2023 学年第二学期高二数学学科测试卷（五）

命题人：崔舒静　　审题人：詹长刚

一. 单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

1. 已知集合 $M=\{y|y=\ln(1-x^2)\}, N=\{x|-1<x<1\}$，则（　　）

A. $M=N$

B. $M\cap N=[-1,0]$

C. $M\cap N=(-1,0)$

D. $(\complement_R M)\cup N=(-1,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】由对数型函数的值域结合集合运算判定选项即可.

【详解】由题意可得 $1\ge 1-x^2>0\Rightarrow \ln(1-x^2)\le 0$，即 $M=(-\infty,0]$，

所以 $M\ne N$，$M\cap N=(-1,0]$，$(\complement_R M)\cup N=(-1,+\infty)$，即 A、B、C 三选项错误，D 正确.

故选：D

2. 已知角 α 的终边上一点 $A(4,3)$，且 $\tan(\alpha+\beta)=2$，则 $\tan(3\pi-\beta)=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{5}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】先通过三角函数的定义求出 $\tan\alpha$，代入 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 求出 $\tan\beta$，继而求出 $\tan(3\pi-\beta)$ 的值.

【详解】$\because$ 角 α 的终边上一点 $A(4,3)$

$\therefore \tan\alpha=\frac{3}{4}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\tan\beta}{1-\frac{3}{4}\tan\beta}=2,$$

解得 $\tan\beta=\frac{1}{2}$.

$\therefore \tan(3\pi-\beta)=-\tan\beta=-\frac{1}{2}$.

故选：B.

3. 函数 $y=\ln\left(-x^2-2x+3\right)$ 的单调递减区间为（　　）

A. $\left(-\infty,-1\right)$　　B. $\left(-1,+\infty\right)$　　C. $\left(-1,1\right)$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出定义域，再利用复合函数同增异减求出函数的单调递减区间.

【详解】令 $-x^2-2x+3>0$ 得 $-3<x<1$，

故 $y=\ln\left(-x^2-2x+3\right)$ 的定义域为 $\left(-3,1\right)$，

$y=\ln t$ 在 $t\in\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

由复合函数单调性满足同增异减可得，

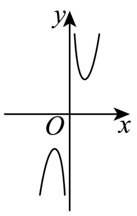
只需求出 $t=-x^2-2x+3$ 在 $\left(-3,1\right)$ 上的单调递减区间，

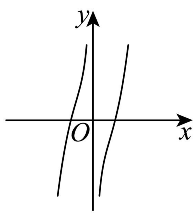
$t=-x^2-2x+3=-\left(x+1\right)^2+4$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上单调递减，

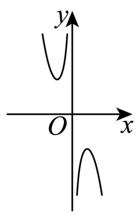
故数 $y=\ln\left(-x^2-2x+3\right)$ 的单调递减区间为 $\left(-1,1\right)$.

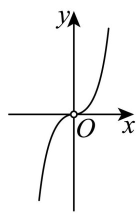
故选：C

4. 下列图像中，不可能成为函数 $f\left(x\right)=x^3-\dfrac{m}{x}$ 的图像的是（　　）.

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用导数讨论函数的单调性和讨论函数值的正负得到答案.

【详解】因为 $f\left(x\right)=x^3-\dfrac{m}{x}$，$\{x\,|\,x\neq 0\}$，所以 $f'\left(x\right)=3x^2+\dfrac{m}{x^2}$

当 $m=0$ 时 $f\left(x\right)=x^3-\dfrac{m}{x}=0$，$\{x\,|\,x\neq 0\}$ 无解，且 $f'\left(x\right)=3x^2+\dfrac{m}{x^2}>0$

此时 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$，$\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，D 选项符合此种情况.

当 $m>0$ 时 $f\left(x\right)=x^3-\dfrac{m}{x}=\dfrac{x^4-m}{x}=0$ 有两个解 $\pm\sqrt[4]{m}$，且 $f'\left(x\right)=3x^2+\dfrac{m}{x^2}>0$

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 单调递增，B 选项符合此种情况.

当 $m<0$ 时 $f(x)=x^3-\frac{m}{x}=\frac{x^4-m}{x}$ 当 $x<0$ 时易知 $f(x)<0$，$x>0$ 时 $f(x)>0$

所以函数图像不可能是 C.

故选：C

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(1,1)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $(1,1)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据投影向量的定义以及向量的坐标运算求解即可.

【详解】因为 $\vec{b}=(1,1)$，所以 $|\vec{b}|^2=1^2+1^2=2$，

又 $|\vec{a}|=1,$ 把 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$ 两边平方得

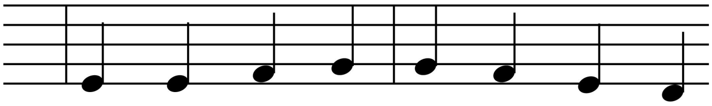
$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，即 $1+2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，

解得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的投影向量坐标为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(1,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

故选：A.

6. “欢乐颂”是尊称为“乐圣”“交响乐之王”的神圣罗马帝国音乐家贝多芬一生创作的重要作品之一. 如图，以时间为横轴、音高为纵轴建立平面直角坐标系，那么写在五线谱中的音符就变成了坐标系中的点，如果这些点在函数 $y=4\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象上，且图象过点 $\left(\frac{\pi}{24},2\right)$，相邻最大值与最小值之间的水平距离为 $\frac{\pi}{2}$，则是函数的单调递增区间的是（　　）



A. $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{7\pi}{24},\frac{5\pi}{24}\right]$

C. $\left[\frac{5\pi}{24},\frac{3\pi}{8}\right]$ D. $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意求出最小正周期，从而求出ω，再利用特殊点求出φ的值，从而得到函数的解析式，利用正弦函数的单调性求解单调增区间，即可得到结果．

【详解】因为函数图象相邻最大值与最小值之间的水平距离为$\frac{\pi}{2}$，

所以函数的周期为$2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

又图象过点$(\frac{\pi}{24},2)$，

所以$4\sin\left(2\times\frac{\pi}{24}+\varphi\right)=2$，可得$\sin\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

则有$\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或$\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

即$\varphi=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ 或$\varphi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{12}$，所以$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得$-\frac{7\pi}{24}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{24}+k\pi,k\in Z$，

所以函数的单调区间为$\left[-\frac{7\pi}{24}+k\pi,\frac{5\pi}{24}+k\pi\right],k\in Z$，

当$k=0$时，函数的单调递增区间为$\left[-\frac{7\pi}{24},\frac{5\pi}{24}\right]$，故选项 B 正确．

故选：B．

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x+x,x>1\\2x^2-mx+\frac{m}{2},x\le 1\end{cases}$，若$g(x)=f(x)-m$有三个零点，则实数$m$的取值范围是（ ）

A. $\left(1,\frac{7}{4}\right]$ B. $(1,2]$ C. $\left(1,\frac{4}{3}\right]$ D. $[1,3]$

【答案】C

【解析】

【分析】由题可知$x>1$时，函数$g(x)=f(x)-m$至多有一个零点，进而可得$x\le 1$时，要使得$g(x)=f(x)-m=2x^2-mx-\frac{m}{2}$有两个零点，然后根据二次函数的性质结合条件即得.

【详解】当$x>1$时，$f(x)=\ln x+x$单调递增且$f(x)=\ln x+x>1$，此时$g(x)=f(x)-m$至多有一个零点，

若$g(x)=f(x)-m$有三个零点，则$x\le 1$时，函数有两个零点；

当$x>1$时，$f(x)=\ln x+x>1$，故$m>1$；

当$x\le 1$时，要使$g(x)=f(x)-m=2x^2-mx-\frac{m}{2}$有两个零点，

则$\begin{cases}\Delta=m^2-8\left(-\frac{m}{2}\right)>0\\ \frac{m}{4}<1\\ 2-m-\frac{m}{2}\ge 0\end{cases}$，

所以$0<m\le\frac{4}{3}$，又$m>1$，

所以实数m的取值范围是$\left(1,\frac{4}{3}\right]$.

故选：C.

8. 张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家， 他曾在数学著作《算罔论》中得出结论：圆周率的平方除以十六约等于八分之五． 已知在菱形$ABCD$中，$AB=BD=2\sqrt{3}$， 将$\triangle ABD$沿BD进行翻折， 使得$AC=2\sqrt{6}$． 按张衡的结论， 三棱锥$A-BCD$外接球的表面积约为（　　）

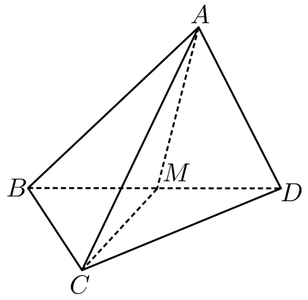
A. 72　　B. $24\sqrt{10}$　　C. $28\sqrt{10}$　　D. $32\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】由球的性质确定三棱锥$A-BCD$外接球的球心位置和球的半径，由此可求球的表面积.

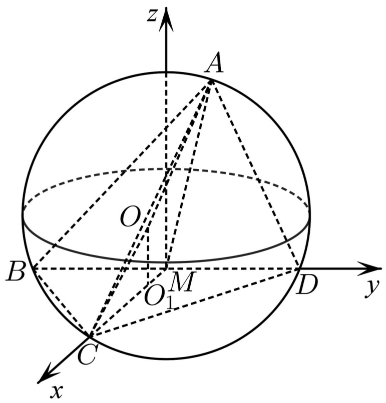
【详解】如图 1，



取 BD 的中点 M，连接 AM，CM．由 $AB=AD=BD=2\sqrt{3}$，可得 $\triangle ABD$ 为正三角形，且

$AM=CM=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，所以 $\cos\angle AMC=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times3\times3}=-\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\angle AMC=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

以 M 为原点，MC 为 x 轴，MD 为 y 轴，过点 M 且与平面 BCD 垂直的直线为 z 轴建立空间直角坐标系如图 2，



则 $C(3,0,0)$，　$A(-1,0,2\sqrt{2})$．设 O 为三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心，则 O 在平面 BCD 的投影必为 $\triangle BCD$ 的外心，则设 $O(1,0,\ h)$．由 $R^2=|OA|^2=|OC|^2$ 可得 $2^2+0^2+(2\sqrt{2}-h)^2=2^2+0^2+h^2$，解得 $h=\sqrt{2}$，

所以 $R^2=|OC|^2=6$．

由张衡的结论，$\dfrac{\pi^2}{16}\approx\dfrac{5}{8}$，所以 $\pi\approx\sqrt{10}$，

则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为 $4\pi R^2\approx24\sqrt{10}$，

故选：B．

二．多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对得 3 分，有选错的得 0 分．

9．$\triangle ABC$ 中，D 为边 AC 上的一点，且满足 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，若 P 为边 BD 上的一点，且满足 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\left(m>0,n>0\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $m+2n=1$

B. mn 的最大值为$\frac{1}{12}$

C. $\frac{4}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为$6+4\sqrt{2}$

D. m^2+9n^2的最小值为$\frac{1}{2}$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据平面向量共线定理可知 A 错误；

根据$mn=\frac{1}{3}m\cdot(3n)$，利用基本不等式可求得最大值，知 B 正确；

由$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+3n)$，利用基本不等式可求得最小值，知 C 错误；

利用基本不等式可得$m^2+9n^2\geq\frac{(m+3n)^2}{2}$，知 D 正确.

【详解】对于 A，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+3n\overrightarrow{AD}$，

$\because B,P,D$三点共线，$\therefore m+3n=1$，A 错误；

对于 B，$\because m+3n=1$，$\therefore mn=\frac{1}{3}m\cdot(3n)\leq\frac{1}{3}\times\left(\frac{m+3n}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$（当且仅当$m=3n$时取等号），B 正确；

对于 C，$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+3n)=7+\frac{12n}{m}+\frac{m}{n}\geq 7+2\sqrt{\frac{12n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=7+4\sqrt{3}$（当且仅当$\frac{12n}{m}=\frac{m}{n}$，即$m=2\sqrt{3}n$时取等号），C 错误；

对于 D，$m^2+9n^2\geq\frac{(m+3n)^2}{2}=\frac{1}{2}$（当且仅当$m=3n$时取等号），D 正确.

故选：BD.

【点睛】易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：一正二定三相等.

（1）“一正”就是各项必须为正数；

（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

10. 对于数列$\{a_n\}$，若存在正数 M，使得对一切正整数 n，都有$|a_n|\leq M$，则称数列$\{a_n\}$是有界的.若这样的正数 M 不存在，则称数列$\{a_n\}$是无界的.记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，下列结论正确的是（　　）

A. 若 $a_n=\frac{1}{n}$，则数列 $\{a_n\}$ 是无界的

B. 若 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin n$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的

C. 若 $a_n=(-1)^n$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的

D. 若 $a_n=2+\frac{1}{n^2}$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的

【答案】BC

【解析】

【分析】利用有界数列与无界数列的定义，结合放缩法与等比数列的前 n 项和公式即可得解.

【详解】对于 A，$\because |a_n|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\le 1$ 恒成立，

$\therefore$ 存在正数 $M=1$，使得 $|a_n|\le M$ 恒成立，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是有界的，A 错误；

对于 B，$\because -1\le \sin n\le 1$，$\therefore -\left(\frac{1}{2}\right)^n\le a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sin n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1,$$

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n>-1,$$

所以存在正数 $M=1$，使得 $|S_n|\le M$ 恒成立，

$\therefore$ 则数列 $\{S_n\}$ 是有界的，B 正确；

对于 C，因为 $a_n=(-1)^n$，

所以当 n 为偶数时，$S_n=0$；当 n 为奇数时，$S_n=-1$；

$\therefore |S_n|\le 1$，$\therefore$ 存在正数 $M=1$，使得 $|S_n|\le M$ 恒成立，

$\therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 是有界的，C 正确；

对于 D，$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=4\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$$\therefore S_n=2n+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{n^2}\le 2n+4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$=2n+4\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=2n+\frac{8n}{2n+1}=2\left(n-\frac{2}{2n+1}+2\right)$；

$\because y=x-\frac{2}{2x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore n-\frac{2}{2n+1}\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$，

$\therefore$ 不存在正数 M，使得 $|S_n|\le M$ 恒成立，

$\therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 是无界的，D 错误.

故选：BC.

11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R，若 $f(x)$ 是奇函数，$f(2)=-f(1)\neq 0$，且对任意 x，$y\in\mathrm{R}$，$f(x+y)=f(x)f'(y)+f'(x)f(y)$，则（　　）

A. $f'(1)=\frac{1}{2}$

B. $f(9)=0$

C. $\sum_{k=1}^{20}f(k)=1$

D. $\sum_{k=1}^{20}f'(k)=-1$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据赋值法，结合原函数与导函数的对称性，奇、偶函数的定义、函数周期性进行求解即可.

【详解】令 $x=y=1$，得 $f(2)=2f(1)f'(1)$，因为 $f(2)=-f(1)\neq 0$，

所以 $f'(1)=-\frac{1}{2}$，所以 A 错误；

令 $y=1$，得 $f(x+1)=f(x)f'(1)+f'(x)f(1)$①，所以 $f(1-x)=f(-x)f'(1)+f'(-x)f(1)$，

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，

所以 $f(1-x)=-f(x)f'(1)+f'(x)f(1)$②，由①②，

得 $f(x+1)=2f(x)f'(1)+f(1-x)=-f(x)-f(x-1)$，

即 $f(x+2)=-f(x+1)-f(x)$，

所以 $f(x+3)=-f(x+2)-f(x+1)=f(x+1)+f(x)-f(x+1)=f(x)$，

所以 $f(x)$，$f'(x)$ 是周期为 3 的函数，所以 $f(9)=f(0)=0$，

$\sum_{k=1}^{20}f(k)=[f(1)+f(2)+f(3)]\times 6+[f(1)+f(2)]=0$，

所以 B 正确，C 错误；

因为 $f'(2)=f'(-1)=f'(1)=-\frac{1}{2}$，

在①中令 $x=0$ 得 $f(1)=f(0)f'(1)+f'(0)f(1)$，

所以 $f'(0)=1$，

$\sum_{k=1}^{20}f'(k)=\left[f'(1)+f'(2)+f'(3)\right]\times 6+\left[f'(1)+f'(2)\right]=-1$，所以 D 正确.

故选：BD.

【点睛】对于可导函数 $f(x)$ 有：

奇函数的导数为偶函数

偶函数的导数为奇函数

若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是可导函数，且周期为 T，则其导函数 $f'(x)$ 是周期函数，且周期也为 T

三. 填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知复数 z 满足 $z=(1+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$（其中 i 为虚数单位），则 $|z|=$____________.

【答案】$\sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算求出复数 z，即可求得答案.

【详解】由题意得 $z=(1+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=-1+3\mathrm{i}$，

故 $|z|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$，

故答案为：$\sqrt{10}$

13. 某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节，则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为______（用数字作答）.

【答案】：$\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】三门文化课排列，中间有两个空，若每个空各插入 1 节艺术课，则排法种数为 $A_3^3A_3^2\times 2$，若两个空中只插入 1 节艺术课，则排法种数为 $A_3^3\cdot(A_2^1\cdot A_3^1)\cdot A_3^3=216$，三门文化课中相邻排列，则排法种数为 $A_3^3A_4^4=144$，