江苏省启东中学 2023-2024 学年度高一第二学期期中考试（数学）

学校：___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若 $z^2=-7-24\mathrm{i}$，则复数 z 的虚部（　　）

A. 4　　　B. -4　　　C. ± 4　　　D. $-4\mathrm{i}$

2. 下列命题中正确的（　　）

A. 任意两个复数都不能比较大小

B. 若 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathrm{R})$，则当且仅当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，$z=0$

C. 若 z_1，$z_2\in\mathrm{C}$，且 $z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1=z_2=0$

D. 若 $x+y\mathrm{i}=1+\mathrm{i}(x,\ y\in\mathrm{C})$ 则 $x=y=1$

3. 在空间中，到一圆周上各点距离相等的点的集合表示的图形是（　　）

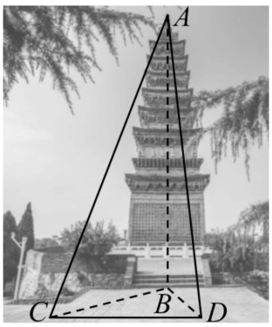
A. 一个点　　　B. 一条直线

C. 一个平面　　　D. 一个球面

4. 已知$\vee ABC$内有一点O满足$OA^2-OB^2=AC^2-BC^2$，则向量$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为（　　）

A. 锐角　　　B. 直角　　　C. 钝角　　　D. 平角

5. 普利寺塔，又名万佛塔，被国务院批准列入第五批全国重点文物保护单位名单．如图，某测量小组为测量该塔的总高度 AB，选取与塔底 B 在同一水平面内的两个测量点 C 与 D，现测得 $\angle BCD=15^\circ$，$\angle BDC=45^\circ$，$CD=24$ 米，在 C 点测得塔顶 A 的仰角为 60°，则该塔的高度 AB 约为（取 $\sqrt{2}=1.414$）（　　）



A. 32.75 米　　　B. 33.68 米　　　C. 33.94 米　　　D. 34.12 米

6. 已知$\vee ABC$三条边上的高分别为 3，4，6，则$\vee ABC$最小内角的余弦值为（　　）

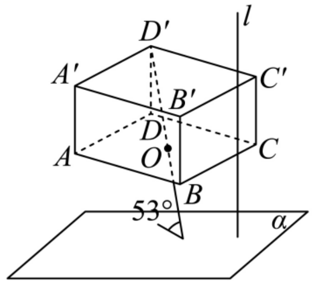
A. $\dfrac{7}{48}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　　　C. $\dfrac{11}{24}$　　　D. $\dfrac{7}{8}$

7. 在$\vee ABC$中，a,b,c 分别是角 A,B,C 所对的边，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 $E,AE=2$，

$(b+c-a)\sin B = a\sin\angle BAC - b\sin\angle BAC - c\sin C$，则 b^2+c^2 的最小值为（　　）

A. 16　　　　B. 32　　　　C. 64　　　　D. 128

8. 如图，已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=BC=2$，$AA'=\sqrt{2}$，O 为正方形 $ABCD$ 的中心点，将长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 绕直线 OD' 进行旋转．若平面 α 满足直线 OD' 与 α 所成的角为 $53°$，直线 $l\perp\alpha$，则旋转的过程中，直线 AB 与 l 夹角的正弦值的最小值为（　　）（参考数据：$\sin 53°\approx\frac{4}{5}$，$\cos 53°\approx\frac{3}{5}$）



A. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　　　B. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$　　　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}+3}{10}$　　　　D. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 15 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知非零复数 z_1,z_2，其共轭复数分别为 $\overline{z_1},\overline{z_2}$，则下列选项正确的是（　　）

A. $z_1^2=|z_1|^2$　　　　B. $z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2$　　　　C. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　　　　D. $\overline{z_1}\cdot z_2=z_1\cdot\overline{z_2}$

10. 下面四个命题中，正确的为（　　）

A. 相交于同一点的三条直线在同一平面内．

B. $\vee ABC$ 在平面 α 外，其三边延长线分别和 α 交于 P，Q，R，则 P，Q，R 一定共线

C. 一个角的两边所在直线分别平行于另一个角的两边所在直线，则这两角相等

D. 在三维空间中，三个平面最多把空间分成八部分．

11. 在 $\vee ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 D，E 分别在边 AB,AC 上，且 $\vee ABC$ 的重心在 DE 上，又 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}=y\overrightarrow{AC}$，设 $\angle ADE=\theta$，（$S_{\triangle ABC},S_{\triangle ADE}$ 为相应三角形的面积），则以下正确的是（　　）

A. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$　　　　B. $\dfrac{S_{\vee ADE}}{S_{\vee ABC}}$ 的最小值为 $\dfrac{4}{9}$

C. $c\sin\theta=a\sin(B-\theta)+b\sin(A+\theta)$　　　　D. $c\cos\theta=a\cos(B-\theta)+b\cos(A+\theta)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 直线 $a//b$，$a//$ 平面 α，则 b 与 α 的位置关系是________．

13. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,\vec{b}=(1,2)$，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=|2\vec{a}-\vec{b}|$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标是

____________.

14. 四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 P，已知 $AB=2AD=6$，且 P 是 AC 的中点，$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PD}$，又 $\sin\angle ACD=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，则四边形 $ABCD$ 的面积是____________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 60 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15. 计算下列各式

（1）$2\left(2\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{c}\right)-3\left(-3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}\right)$

（2）$\sin50^\circ\left(1+\sqrt{3}\tan10^\circ\right)$

（3）$\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+2024\mathrm{i}^{2024}$

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，PA,PB,PC 两两垂直，则 P 在平面 ABC 内的射影 O 是 $\triangle ABC$ 的什么心？并证明你的结论．

17. 已知 $\vec{m}=\left(\sqrt{3}\sin\omega x,\cos\omega x\right),\vec{n}=\left(\cos\omega x,-\cos\omega x\right)(\omega>0,x\in\mathbf{R})$，$f\left(x\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}-\dfrac{1}{2}$，且 $f\left(x\right)$ 的图象上相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$．

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（2）若锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b=\sqrt{3}$，$f\left(B\right)=0$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围．

18. 设平面内两个非零向量 $\vec{m},\vec{n}$ 的夹角为 θ，定义一种运算"$\otimes$"：$\vec{m}\otimes\vec{n}=\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\sin\theta$．试求解下列问题，

（1）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(2,1),\left|\vec{b}\right|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，求 $\vec{a}\otimes\vec{b}$ 的值；

（2）在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,1),B(-1,2),C(0,4)$，求 $\overrightarrow{AB}\otimes\overrightarrow{BC}$ 的值；

（3）已知向量 $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\cos\alpha},\dfrac{2}{\sin\alpha}\right),\vec{b}=\left(\dfrac{2}{\sin\alpha},-\dfrac{1}{\cos\alpha}\right),\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\vec{a}\otimes\vec{b}$ 的最小值.

19. 古希腊数学家托勒密对凸四边形(凸四边形是指没有角度大于 180° 的四边形)进行研究，终于有重大发现：任意一凸四边形，两组对边的乘积之和不小于两条对角线的乘积，当且仅当四点共圆时等号成立．且若给定凸四边形的四条边长，四点共圆时四边形的面积最大．根据上述材料，解决以下问题：

如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，

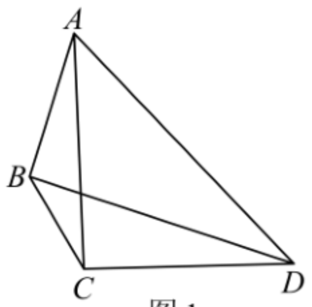


图 1

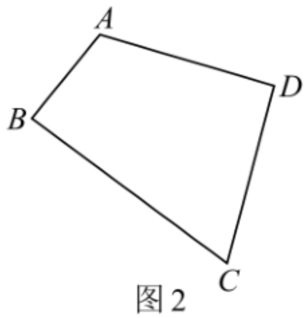


图 2

（1）若 $AB=\sqrt{2}$，$BC=1,\angle ACD=\dfrac{\pi}{2},AC=CD$，(图 1)，求线段 BD 长度的最大值；

（2）若 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c,DA=d$，（图 2），求四边形 $ABCD$ 面积取得最大值时角 A 的余弦值，并求出四边形 $ABCD$ 面积的最大值．

江苏省启东中学2023-2024学年度高一第二学期期中考试（数学）

学校：___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若$z^2=-7-24\mathrm{i}$，则复数z的虚部（　　）

A. 4　　　　B. -4　　　　C. ± 4　　　　D. $-4\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】直接利用复数代数形式的乘法运算化简，然后利用复数相等的概念求解．

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，则$z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，

$\because z^2=-7-24\mathrm{i}$，$\therefore\begin{cases}a^2-b^2=-7\\2ab=-24\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}$$\therefore z=3-4\mathrm{i}$或$z=-3+4\mathrm{i}$.

所以复数z的虚部为± 4.

故选：C.

2. 下列命题中正确的（　　）

A. 任意两个复数都不能比较大小

B. 若$z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathrm{R})$，则当且仅当$a=0$且$b=0$时，$z=0$

C. 若z_1，$z_2\in\mathrm{C}$，且$z_1^2+z_2^2=0$，则$z_1=z_2=0$

D. 若$x+y\mathrm{i}=1+\mathrm{i}(x，y\in\mathrm{C})$则$x=y=1$

【答案】B

【解析】

【分析】当两个复数都是实数时能比较大小，据此判断A；由复数相等的定义可判断B；用特殊值可判断C、D.

【详解】对于A，当两个复数均为实数时，这两个复数能比较大小，A错误；

对于B，若$z=a+b\mathrm{i}$（$a\in\mathrm{R}, b\in\mathrm{R}$）则当$a=b=0$时，$z=a+b\mathrm{i}=0$，

反之，若$z=a+b\mathrm{i}=0$（$a\in\mathrm{R}, b\in\mathrm{R}$），则由复数相等的定义知，必有$a=b=0$成立，

故若$z=a+b\mathrm{i}$（$a\in\mathrm{R}, b\in\mathrm{R}$），则当且仅当$a=0$且$b=0$时，$z=0$，B正确；

对于C，令$z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，则${z_1}^2+{z_2}^2=1^2+\mathrm{i}^2=0$，此时不满足$z_1=z_2=0$，C错误；

若$x+y\mathrm{i}=1+\mathrm{i}(x,y\in\mathrm{C})$，不妨令$x=\mathrm{i}$，$y=-\mathrm{i}$，满足等式，此时$x=y=1$不成立，故D错误.

故选:B

3. 在空间中，到一圆周上各点距离相等的点的集合表示的图形是（　　）

A. 一个点　　　　B. 一条直线

C. 一个平面　　　　D. 一个球面

【答案】B

【解析】

【分析】结合线面垂直的性质即可分析.

【详解】过圆的圆心作此圆所在平面的垂线，则垂线上的点到圆周的各点距离相等，所以到一圆周上各点距离相等的点的集合是一条直线.

故选：B.

4. 已知$\triangle ABC$内有一点O满足$OA^2-OB^2=AC^2-BC^2$，则向量$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为（　　）

A. 锐角　　B. 直角　　C. 钝角　　D. 平角

【答案】B

【解析】

【分析】把条件$OA^2-OB^2=CA^2-CB^2$转化为$\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2$，再根据向量的运算法则逐步计算即可求解.

【详解】由条件得$OA^2-OB^2=CA^2-CB^2$，则$\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2$，

所以$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，

所以$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，

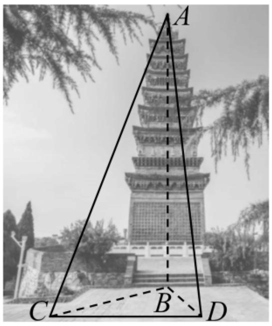
则$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=0$，即$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=0$，

所以$2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以向量$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$90°$.

故选：B.

5. 普利寺塔，又名万佛塔，被国务院批准列入第五批全国重点文物保护单位名单．如图，某测量小组为测量该塔的总高度AB，选取与塔底B在同一水平面内的两个测量点C与D，现测得$\angle BCD=15°$，$\angle BDC=45°$，$CD=24$米，在C点测得塔顶A的仰角为$60°$，则该塔的高度AB约为（取$\sqrt{2}=1.414$）（　　）



A. 32.75 米　　B. 33.68 米　　C. 33.94 米　　D. 34.12 米

【答案】C

【解析】

【分析】设 $AB=m$ 米，由锐角三角函数得到 BC，再在 $\triangle BCD$ 中由正弦定理计算可得.

【详解】设 $AB=m$ 米，则 $BC=\dfrac{AB}{\tan\angle ACB}=\dfrac{m}{\tan 60^\circ}=\dfrac{m}{\sqrt{3}}$，

由 $\angle BCD=15^\circ$，$\angle BDC=45^\circ$，得 $\angle DBC=180^\circ-15^\circ-45^\circ=120^\circ$，

在 $\triangle BCD$ 中由正弦定理 $\dfrac{CD}{\sin\angle DBC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$，即 $\dfrac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\frac{m}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

所以 $m=24\sqrt{2}\approx 33.94$（米）.

故选：C

6. 已知 $\vee ABC$ 三条边上的高分别为 3，4，6，则 $\vee ABC$ 最小内角的余弦值为（　　）

A. $\dfrac{7}{48}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　　C. $\dfrac{11}{24}$　　D. $\dfrac{7}{8}$

【答案】D

【解析】

【分析】先由 $\vee ABC$ 的三边 a,b,c 上对应的高的长度分别为 3，4，6，利用等面积法得到三边的关系，再利用余弦定理求解.

【详解】由题意，不妨设 $\vee ABC$ 的三边 a,b,c 上对应的高的长度分别为 3，4，6，

由三角形的面积公式可得：$\dfrac{1}{2}\times 3a=\dfrac{1}{2}\times 4b=\dfrac{1}{2}\times 6c$，

解得：$3a=4b=6c$，

设 $3a=4b=6c=x$，

则 $a=\dfrac{1}{3}x,b=\dfrac{1}{4}x,c=\dfrac{1}{6}x$，

可得 c 为三角形最小边，C 为三角形的最小内角，

由余弦定理得：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{36}x^2}{2\times\frac{1}{3}x\times\frac{1}{4}x}=\dfrac{7}{8}$

故选：D.

7. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是角A,B,C所对的边，$\angle BAC$的平分线交BC于点$E,AE=2$，$\left(b+c-a\right)\sin B=a\sin\angle BAC-b\sin\angle BAC-c\sin C$，则$b^2+c^2$的最小值为（　　）

A. 16　　　　B. 32　　　　C. 64　　　　D. 128

【答案】B

【解析】

【分析】由题中等式以及正弦定理进行角化边运算可得边的关系，由余弦定理可求出$\angle BAC$，结合角平分线由三角形面积公式建立等量关系，结合均值不等式可得出最小值.

【详解】由$\left(b+c-a\right)\sin B=a\sin\angle BAC-b\sin\angle BAC-c\sin C$及正弦定理知，$\left(b+c-a\right)b=a^2-ab-c^2$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理知$\cos\angle BAC=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，$\because 0<\angle BAC<\pi$，$\therefore \angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle BAE=\angle CAE=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because S_{\triangle AEB}+S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ABC}$，$\therefore \dfrac{1}{2}c\times AE\sin\angle BAE+\dfrac{1}{2}b\times AE\sin\angle CAE=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC$，

即$2c+2b=bc$，得$\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1$，

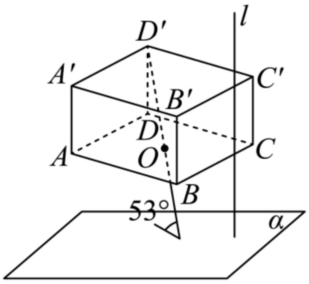
$\therefore b^2+c^2=\left(b^2+c^2\right)\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}\right)^2=4\left(b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2}{bc}\right)$

$=4\left[2+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{b^2}+2\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\right]\geq 4\left(2+2\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}\times\dfrac{c^2}{b^2}}+4\sqrt{\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{b}}\right)=32$，

当且仅当$\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$且$\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{b}$，即$b=c=4$时，等号成立，$\therefore \left(b^2+c^2\right)_{\min}=32$.

故选：B

8. 如图，已知长方体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=BC=2$，$AA'=\sqrt{2}$，O为正方形$ABCD$的中心点，将长方体$ABCD-A'B'C'D'$绕直线OD'进行旋转．若平面α满足直线OD'与α所成的角为$53°$，直线$l\perp\alpha$，则旋转的过程中，直线AB与l夹角的正弦值的最小值为（　　）（参考数据：$\sin 53°\approx\dfrac{4}{5}$，$\cos 53°\approx\dfrac{3}{5}$）



A. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}+3}{10}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$

【答案】A

【解析】

【分析】求出直线OD'与$C'D'$的夹角，可得$C'D'$绕直线OD'旋转的轨迹为圆锥，求直线OD'与l的夹角，结合图形可知，当l与直线$D'E$平行时，$C'D'$与l的夹角最小，利用三角函数知识求解即可.

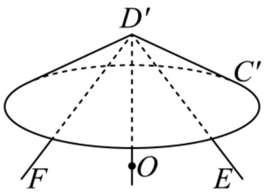
【详解】在长方体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB//C'D'$，则直线AB与l的夹角等于直线$C'D'$与l的夹角.

长方体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=BC=2$，$AA'=\sqrt{2}$，O为正方形$ABCD$的中心点，

则$OD'=OC'=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$，又$C'D'=2$，

所以$\triangle OC'D'$是等边三角形，故直线OD'与$C'D'$的夹角为$60°$.

则$C'D'$绕直线OD'旋转的轨迹为圆锥，如图所示，$\angle C'D'O=60°$.



因为直线OD'与α所成的角为$53°$，$l\perp\alpha$，所以直线OD'与l的夹角为$37°$.

在平面$C'D'O$中，作$D'E$，$D'F$，使得$\angle OD'E=\angle OD'F=37°$.

结合图形可知，当l与直线$D'E$平行时，$C'D'$与l的夹角最小，为$\angle C'D'E=60°-37°=23°$，

易知$\angle C'D'F=60°+37°=97°$.

设直线$C'D'$与l的夹角为φ，则$23°\le\varphi\le90°$，故当$\varphi=23°$时$\sin\varphi$最小，

而$\sin23°=\sin\left(60°-37°\right)=\sin60°\cos37°-\cos60°\sin37°$

$=\sin60°\sin53°-\cos60°\cos53°\approx\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$，