2024年定西市高三年级教学质量统一检测

数学试题

（满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1，答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

4．本试卷主要考试内容：高考全部内容．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若向量$\vec{a}=\left(-1,5\right)$，$\vec{b}=\left(x,x+1\right)$，$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则$x=$（　　）

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

2. $x^2+\frac{7}{x^2}+\sqrt{7}$的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{7}$　　B. $3\sqrt{7}$　　C. $4\sqrt{7}$　　D. $5\sqrt{7}$

3. 复数$\frac{\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}\right)}{3-5\mathrm{i}}$的共轭复数为（　　）

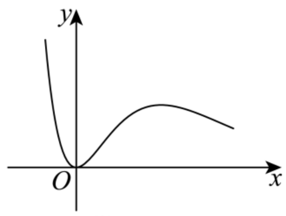
A. $-\frac{4}{17}-\frac{1}{17}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{4}{17}+\frac{1}{17}\mathrm{i}$

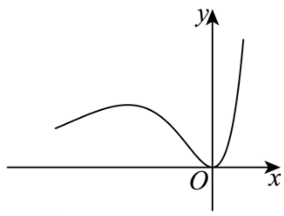
C. $\frac{4}{17}-\frac{1}{17}\mathrm{i}$　　D. $\frac{4}{17}+\frac{1}{17}\mathrm{i}$

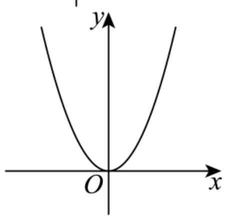
4. 已知直线$y=x+1$与圆$C:x^2+y^2=5$相交于M,N两点，O为坐标原点，则$\triangle MON$的面积为（　　）

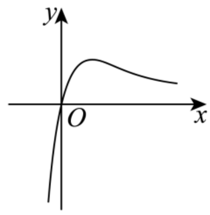
A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 4

5. 函数$f\left(x\right)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}$的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

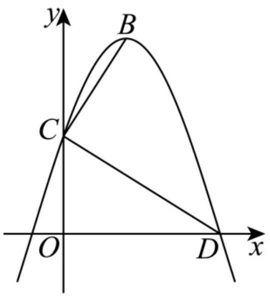
D. 

6. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$P$是$C$上任意一点，$O$为坐标原点，$P$到$x$轴的距离为$d$，则（　　）

A. $4|OP|^2-d^2$为定值　　B. $3|OP|^2-d^2$为定值

C. $|OP|^2+4d^2$为定值　　D. $|OP|^2+3d^2$为定值

7. 已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，$D\left(5,0\right),B\left(2,A\right),BC\perp CD$，则$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$（　　）



A. 4　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{10}$

8. 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PA\perp$底面$ABCD,\angle ABD=60^\circ,PB,PC$与底面$ABCD$所成的角分别为$\alpha,\beta$，且$\alpha+\beta=45^\circ$，则$\dfrac{PA}{AB}=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{17}-2}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}-3}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{15}-2}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分（如果正确选项有两个，则每对一个得3

分，如果正确选项有三个，则每对一个得 2 分），有选错的得 0 分.

9. 设集合 $A=\left\{x \mid x^{2}-x \leq 6\right\}, B=\left\{xy \mid x \in A, y \in A\right\}$，则（　　）

A. $A \cap B=B$

B. $B \cap \mathrm{Z}$ 的元素个数为 16

C. $A \cup B=B$

D. $A \cap \mathbf{Z}$ 的子集个数为 64

10. 已知函数 $f(x)=\left|2^{x}-1\right|-a, g(x)=x^{2}-4|x|+2-a$，则（　　）

A. 当 $g(x)$ 有 2 个零点时，$f(x)$ 只有 1 个零点

B. 当 $g(x)$ 有 3 个零点时，$f(x)$ 只有 1 个零点

C. 当 $f(x)$ 有 2 个零点时，$g(x)$ 有 2 个零点

D. 当 $f(x)$ 有 2 个零点时，$g(x)$ 有 4 个零点

11. 下列命题为真命题的是（　　）

A. $\sqrt{x^{2}-4x-8\sqrt{-x}+4}+|x-1|$ 的最小值是 2

B. $\sqrt{x^{2}-4x-8\sqrt{-x}+4}+|x-1|$ 的最小值是 $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{x^{2}-4x-8\sqrt{-x}+4}+\sqrt{x^{2}-2x-4\sqrt{-x}+2}$ 的最小值是 $\sqrt{2}$

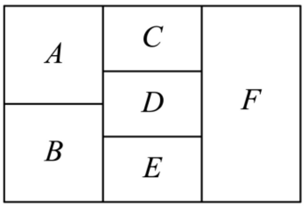
D. $\sqrt{x^{2}-4x-8\sqrt{-x}+4}+\sqrt{x^{2}-2x-4\sqrt{-x}+2}$ 的最小值是 $\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，且 $b=4a, A+C=\frac{5\pi}{6}$，则 $\sin A=$__________，

13. 已知某厂甲、乙两车间生产同一批衣架，且甲、乙两车间的产量分别占全厂产量的 60%，40%，甲、乙车间的优品率分别为 $95\%, 90\%$. 现从该厂这批产品中任取一件，则取到优品的概率为__________.（用百分数表示）.

14. 提供 6 种不同颜色的颜料给图中 A，B，C，D，E，F 六个区域涂色，要求相邻区域不能涂相同颜色，则不同的涂色方法共有______种.



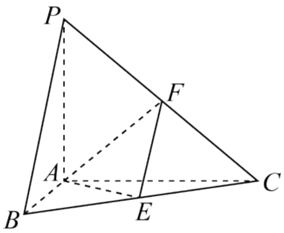
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 甲、乙两人进行中国象棋比赛，采用五局三胜制，假设他们没有平局的情况，甲每局赢的概率均为$\frac{2}{3}$，且每局的胜负相互独立，

（1）求该比赛三局定胜负的概率；

（2）在甲赢第一局的前提下，设该比赛还需要进行的局数为X，求X的分布列与数学期望.

16. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AC\perp$平面PAB,E,F分别为BC,PC的中点，且$PA=AC=2,AB=1,EF=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



（1）证明：$AB\perp PC$.

（2）求二面角$F-AE-C$的正弦值.

17. 在n个数码$1,2,\cdots,n\left(n\in \mathrm{N},n\geq 2\right)$构成的一个排列$j_1j_2\cdots j_n$中，若一个较大的数码排在一个较小的数码的前面，则称它们构成逆序（例如$j_2>j_5$，则j_2与j_5构成逆序），这个排列的所有逆序的总个数称为这个排列的逆序数，记为$T\left(j_1j_2\cdots j_n\right)$，例如，$T\left(312\right)=2$，

（1）计算$T(51243)$；

（2）设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_{n+1}=a_n\cdot T\left(51243\right)-T\left(3412\right),a_1=2$，求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（3）设排列$j_1j_2\cdots j_n\left(n\in \mathrm{N},n\geq 2\right)$满足

$j_i=n+1-i\left(i=1,2,\cdots,n\right),b_n=T\left(j_1j_2\cdots j_n\right),S_n=\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_{n+1}}$，求$S_n$，

18. 设函数$f\left(x\right)=\frac{x^2+3x+2}{\mathrm{e}^{x+1}},g\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)$，

（1）证明：$g\left(x\right)\geq 0$.

（2）当$x>\mathrm{e}-1$时，证明：$f\left(x\right)<\ln\left(x+2\right)$.

19. 双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点$D\left(6,\sqrt{3}\right)$到左、右焦点的距离之差为6，

（1）求双曲线C的方程，

（2）已知$A\left(-3,0\right),B\left(3,0\right)$，过点$\left(5,0\right)$的直线$l$与$C$交于$M,N$（异于$A,B$）两点，直线$MA$与$NB$交于点$P$，试问点$P$到直线$x=-2$的距离是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由。

参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若向量$\vec{a}=\left(-1,5\right)$，$\vec{b}=\left(x,x+1\right)$，$\vec{a}\mathbin{/\mkern-6mu/}\vec{b}$，则$x=$（　　）

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面共线向量的坐标表示建立方程，解之即可求解.

【详解】因为$\vec{a}\mathbin{/\mkern-6mu/}\vec{b}$，所以$-\left(x+1\right)-5x=0$，解得$x=-\frac{1}{6}$.

故选：A

2. $x^2+\frac{7}{x^2}+\sqrt{7}$的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{7}$　　B. $3\sqrt{7}$　　C. $4\sqrt{7}$　　D. $5\sqrt{7}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用基本不等式即可得解.

【详解】由题意知$x\neq 0$，所以$x^2>0,\frac{7}{x^2}>0$，

所以 $x^2+\frac{7}{x^2}+\sqrt{7}\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{7}{x^2}}+\sqrt{7}=3\sqrt{7}$.

当且仅当 $x^2=\frac{7}{x^2}$，即 $x^2=\sqrt{7}$ 时，等号成立.

故选：B.

3. 复数 $\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{3-5\mathrm{i}}$ 的共轭复数为（　　）

A. $-\frac{4}{17}-\frac{1}{17}\mathrm{i}$

B. $-\frac{4}{17}+\frac{1}{17}\mathrm{i}$

C. $\frac{4}{17}-\frac{1}{17}\mathrm{i}$

D. $\frac{4}{17}+\frac{1}{17}\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的四则运算与共轭复数的定义即可得解.

【详解】因为 $\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{3-5\mathrm{i}}=\frac{-1+\mathrm{i}}{3-5\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})(3+5\mathrm{i})}{(3-5\mathrm{i})(3+5\mathrm{i})}=\frac{-8-2\mathrm{i}}{34}=-\frac{4}{17}-\frac{1}{17}\mathrm{i}$,

所以 $\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{3-5\mathrm{i}}$ 的共轭复数为 $-\frac{4}{17}+\frac{1}{17}\mathrm{i}$.

故选：B.

4. 已知直线 $y=x+1$ 与圆 $C:x^2+y^2=5$ 相交于 M,N 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle MON$ 的面积为（　　）

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据点到直线的距离公式及圆的几何性质求弦长即可得解.

【详解】设点 O 到直线 MN 的距离为 d，

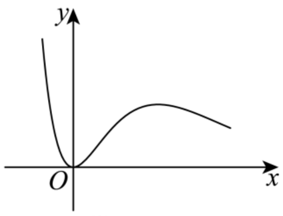
则 $d=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

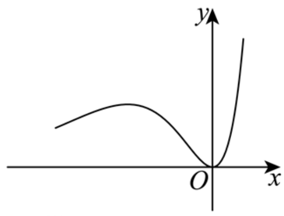
又 $|MN|=2\sqrt{5-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$,

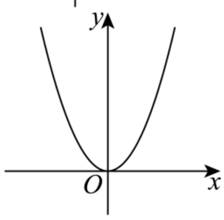
所以 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$.

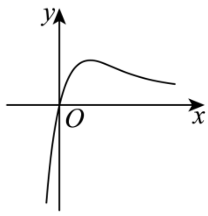
故选：A

5. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】利用导数判断函数的单调性即可得到函数的大致图象.

【详解】已知 $x\in\mathrm{R}$，因为 $f'\left(x\right)=\dfrac{x\left(2-x\right)}{\mathrm{e}^{x-1}}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，或 $x=2$，

则 $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in\left(0,2\right)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $\left(0,2\right)$ 上单调递增，

所以选项 A 符合题意,

故选：A.

6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,P 是 C 上任意一点，O 为坐标原点，P 到 x 轴的距离为 d，则（　　）

A. $4|OP|^2-d^2$ 为定值

B. $3|OP|^2-d^2$ 为定值

C. $|OP|^2+4d^2$ 为定值

D. $|OP|^2+3d^2$ 为定值

【答案】D

【解析】

【分析】观察选项，设 $P\left(x,y\right)$，从而表示出 $\left|OP\right|^2,d^2$，再利用椭圆离心率的定义求得 a^2，进而得到椭圆方程，从而配凑出关于 $\left|OP\right|^2,d^2$ 的式子，由此得解.

【详解】依题意，设 $P(x,y)$，则 $|OP|^2=x^2+y^2, d^2=y^2$，

因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a^2=4$，

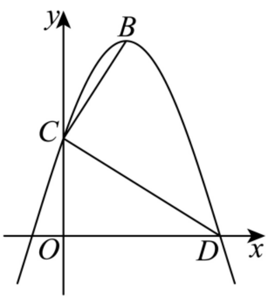
所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，即 $x^2+4y^2=4$，即 $x^2+y^2+3y^2=4$，

所以 $|OP|^2+3d^2=4$，故 D 正确，显然 ABC 错误.

故选：D.

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，

$D(5,0),B(2,A),BC\perp CD$，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$（　　）



A. 4　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用三角函数“五点法”求得 ω,φ，再利用向量垂直的坐标表示求得 A，从而得解.

【详解】因为 $D(5,0),B(2,A)$，

由图象可知 $\dfrac{T}{4}=5-2=3$，则 $T=12$，因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x+\varphi\right)$，

由 $f\left(5\right)=A\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$，得 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in Z$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f\left(x\right)=A\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)$，则$C\left(0,\frac{A}{2}\right)$，

因为$BC\perp CD$，$\overrightarrow{BC}=\left(-2,-\frac{A}{2}\right),\overrightarrow{CD}=\left(5,-\frac{A}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=-10+\frac{A^2}{4}=0$，解得 $A=2\sqrt{10}$（负根舍去），

所以 $f\left(x\right)=2\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)$，

故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{10}\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{5}$.

故选：B.

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$底面 $ABCD,\angle ABD=60^\circ,PB,PC$ 与底面 $ABCD$ 所成的角分别为α,β，且$\alpha+\beta=45^\circ$，则$\frac{PA}{AB}=$（　　）

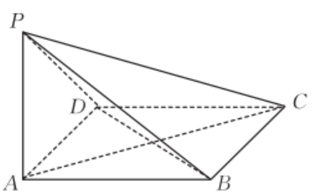
A. $\frac{\sqrt{17}-2}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{15}-2}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $AB=a,PA=b$，利用线面角的定义，结合正切函数的和差公式得到关于$\frac{b}{a}$的方程，解之即可得解.

【详解】如图，设 $AB=a,PA=b$，



因为在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=60^\circ$，所以 $AC=BD=2a$，

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$，