2.8 设随机变量X和Y的联合概率分布如右表所示。随机变量$Z = X \oplus Y$
求：

（1）H(X)，H(Y)

（2）H(X|Y)，H(Y|X)，H(X|Z)

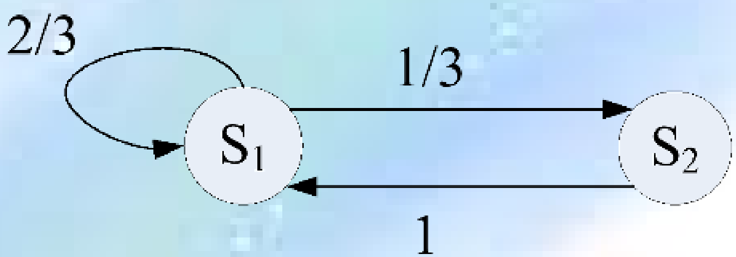
Y / X	b1=0	b2=0
a1=0	1/3	1/3
a2=0	0	1/3

2.13 有一个马尔可夫信源，已知转移概率为：

$$P(S_1|S_1)=\frac{2}{3},\ P(S_2|S_1)=\frac{1}{3},\ P(S_1|S_2)=1,\ P(S_2|S_2)=0$$

试画出状态转移图，并求出信源熵。

解：根据转移概率，得状态转移图如下所示：



求解信源熵：$p(S_j)=\sum p(S_i)p(S_j|S_i)$　$p(S_1)+p(S_2)=1$

得：　$p(S_1)=\frac{3}{4},\ p(S_2)=\frac{1}{4}$

$$H_\infty = p(S_1)p(S_1|S_1)+p(S_1)p(S_2|S_1)+p(S_2)p(S_1|S_2)+ p(S_2)p(S_2|S_2)=0.6887\ \text{bit/sign}$$

2.14 有一个一阶平稳马尔可夫链 $X_1, X_2, \ldots, X_r, \ldots$ 各 X_r 取值于 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$。已知起始概率 $P(x)$ 为：

$$p_1 = P(X_1 = a_1) = \frac{1}{2},\ p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$$

转移概率如右表所示：

$i \backslash j$	1	2	3
1	1/2	1/4	1/4
2	2/3	0	1/3
3	2/3	1/3	0

2.14（续）

（1）求$X_1X_2X_3$的联合熵和平均符号熵；

（2）求这个链的极限平均符号熵；

（3）求H_0,H_1,H_2和它们所对应的冗余度。

解：（1）一阶平稳马尔可夫链，X_2，…，X_r，… 的起始序列$X_1X_2X_3$的联合熵：

$$H(X_1X_2X_3) = -\sum_{X_1}\sum_{X_2}\sum_{X_3} P(x_1x_2x_3)\log P(x_1x_2x_3)$$

已知起始概率分布和转移概率分布，得：

$$\begin{aligned}P(x_1x_2x_3) &= P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1x_2)\\ &= P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_2) \quad x_1\in A, x_2\in A, x_3\in A\end{aligned}$$

2.14(续)

$$P(a_1a_1a_1) = P(a_1)P(a_1|a_1)P(a_1|a_1) = \frac{1}{8}$$

$$P(a_1a_1a_2) = P(a_1)P(a_1|a_1)P(a_2|a_1) = \frac{1}{16}$$

$$P(a_1a_1a_3) = P(a_1)P(a_1|a_1)P(a_3|a_1) = \frac{1}{16}$$

其满足： $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} P(a_ia_ja_k) = 1$$

所以：

$$H(X_1X_2X_3) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} P(a_ia_ja_k)\log P(a_ia_ja_k)$$

$$\approx 3.967 \text{ bit}$$

平均符号熵： $$H_3(X) = \frac{1}{3}H(X_1X_2X_3) \approx 1.322 \text{ bit/符号}$$

2.14(续)

（2）因为这信源是一阶马尔可夫链，其状态极限概率分布就是信源达到平稳后的符号概率分布。所以可以根据其转移概率计算出平稳后的符号概率分布。

$$\begin{cases} P(a_1) = \dfrac{1}{2}P(a_1) + \dfrac{2}{3}P(a_2) + \dfrac{2}{3}P(a_3) \\ P(a_2) = \dfrac{1}{4}P(a_1) + \dfrac{1}{3}P(a_3) \\ P(a_3) = \dfrac{1}{4}P(a_1) + \dfrac{1}{3}P(a_2) \\ P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = 1 \end{cases}$$

解得：

$$P(a_1) = \frac{4}{7}, \quad P(a_2) = P(a_3) = \frac{3}{14}$$

2.14（续）

这个链的极限平均符号熵为：

$$H_\infty = \lim_{N\to\infty} H_N(X) = \lim_{N\to\infty} H(X_N \mid X_{N-1}\cdots X_1) = H_2$$

$$= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P(a_i)P(a_j \mid a_i)\log P(a_j \mid a_i)$$

$$= 1.251 \ \text{bit/符号}$$

（3）

$$H_0 = \log 3 \approx 1.585 \ \text{bit/符号}$$

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{3} P(a_i)\log P(a_i) \approx 1.414 \ \text{bit/符号}$$

$$H_2 \approx 1.251 \ \text{bit/符号}$$

2.14（续）

它们对应的剩余度（冗余度）分别为：

$$\gamma_0 = 1 - \frac{H_0}{H_0} = 0$$

$$\gamma_1 = 1 - \frac{H_1}{H_0} \approx 0.11$$

$$\gamma_2 = 1 - \frac{H_2}{H_0} \approx 0.21$$

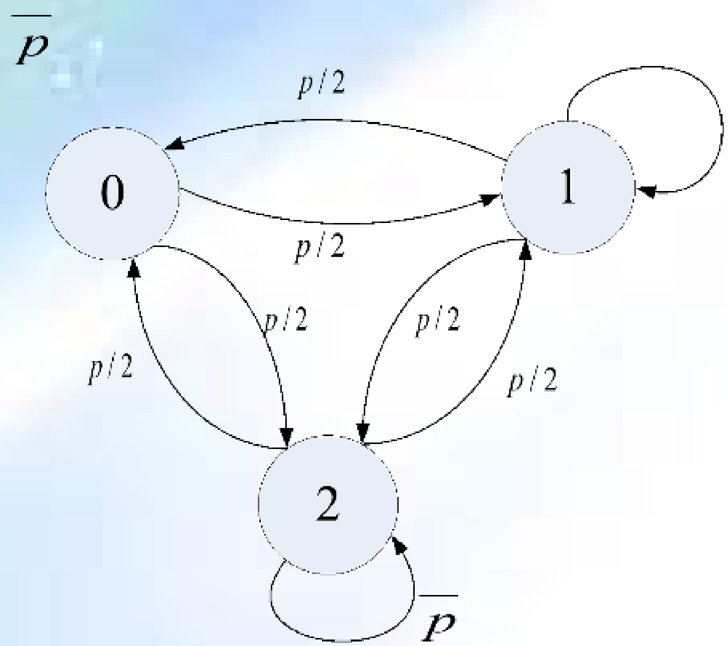
2.16 一阶马尔可夫信源的状态分布如下图所示，信源X的符号集{0, 1, 2}并定义：

（1）求信源平稳后的概率分布P(0), P(1), P(2).

（2）求此信源的熵。

（3）近似认为此信源为无记忆时，符号的概率分布等于平稳分布。求近似信源的上H(X)并与 H_∞ 进行比较。

（4）对一阶马尔可夫信源p取何值时 H_∞ 取最大值，又当p=0和p=1时结果如何？



2.16（续）

解：（1）一阶马尔可夫信源的状态空间$E = A = \{0,1,2\}$。由状态转移图中分析可知，三个状态多是正规常返态。此状态马尔可夫链是时齐的、状态有限的和是不可约闭集。所以具有各态历经性，平稳后状态的极限分布存在。有：

$$Q(E_i) = P(a_i) \quad i = 1,2,3$$

$$E_i \in E, \quad a_i \in A \quad \text{而} E = A = \{0,1,2\}$$

根据状态转移得状态一步转移矩阵：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{p} & p/2 & p/2 \\ p/2 & \bar{p} & p/2 \\ p/2 & p/2 & \bar{p} \end{bmatrix}$$

2.16（续）

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}Q(0)\\Q(1)\\Q(2)\end{bmatrix}=P^T\begin{bmatrix}Q(0)\\Q(1)\\Q(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{p} & p/2 & p/2\\ p/2 & \bar{p} & p/2\\ p/2 & p/2 & \bar{p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q(0)\\Q(1)\\Q(2)\end{bmatrix}\\ Q(0)+Q(1)+Q(2)=1\end{cases}$$

计算得： $Q(0)=Q(1)=Q(2)=\frac{1}{3}$

所以： $P(0)=P(1)=P(2)=\frac{1}{3}$

（2）根据一阶马尔可夫信源的熵得：

$$H_\infty=H_2=-\sum_{i=1}^{3}Q(E_i)P(X\mid E_i)$$

$$=\frac{1}{3}H(\bar{p},\frac{p}{2},\frac{p}{2})+\frac{1}{3}H(\frac{p}{2},\bar{p},\frac{p}{2})+\frac{1}{3}H(\frac{p}{2},\frac{p}{2},\bar{p})$$

$$=-\bar{p}\log\bar{p}-p\log p+p\ bit/\text{符号}$$

2.16（续）

（3）信源近似为无记忆信源，符号的概率分布等于平稳分布，则此信源：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(a_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 2 \\ 1/3, & 1/3, & 1/3 \end{bmatrix}$$

得：$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} P(a_i)\log P(a_i) \approx 1.585$ bit/符号

由此计算结果可知：$H(X) = H_\infty$

（4）求一阶马尔可夫信源 H_∞ 的最大值。因为

$$H_\infty = -(1-p)\log(1-p) - p\log p + p$$

当 $p = \frac{2}{3}$ 时，H_∞ 达到最大值等于 $\log 3 \approx 1.585$ bit/符号