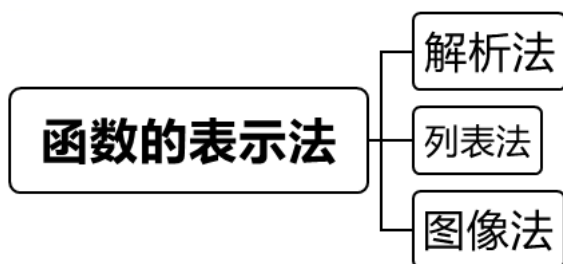


## 专题 12 函数的表示法



### 知识精讲

#### 知识点 01 解析法

1、解析法：用等式来表示一个变量与另一个变量之间函数关系的方法，这个等式称为函数

的解析式（或函数关系式）。简单明了，能从解析式了解函数与自变量之间的关系，便于理论上的分析与研究，但求对应值时需要逐个计算，且有的函数无法用解析式表示。

#### 【典例分析】

1. 某城市居民用水实行阶梯收费，每户每月用水量如果未超过 20 吨，按每吨 2.5 元收费。如果超过 20 吨，未超过的部分按每吨 2.5 元收，超过的部分按每吨 3.3 元收费。

(1) 设某户某月用水量为  $x$  吨 ( $x > 20$ )，应缴水费为  $y$  元，写出  $y$  关于  $x$  的函数关系式。

(2) 若该城市某户 6 月份用水 15 吨，该户 6 月份水费是\_\_\_\_\_。

(3) 某用户 8 月份水费为 76.4 元，求该用户 8 月份用水量。

**【答案】.** (1)  $y = 3.3x - 16$ ;

(2) 37.5 元;

(3) 该用户 8 月份用水量为 28 吨。

**【分析】** (1) 依题意，某户某月用水量为  $x$  吨 ( $x > 20$ )，则超过 20 吨的水量为  $(x - 20)$  吨，根据水费 = 每吨水的价格  $\times$  用水量，即可得出答案；

(2) 根据用水量如果未超过 20 吨，按每吨 2.5 元收费的标准代入公式：水费 = 每吨水的价格  $\times$  用水量，即可得出答案；

(3) 根据题意可知, 该用户用水超过 20 吨, 所以  $3.3x - 16 = 76.4$ , 解出方程即得出结论.

【详解】(1) 解: 某户某月用水量为  $x$  吨 ( $x > 20$ ), 则超过 20 吨的水量为  $(x - 20)$  吨, 依题意可得:  $y = 20 \times 2.5 + (x - 20) \times 3.3$ ,

整理后得:  $y = 3.3x - 16$ ;

答:  $y$  关于  $x$  的函数关系式为:  $y = 3.3x - 16$ ;

(2) 解: 依题意得:  $2.5 \times 15 = 37.5$  (元)

故答案为: 37.5 元

(3) 解: 若用水量为 20 吨, 则收费为:  $2.5 \times 20 = 50$  (元),

$Q 76.4 > 50$ ,

$\therefore$  该用户该月用水量超过了 20 吨,

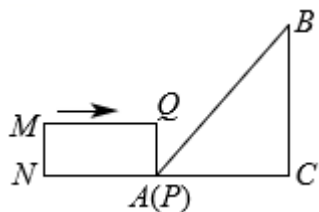
$\therefore 3.3x - 16 = 76.4$ ,

解得:  $x = 28$ ;

答: 该户 8 月份用水量为 28 吨.

【点睛】本题考查了列函数关系式, 求函数值, 正确得出函数的关系式是解题的关键.

2. 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 8\text{cm}$ , 矩形  $MNPQ$  的长和宽分别为 9cm 和 2cm, 点  $P$  和点  $A$  重合,  $NP$  和  $AC$  在同一条直线上 (如图所示),  $\text{Rt}\triangle ABC$  不动, 矩形  $MNPQ$  沿射线  $NP$  以每秒 1cm 的速度向右移动, 设移动  $x$  ( $0 < x \leq 9$ )s 后, 矩形  $MNPQ$  与  $\triangle ABC$  重叠部分的面积为  $y\text{cm}^2$ , 求  $y$  与  $x$  之间的函数关系式.

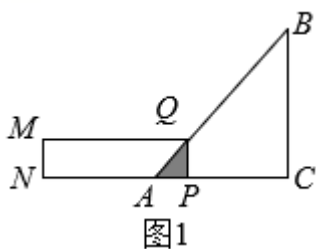


【答案】  $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (0 < x \leq 2) \\ 2x - 2 & (2 < x \leq 8) \\ 14 & (8 < x \leq 9) \end{cases}$

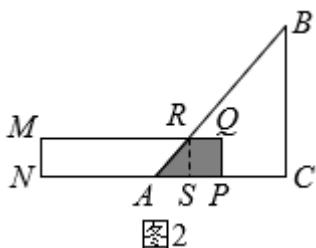
【分析】分图 1, 图 2, 图 3 三种情况, 利用三角形面积公式和梯形面积公式进行讨论求解即可.

【详解】运动过程中, 重叠部分图形的形状在发生改变, 重叠部分面积也随之而变化, 由此可知题目需进行以下分类讨论:

当  $0 < x \leq 2$  时，如图 1 所示，重叠部分为等腰直角三角形，腰长为  $x\text{cm}$ ，得：  $y = \frac{1}{2}x^2$ ；



当  $2 < x \leq 8$  时，如图 2 所示，重叠部分为直角梯形，梯形高即为矩形宽为  $2\text{cm}$ ，梯形下底长为  $x\text{cm}$ ，上底长为  $(x-2)\text{cm}$ ，得：  $y = \frac{1}{2}(x-2+x) \cdot 2 = 2x-2$ ；

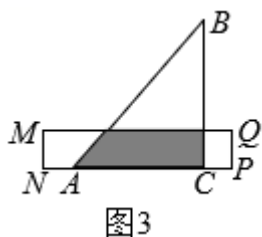


当  $8 < x \leq 9$  时，如图 3 所示，重叠部分为直角梯形，梯形高即为矩形宽为  $2\text{cm}$ ，梯形下底即为等腰直角三角形腰长  $8\text{cm}$  保持不变，则上底长为  $8-2=6\text{cm}$ ，得

$$y = \frac{1}{2}(6+8) \times 2 = 14 \text{ 保持不变.}$$

综上所述，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (0 < x \leq 2) \\ 2x-2 & (2 < x \leq 8) \\ 14 & (8 < x \leq 9) \end{cases}$$



**【点睛】** 本题主要考查了求函数关系式，掌握矩形的性质，等腰直角三角形的性质，利用分类讨论的思想求解是解题的关键。

## 知识点 02 列表法

1、列表法：用表格形式来表示一个变量与另一个变量之间函数关系的方法；从表格中直接

找到自变量对应的函数值，查找方便，但无法将自变量与函数值的全部对应值都列出来，且难以看出规律。

### 【典例分析】

3. 我们知道：“距离地面越高，气温就越低。”下表表示的是某地某时气温  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) 随高度  $h$  (km) 变化而变化的情况：

距离地面高度 (km)	0	1	2	3	4	5
温度 ( $^{\circ}\text{C}$ )	20	14	8	2	-4	-10

- (1) 上表中自变量是\_\_\_\_\_，因变量是\_\_\_\_\_；  
(2) 请说明温度是怎样随距离地面高度的增加而变化的；  
(3) 已知某山顶的气温为  $-22^{\circ}\text{C}$ ，求此山顶距离地面的高度。

**【答案】.** (1) 高度，温度.

(2) 温度随着距离地面高度的增加而降低.

(3) 7km

**【分析】** (1) 根据表格数据变化即可得出结果；

(2) 由表格中的数据变动可直接得出结果；

(3) 由表格可知当高度每上升 1km 时，温度下降  $6^{\circ}\text{C}$ ，然后计算即可.

**【详解】** (1) 解：上表反映了温度和高度两个变量之间的关系. 高度是自变量，温度是因变量.

故答案为：高度，温度；

(2) 解：由表格可知温度随着距离地面高度的增加而降低.

(3) 解：由表格可知当高度每上升 1km 时，温度下降  $6^{\circ}\text{C}$ ，

所以当高度为 6km 时，温度为  $-16^{\circ}\text{C}$ ，当高度为 7km 时，温度为  $-22^{\circ}\text{C}$ ，

所以此山顶距离地面的高度是 7km.

**【点睛】** 题目主要考查自变量与因变量及通过表格得出二者之间的关系，理解题意，根据表格数据得出相关信息是解题关键.

4. 某电动车厂 2014 年各月份生产电动车的数量情况如下表：

时间 $x$ /月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量 $y$ /万辆	8	8.5	9	10	11	12	10	9.5	9	10	10	10.5

- (1) 在这个过程中，自变量、因变量各是什么？

(2) 哪个月份电动车的产量最高？哪个月份电动车的产量最低？

(3) 哪两个月份之间产量相差最大？根据这两个月的产量，你对电动车厂的厂长有什么建议？

**【答案】.** (1) 在这个过程中，自变量是时间  $x$ 、因变量是月产量  $y$

(2) 6 月份电动车的产量最高，1 月份电动车的产量最低

(3) 1 月份和 6 月份之间产量相差最大，对电动车厂的厂长的建议是在 1 月份加紧生产，实现产量的增值

**【分析】** (1) 根据自变量、因变量的定义、以及月产量随着时间的变化而变化即可得；

(2) 根据表格找出  $y$  最大与最小的月份即可得；

(3) 由 (2) 即可得 1 月份和 6 月份之间产量相差最大，由此给出建议即可.

**【详解】** (1) 解：因为月产量随着时间的变化而变化，

所以在这个过程中，自变量是时间  $x$ 、因变量是月产量  $y$ .

(2) 解：由表格可知，当  $x=6$  时， $y$  最大；当  $x=1$  时， $y$  最小，即 6 月份电动车的产量最高，1 月份电动车的产量最低.

(3) 解：由 (2) 可知，1 月份和 6 月份之间产量相差最大，对电动车厂的厂长的建议是在 1 月份加紧生产，实现产量的增值.

**【点睛】** 本题考查了自变量和因变量、用表格表示变量间的关系，熟练掌握用表格表示变量间的关系是解题关键.

### 知识点 03 图像法

1、图像法：用图像来表示一个变量与另一个变量之间函数关系的方法；函数与自变量的

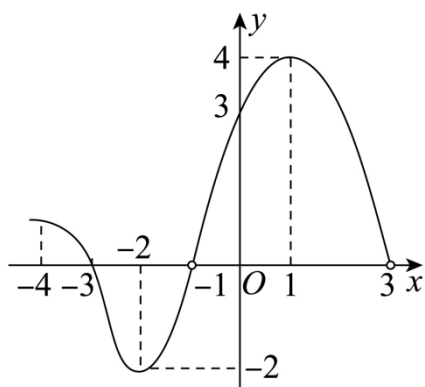
对应关系、函数的变化情况及趋势能够很直观地显示出来，但从图像上找自变量与函数的对应值一般只能是近似的，且只能反映出变量间关系的一部分而不是全体.

2、三种表示法的相互联系与转化：由函数的解析式画函数的图像，一般分为“列表、描点、

连线”三个步骤，通常称作描点作图法；同样，函数图像中点的坐标或表格中自变量与函数的对应值，也是函数解析式所表示的方程的一个解.

**【典例分析】**

5. 已知某一函数的图象如图所示，根据图象回答下列问题：



- (1)直接写出自变量  $x$  的取值范围；
- (2)直接写出函数  $y$  的取值范围；
- (3)当  $x=0$  时，直接写出  $y$  的值；
- (4)当  $y=0$  时，直接写出  $x$  的值；
- (5)随着  $x$  的变大， $y$  呈下降趋势时，直接写出  $x$  的取值范围.

**【答案】.** (1)  $-4 \leq x < 3$

(2)  $-2 \leq y \leq 4$

(3)  $y=3$

(4)  $x=-3$  或  $x=-1$

(5)  $-4 \leq x < -2$  或  $1 \leq x < 3$

**【分析】** (1) 根据函数图象写出自变量  $x$  的取值范围即可；

(2) 根据函数图象写出函数  $y$  的取值范围即可；

(3) 根据函数图象与  $y$  轴的交点，得出当  $x=0$  时， $y$  的值即可；

(4) 根据函数图象与  $x$  轴的交点，得出当  $y=0$  时， $x$  的值即可；

(5) 根据函数图象写出随着  $x$  的变大， $y$  呈下降趋势时， $x$  的取值范围即可.

(1)

解：根据图象可知，自变量  $x$  的取值范围为  $-4 \leq x < 3$ .

(2)

解：根据函数图象可知，函数  $y$  的取值范围  $-2 \leq y \leq 4$ .

(3)

解： $\because$  函数图象与  $y$  轴的交点为  $(0, 3)$ ,

$\therefore$  当  $x=0$  时， $y=3$ .

(4)

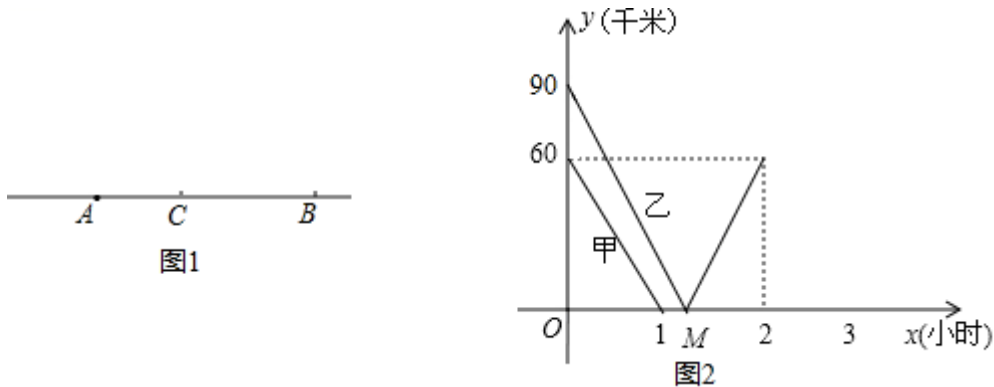
解： $\because$  函数图象与  $x$  轴的交点为  $(-3, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,

∴当  $y=0$  时,  $x=-3$  或  $x=-1$ .

(5)

解: 根据函数图象可知, 随着  $x$  的变大,  $y$  呈下降趋势时,  $x$  的取值范围为  $-4 \leq x < -2$  或  $1 \leq x < 3$ .

6. 如图 1, 一条笔直的公路上有  $A, B, C$  三地, 甲, 乙两辆汽车分别从  $A, B$  两地同时开出, 沿公路匀速相向而行, 驶往  $B, A$  两地, 甲、乙两车到  $C$  地的距离  $y_1, y_2$  (千米) 与行驶时间  $x$  (时) 的关系如图 2 所示.



(1)  $A, B$  两地之间的距离为\_\_\_\_千米;

(2) 图中点  $M$  代表的实际意义是什么?

(3) 分别求出甲, 乙两车的速度, 并求出他们的相遇点距离点  $C$  多少千米.

**【答案】.** (1)150

(2) 点  $M$  代表的实际意义是乙到达  $C$  的时间

(3) 甲车的速度为 60 千米/小时, 乙车的速度为 75 千米/小时, 他们的相遇点与点  $C$  的距离为  $\frac{20}{3}$  千米

**【分析】** (1) 由图象可知  $AC=60, CB=90$ , 据此来求解;

(2) 由图象可知点  $M$  代表的实际意义是乙到达  $C$  的时间;

(3) 根据图像分别解出甲车和乙车的速度, 用总路程除以甲乙两车的速度和就等于他们相遇的时间  $\frac{10}{9}$  小时, 再用乙车到达  $C$  点时的路程减去汽车行驶  $\frac{10}{9}$  小时的路程即为所求.

**【详解】** (1) 解: 由图象可知  $AC=60, BC=90$ ,

∴  $A, B$  两地距离为  $60+90=150\text{km}$ ;

∴  $A, B$  两地距离为 150 千米;

故答案为: 150.

(2) 解：由图象可知，点  $M$  代表的实际意义是：乙到达  $C$  的时间。

(3) 解：由图象可知：甲乙两车匀速运动， $AC=60$ ， $BC=90$ ，

$\therefore$ 甲车的速度： $60 \div 1 = 60$ (千米/小时)，

乙车的速度为： $150 \div 2 = 75$ (千米/小时)，

设经过  $x$  小时甲乙两车相遇，根据题意列方程，得

$$(60+75)x=150$$

解得  $x = \frac{10}{9}$ ；

由图像知已到达  $C$  的距离为 90 千米，那么

他们的相遇点与点  $C$  的距离为： $90 - 75 \times \frac{10}{9} = \frac{20}{3}$  (千米)。

$\therefore$ 他们的相遇点与点  $C$  的距离为  $\frac{20}{3}$  千米。

**【点睛】**此题考查了行程问题（一元一次方程的应用）和用图象表示变量间的关系，解题的关键是看清横轴、纵轴的含义，通过分析找到变量之间的关系求解。

## 综合训练

### 一、单选题

1. 半径是  $r$  的圆的周长为  $C = 2\pi r$ ，下列说法正确的是（ ）

- A.  $C$ ， $r$  是变量， $2\pi$  是常量  
B.  $C$  是变量， $2$ ， $r$  是常量  
C.  $C$  是变量， $\pi$ ， $r$  是常量  
D.  $C$ ， $\pi$  是变量， $2$  是常量

2. 科学研究表明，在弹簧的承受范围内，弹簧挂上物体后会伸长。某同学测得一弹簧的长度  $y$ (cm) 与所挂物体的重量  $x$ (kg) 之间的关系如下表所示：

$x$ (kg)	0	1	2	3	4	5
$y$ (cm)	20	20.5	21	21.5	22	22.5



下列说法不正确的是( ) A.  $x$  与  $y$  都是变量, 且  $x$  是自变量,  $y$  是因变量

B. 所挂物体的重量每增加  $1\text{kg}$ , 弹簧的长度增加  $0.5\text{cm}$

C.  $y$  与  $x$  的关系表达式是  $y = 0.5x$

D. 所挂物体的重量为  $3.6\text{kg}$  时, 弹簧的长度为  $21.8\text{cm}$

3. 在弹性限度内, 弹簧挂上物体后会伸长, 测得弹簧的长度  $y$  (cm) 与所挂物体的质量  $x$  (kg) 之间有如表关系:

$x$ (kg)	0	1	2	3	4	...
$y$ (cm)	10	10.5	11	11.5	12	...

下列说法不正确的是( ) A. 在弹性限度内,  $y$  随  $x$  的增大而增大

B. 在弹性限度内, 所挂物体质量每增加  $1\text{kg}$ , 弹簧长度增加  $0.5\text{cm}$

C. 在弹性限度内, 所挂物体为  $7\text{kg}$  时, 弹簧长度为  $13.5\text{cm}$

D. 不挂重物时弹簧的长度为  $0\text{cm}$

4. 图 1 中的摩天轮可抽象成一个圆, 圆上一点离地面的高度  $y$  (m) 与旋转时间  $x$  (min) 之间的关系如图 2 所示. 从图中获取的信息错误的是( )



图1

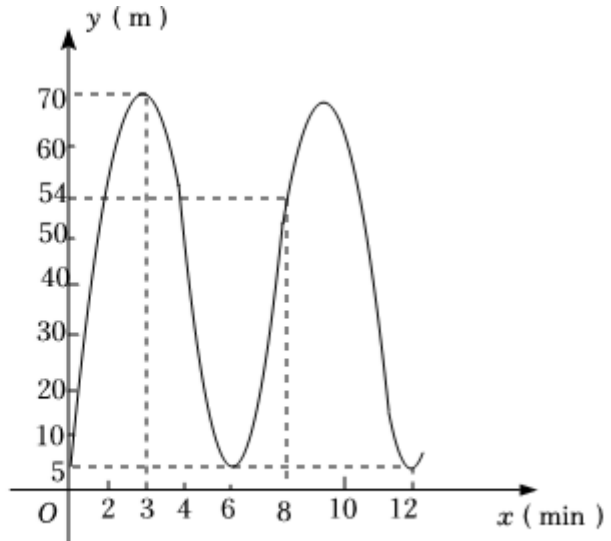


图2

A. 变量  $y$  是  $x$  的函数

B. 摩天轮转一周所用的时间是  $6\text{min}$

C. 摩天轮旋转  $8$  分钟时, 圆上这点离地面的高度是  $54\text{m}$

D. 摩天轮的半径是  $35\text{m}$

5. 一个蓄水池有水  $60\text{m}^3$ , 打开放水阀门匀速放水, 水池中的水量和放水时间的关系如下表, 下面说法不正确的是( )

放水时间 (min)	2	3	5	8	...
------------	---	---	---	---	-----

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/986153220200011020>