2023-2024学年高三上册数学期末模拟试卷8

（考试时间：120分钟）

一、单选题（本题共12小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目）

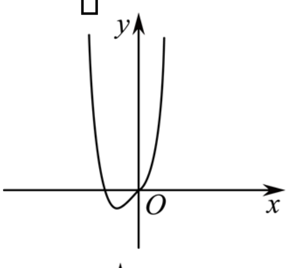
1．已知集合 $A=\{\square 2,\square 1,0,1,2\}$，$B$是偶数集，则$A\cap B=$（　　）

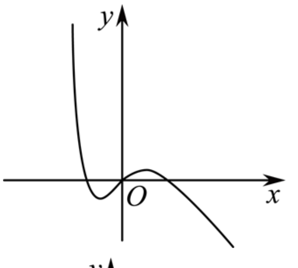
A．$\varnothing$　　B．$\{\square 2,2\}$　　C．$\{0,2\}$　　D．$\{-2,0,2\}$

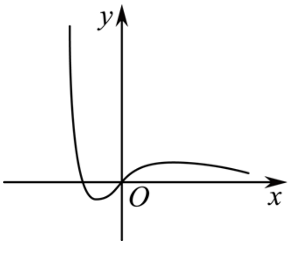
2．已知复数 z 满足 $z\square\mathrm{i}\square\frac{z}{\square}$，则 z 在复平面内所对应的点是（　　）

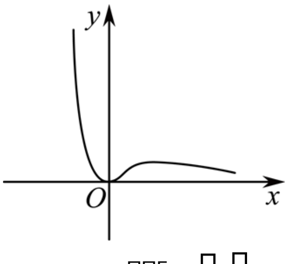
A．$\left(1,\square\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(\square\frac{1}{5},\square\frac{3}{5}\right)$　　C．$(\square 1,1)$　　D．$\left(\square\frac{3}{5},\square\frac{\square}{5}\right)$

3．函数 $f\left(x\right)=\frac{x^{2}\square x}{\mathrm{e}^{x}}$ 的部分图像大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

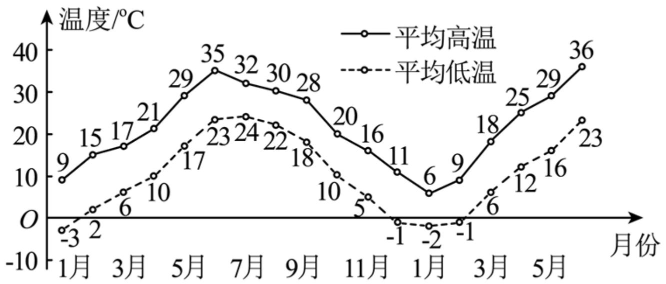
4．已知点 $A(\square 1,1)$，$B(2,\square 1)$，向量 $\vec{a}=(\square 2,1)$，$\vec{b}=(1,1)$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}\square\vec{b}$ 的夹角的余弦值为（　　）

A．$\square\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\square\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5．已知M是双曲线C上的一个动点，且点M到C的两个焦点距离的差的绝对值为6，C的焦点到渐近线的距离为4，则C的离心率为（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{5}{4}$

6．某市2021年 月至2022年 月的平均气温折线图如图，则（　　）



A．平均高温不低于 30 °C 的月份有 个

B．平均高温的中位数是 21 °C

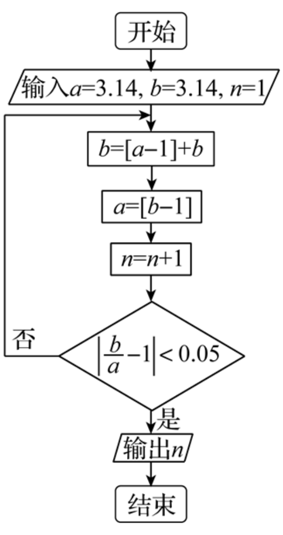
C．平均高温的极差大于平均低温的极差

D．月平均高温与低温之差不超过10 °C的月份有 个

7．若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x□y \ □ \ 0, \\ 2x□y□0, \\ y□0, \end{cases}$，则 $z□2x□y□2$ 的最大值为（　　）

A．4　　　　B．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　　　C．2　　　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8．已知 □ 表示不超过实数 x 的最大整数.执行如图所示的程序框图，则输出的 n □（　　）



A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

9．记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n□n^2□2n$．若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1□a_1$，$b_2□a_4$，则数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n□$（　　）

A．$\frac{3□3^n}{2}$　　　　B．$\frac{3□3^{n□1}}{2}$　　　　C．$\frac{5}{6}□\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n□1}$　　　　D．$\frac{1}{2}□\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

10．已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，D，E，F 分别是 BB_1，B_1C_1，AA_1 的中点，M 是线段 BF 上的动点，则下列结论中正确的个数是（　　）

① $BF \perp BC$；② $BF // C_1D$；③ $AE \perp BC$；④ $C_1M //$ 平面 ADE．

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

11．已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{\tan x}{\tan^2 x+1}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 在区间 $\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

B．$f(x)$ 在区间 $(0,$ $)$ 上有极小值

C．设 $g(x)=f(x)+2$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=4$

D．$f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有且只有一个零点

12．已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点均在半径为 2 的球的 O 球面上，底面 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形．若三棱锥 $P-ABC$ 的体积取得最大值时，该三棱锥的内切球的半径为 r，则 $r=$（　　）

A．1　　　　B．$\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$　　　　C．$\dfrac{3}{2}$　　　　D．$\dfrac{3(\sqrt{13}-1)}{14}$

二、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

13.若 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\log_3(x+1)$，则 $f\left(\dfrac{16}{2}\right)=$__________.

14．将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 向右平移 $\dfrac{1}{4}$ 个周期后所得的图象在 $(0,$ $)$ 内有 个最高点和 2 个最低点，则 ω 的取值范围是__________．

15.已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，虚轴的上端点为 A，M，N 是 C 上的两点，P 是 MN 的中点，O 为坐标原点，直线 OF 的斜率为 $\dfrac{1}{\ }$，若 $AF \parallel MN$，则 C 的两条渐近线的斜率之积为__________.

三、解答题（共5题，每小题12分，共60分，请写出必要的文字说明或解答过程）

16.（12分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $\frac{2\cos C}{a}=\frac{2}{b}-\frac{\sin C}{b\sin A}$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $b=8$, D 为边 AC 的中点，且 $BD=\frac{8}{\sqrt{3}}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17.（12分）2020年，教育部启动实施强基计划．强基计划聚焦国家重大战略需求，突出基础学科的支撑引领作用．三年来，强基计划共录取新生1.8万余人．为响应国家号召，某校2022年7月成立了“强基培优”拓展培训班，从高一入校时中考数学成绩前100名的学生中选取了50名对数学学科研究有志向、有兴趣、有天赋的学生进行拓展培训．为了解数学“强基培优”拓展培训的效果，在高二时举办了一次数学竞赛，这100名学生的成绩（满分为150分）情况如下表所示．

	成绩不低于135分	成绩低于135分	总计
参加过培训	40	10	50
未参加过培训	20	30	50
总计			

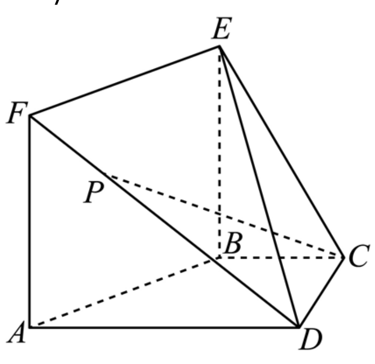
(1)能否有99%的把握认为学生的数学竞赛成绩与是否参加“强基培优”拓展培训有关？

(2)从成绩不低于135分的这60名学生中，按是否参加过“强基培优”拓展培训采用分层抽样．随机抽取了6人，再从这6人中随机抽取2人代表学校参加区里的数学素养大赛，求这2人中至少有一人未参加过培训的概率．

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

18.（12 分）如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABEF$ 为正方形，平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$，$AD // BC$，$AD \perp DC$，$AD = 3DC = 3BC = 3$，P 是棱 DF 上的一点.



(1)是否存在点 P，使得 $PC //$ 平面 $ABEF$？若存在，则求出 $\frac{FP}{PD}$ 的值；若不存在，请说明理由；

(2)求多面体 $ABCDEF$ 的体积.

19.（12 分）椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 A，点 F_1 到直线 AF_2 的距离为 $\sqrt{2}$.

(1)求 C_1 的方程；

(2)过点 $Q(\sqrt{3},0)$ 的直线交双曲线 $C: x^2-y^2=1$ 右支于点 M，N，点 P 在 C_1 上，求 $\triangle PMN$ 面积的取值范围.

20.（12 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+2a^2-3(a\in \mathrm{R})$.

(1)若 $a=\frac{?}{3}$，求 $f(x)$ 的极值；

(2)若 $f(x)\leq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

(3)证明：$\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right)<e^{\frac{1}{3}}(n\in \mathrm{N}^*)$.

四 选做题（请从 21.22 两题中选做一题，写出必要的文字说明与证明过程，若两题全做，则以 21 题为准，每道题目 10 分）

21.在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos 2t \\ y = \sqrt{3}\sin t \end{cases}$（ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + m = 0$.

(1)求 的直角坐标方程；

(2)若 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

22.已知函数 $f(x) = |x-1| - |x-2|$.

(1)解不等式 $f(x) > 0$;

(2)若不等式 $m^2 - 2m \geq |x-2| - f(x)$ 对 $x \in \mathrm{R}$ 恒成立,求实数 m 的取值范围 .

答案解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	C	A	B	C	A	C	D	C	D	B

1．D

【分析】利用偶数和交集的定义即可求解.

【详解】因为在集合 $A = \{-2, \ldots\}$ 中，-2，0，2 是偶数，所 $A \cap B = \{\ldots\}$ ．

故选：D.

2．B

【分析】根据复数的运算求出 z，即可得出 z 在复平面内所对应的点.

【详解】由 $\frac{z}{z\cdot i \ldots}$，得 $z = \frac{i-1}{i+2} = \frac{(i-1)(2-i)}{(i+2)(2-i)} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$，

所以 z 在复平面内所对应的点是 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$．

故选：B.

3．C

【分析】利用特殊值及极限思想即可分析得出.

【详解】由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) < 0$，故 D 错误，

当 $x \to$ 时，$f(x)$ 0，A，B 错误．

故选：C.

4．A

【分析】由平面向量的坐标运算求得 $\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$，结合平面向量的夹角公式即可求得答案．

【详解】由题意，得 $\overrightarrow{AB} = (1, \ldots)$，$\vec{a} = \ldots$，

则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{a}|} = \frac{1 \ldots 0}{\sqrt{1^2 + \ldots^2}\sqrt{\ldots^2 + \ldots^2}} = \ldots\frac{\sqrt{5}}{5}$．

故选：A．

5．B

【分析】不妨设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，表示出双曲线的渐近线方程，根据双曲线的定义得到$a=3$，再利用点到直线的距离公式求出$b$，从而求出 ，即可得解.

【详解】解：不妨设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，则双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，即$bx\pm ay=0$，

由双曲线的定义知，$2a=6$，所以$a=3$，

由双曲线C的焦点到其渐近线的距离为4，即$\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=4$，

所以$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，

所以C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$．

故选：B

6．C

【分析】根据折线图数据，结合中位数、极差的定义依次判断各个选项即可.

【详解】对于A，平均高温不低于$30^\circ C$的月份有2021年6,7,8月和2022年 月，共4个，A错误；

对于B，将各个月份数据按照从小到大顺序排序后，可得中位数为$\frac{20+21}{2}=20.5^\circ C$，B错误；

对于C，平均高温的极差为$36-6=30^\circ C$，平均低温的极差为$24-(-3)=27^\circ C$，

则平均高温的极差大于平均低温的极差，C正确；

对于D，月平均高温与低温之差不超过$10^\circ C$的月份有2021年7,8,9,10月和2022年1,2月，共 个，D错误.

故选：C.

7．A

【分析】目标函数$z=|2x-y-2|$的几何意义是可行域内的点到直线l：$2x-y-2=0$的距离的$\sqrt{5}$倍．由约束条件作出可行域，找到可行域内到直线l的距离最大的点，求解即可.

【详解】由约束条件作出可行域，如图中阴影部分所示．由点到直线的距离公可知，

目标函数$z=|2x-y-2|$的几何意义是可行域内的点到直线l：$2x-y-2=0$的距离的$\sqrt{5}$倍．

数形结合可知，可行域内到直线l的距离最大的点为$A(-1,0)$，

且点A到直线l的距离$d=\frac{|2\times(-1)-0-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

则$z=|2x-y-2|$的最大值为4．

故选：A.