

2022-2023 学年河南省郑州市统招专升本高数自考真题(含答案)

学校:_____ 班级:_____ 姓名:_____ 考号:_____

一、单选题(20 题)

1.

若函数 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0, \\ \ln(1 + bx)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则常数 a, b 应满足 ()

A. $a < b$ B. $a = b$ C. $a > b$ D. $a \neq b$

2.

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -7 & 11 & -1 & 2 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3.

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{2x}$ 的值是 ()

A. e B. $\frac{1}{e}$ C. e^2 D. 0

4.

向量组 $\mathbf{a}_1 = (1, 1+a, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, a^2 + 1)$ 线性相关, 则 $a =$ ()
A. -1 B. 0
C. 1 D. 2

5.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\tan \sqrt{x}$ 等价的无穷小, 是 ()
A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln(1 + \sqrt{x})$
C. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

6.

已知函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则全微分 $dz|_{(1,1)} =$ ()
A. $\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$ B. $dy - dx$
C. $\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$ D. $dx + dy$

7.

设 $y = \ln(1+x)$, 则 $y^{(n)} =$ ()
A. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ B. $(-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$
C. $(-1)^{n-1} \frac{n!}{(1+x)^n}$ D. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^{n-1}}$

8.

设 $f(x, y)$ 为连续函数, $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 交换积分次序后为 ()
A. $\int_0^1 dy \int_x^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$
C. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$ D. $\int_1^0 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$

9.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上连续, 并且在区间上的平均值是 6, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 12 D. 18

10.

下列广义积分发散的是 ()

A. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ D. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

11.

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2} =$ ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. 2

12.

设函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $f(0)$ 和 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 都是 $f(x)$ 的极小值

D. $f(0)$ 和 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 都是 $f(x)$ 的极大值

13.

设 $x = a t \cos t, y = a t \sin t$ ($a \neq 0$, 且为常数), 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} =$ ()

A. 0 B. $\frac{2}{\pi}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $-\frac{2}{\pi}$

14.

不定积分 $\int \cos x f'(1 - 2 \sin x) dx =$ ()

A. $2f(1 - 2 \sin x) + C$ B. $\frac{1}{2}f(1 - 2 \sin x) + C$

C. $-2f(1 - 2 \sin x) + C$ D. $-\frac{1}{2}f(1 - 2 \sin x) + C$

15.

下列级数中收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{n}$

16.

$\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) dx =$ ()

A. $\frac{1}{2}x^2 - x + C$

B. $\frac{1}{3}x^3 - x + C$

C. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$

D. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

17.

微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$ 的通解是 $y =$ ()

A. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

B. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

C. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

D. $y = e^{2x} (C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x)$

18.

已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 1$, 则下列结论正确的是 ()

A. x_0 为 $f(x)$ 的极小值点

B. x_0 为 $f(x)$ 的极大值点

C. x_0 不是 $f(x)$ 的极值点

D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

19.

若 $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x \leq 0, \\ x \cos \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ ()

A. e

B. 1

C. -1

D. 2

20.

设 $y = \ln(1+x)$, 则 $y^{(n)} =$ ()

A. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ B. $(-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

C. $(-1)^{n-1} \frac{n!}{(1+x)^n}$ D. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^{n-1}}$

二、填空题(10 题)

21. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x < 0 \\ 2x+a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____

22. 不定积分 $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx =$ _____

23.

直线 $L: \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5}$ 与平面 $\Pi: 6x - 4y + 10z - 1 = 0$ 的位置关系是 _____

24. $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 _____.

25. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1-x^2}$ 的通解为 _____.

26. 微分方程 $(1+e^x)dy = ye^x dx$ 的通解为 _____.

27. 设函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{t}\right)^t (x \neq 0)$, 则 $f(\ln 2) =$ _____

28. 微分方程 $xy' - y = x^2$ 的通解为 _____.

29. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2+1} \sin \sqrt{n^2+1} =$ _____

30.

L 是抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(1,-1)$ 的一段弧，则 $\int_L x^2 dx + y^3 dy =$ _____

三、判断题(10 题)

31. 方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间. A.否 B.是

32. 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ 收敛. A.否 B.是

33. 若数列 $\{a_n b_n\}$ 的极限存在, 则 $\{a_n\}$ 的极限必存在. A.否 B.是

34.

$\int_3^3 |1-x| dx = 3.$ ()

A.否 B.是

35.

函数 $y = \int_1^x (3t^2 + \sin t) dt$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x + \cos x.$ ()

A.否 B.是

36.

$x = 0$ 为函数 $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ 的可去间断点. ()

A.否 B.是

37.

$$\frac{d(\ln x)}{d\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} dx. \quad (\quad)$$

A.否 B.是

38.

$$\text{极限} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \text{ 的值是 } 1. \quad (\quad)$$

A.否 B.是

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a.$ A.否 B.是

40. 函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内处处有定义, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定有界.

A.否 B.是

四、计算题(5 题)

41. 确定函数 $f(x) = (x-1)e^{\frac{\pi}{4} + \arctan x}$ 的单调区间和极值.

42.

已知曲线 $L: y = \frac{\pi}{2} \cos x$ 上由 $A(0, \frac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\frac{\pi}{2}, 0)$ 的一段弧, 求质点在力场作用下沿曲线 L 所作的功 $\int_L \frac{k}{x^2 + y^2} (y dx - x dy)$, 其中 k 是已知非零参数.

43.

已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = b, \end{cases}$$
 当 b 取何值时, 方程组有解? 并求出通解.

44. 讨论 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

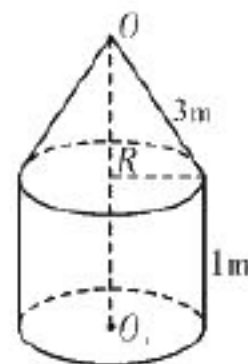
45.

设函数 $y = \sqrt{1+x^2} + \ln \cos x + e^2$, 求 y' .

五、应用题(5 题)

46.

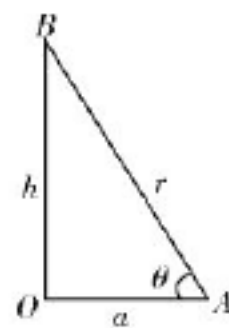
要求设计一个帐篷,它下部的形状是高为 1 m 的圆柱体,上部的形状是母线长为 3 m 的圆锥(如图所示),试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时,帐篷的体积最大?



第 20 题图

47.

如图所示,设电灯可沿垂线 OB 移动,根据物理学知识可知,亮度 J 与 $\sin \theta$ 成正比,与距离 r 的平方成反比,即 $J = \frac{k \sin \theta}{r^2}$,其中 k 为正常数.问电灯与水平面 OA 的距离 h 为多大时,才能使水平面上的点 A 处获得最大亮度?此时亮度是多少?



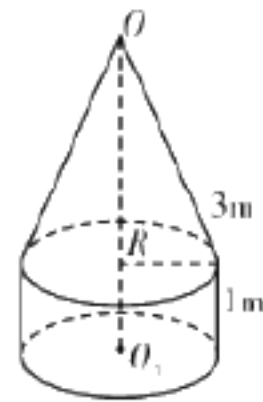
第 20 题图

48.

求斜边长为定长 l 的直角三角形的最大面积.

49.

要求设计一个帐篷,它下部的形状是高为 1 m 的圆柱体,上部的形状是母线长为 3 m 的圆锥(如图所示).试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时,帐篷的体积最大?



50.

有一个长为 8 厘米,宽为 5 厘米的长方形厚纸板,在它的四角各剪去相同的小正方形,把四边折起成一个无盖盒子,要使纸盒的容积最大,问剪去的小正方形的边长应为多少?

六、证明题(2 题)

51.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0) = 0, f(1) = 2$. 证明:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ,使得 $f'(\xi) = 2\xi + 1$ 成立.

52.

已知 $f(x) = 2(e^x - x - 1)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的非负可导函数,证明:当 $x > 0$ 时, $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3}$.

参考答案

1.B

[答案] B

【精析】 由连续定义可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+bx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+bx)^{\frac{1}{a} \cdot b} = \ln e^b = b = f(0) = a$, 故选 B.

2.D

【精析】

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & -30 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

故 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.C

[答案] C

【精析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right]^2 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2 = e^2 \cdot 1^2 = e^2$. 故应选 C.

4.C

【精析】 a_1, a_2, a_3 线性相关, 则 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+1)(1-a) = 0$, 故 $a = 1$.

5.B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/976203151153010030>