函数，证明如下：

函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，

又 $f(-x)=-x+\dfrac{k}{-x}=-(x+\dfrac{k}{x})=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 为奇函数.

（2）若 $k>0$，$\forall x_1,x_2\in\left[\sqrt{k},+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，

有 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\dfrac{k}{x_1})-(x_2+\dfrac{k}{x_2})=(x_1-x_2)\cdot\dfrac{x_1x_2-k}{x_1x_2}$，

因为 $k>0$ 且 $\sqrt{k}\le x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2-k>0$，

于是 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 在区间 $\left[\sqrt{k},+\infty\right)$ 上单调递增.

21. 某兴趣小组对小球在竖直平面内的匀速圆周运动进行研究，将圆形轨道装置放在如图 1 所示的平面直角坐标系中，此装置的圆心 O 距离地面高度为 2m，半径为 $\sqrt{3}\text{m}$，装置上有一小球 P（视为质点），P 的初始位置在圆形轨道的最高处，开启装置后小球 P

按逆时针匀速旋转，转一周需要6min．小球P距离地面的高度H（单位：m）与时间t（单位：min）的关系满足$H=r\sin\left(\omega t+\varphi\right)+h(r>0,\omega>0,0\le\varphi<2\pi)$．

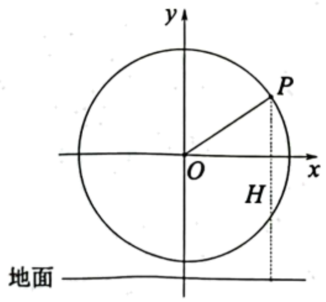


图1

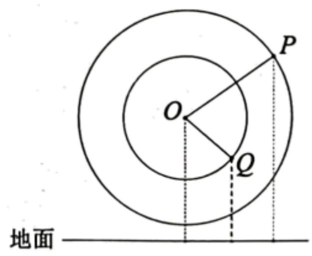


图2

（1）写出H关于t的函数解析式，并求装置启动1min后小球P距离地面的高度；

（2）如图2，小球Q（视为质点）在半径为1m的另一圆形轨道装置上，两圆形轨道为同心圆，Q的初始位置在圆形轨道的最右侧，开启装置后小球Q以角速度为$\frac{\pi}{3}$rad / min顺时针匀速旋转．两装置同时启动，求P,Q两球高度差的最大值．

解：（1）由题意，半径为$r=\sqrt{3}$ m，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，

根据小球转一周需要需要6 min，可知小球转动的角速度$\omega=\frac{\pi}{3}$ rad/min，

所以H关于t的函数解析式为$H=\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{2})+2=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}t+2$，$t\ge0$，

当$t=1$时，$H=\frac{\sqrt{3}}{2}+2$，

所以圆形轨道装置启动1min后小球P距离地面的高度为$(\frac{\sqrt{3}}{2}+2)$m．

（2）根据题意，小球Q的高度H'关于t的函数解析式为：

$H'=\sin(-\frac{\pi}{3}t)+2=-\sin\frac{\pi}{3}t+2$，$t\ge0$，

则P，Q两点高度差为$\Delta H=\left|\sin\frac{\pi}{3}t+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}t\right|=\left|2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)\right|$，$t\ge0$，

当$\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，即$t=\frac{1}{2}+3k,k\in Z$时，$\Delta H$的最大值为2，

所以P，Q两球高度差的最大值为2m．

22．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2mx+m,x>0\\x+2,x\le0\end{cases}$．