# 第三章 动量与角动量

- 牛顿第二定律强调了力产生加速度的瞬时性。

- 如果只关心运动的起点与终点的运动状态，是否有更加简洁的物理定律?
  - 对时间累计效果 动量定理
  - 对空间累计效果 动能定理

- 多个质点组成的质点系是否有类似定理成立?

- 质点转动是否有类似定理成立?

# §3.1 质点的动量定理

## 一、动量定理

我们从牛顿第二定律出发讨论力对时间的累积效果。

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

动量定理的微分形式

$$\vec{F}dt=d\vec{p}$$

定义了力在dt时间内的冲量 $d\vec{I}=\vec{F}dt$

质点在dt时间内所受到的合外力的冲量等于质点在dt时间内动量的增量。

当力持续了一段有限时间(从$t_1$到$t_2$)后

$$\int_{t1}^{t2}\vec{F}dt=\int_{\vec{p}1}^{\vec{p}2}d\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

等式左边定义了从$t_1$到$t_2$时间内力的冲量$I$

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t1}^{t2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

动量定理的**积分**形式

**动量定理** 合外力在给定的时间间隔内产生的冲量，等于质点在同一时间段内动量的增量。

**说明**

1 动量定理说明了冲量和质点运动状态改变(动量的改变)的关系。

2 冲量是由力和作用时间两个因素决定。

利用冲力：增大冲力，减小作用时间——冲床

避免冲力：减小冲力，增大作用时间——轮船靠岸时的缓冲

## 说明

3 冲量是一个矢量。 $\vec{I}=\int_{t1}^{t2}\vec{F}dt$

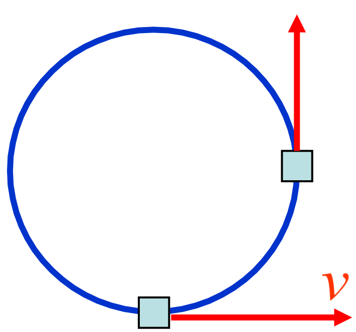
当力是恒定不变的时候，就变成了中学的公式。

当力是变力时，就需要小心了。

例子1：某力随时间t的表达式为**F**(t)=3t**i**+t²**j**，试写出t=0秒到t=1秒时间段内的冲量。

$$\vec{I}=\int_0^1(3t\vec{i}+t^2\vec{j})dt=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}$$

例子2：质量m的质点以速率v在水平面内做匀速圆周运动，求向心力在质点转过1/4圆弧时间内的冲量。




直接求吗？

$$\vec{I}=\vec{P}_2-\vec{P}_1 \qquad I=\sqrt{2}mv$$

方向？

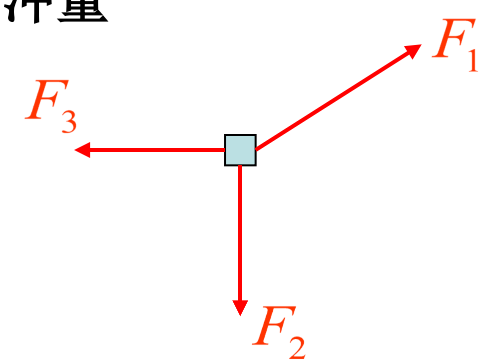
## 说明

4 当有多个外力作用，求合外力的冲量

$$I_x = \int_{t1}^{t2} F_x dt = p_{x2} - p_{x1}$$

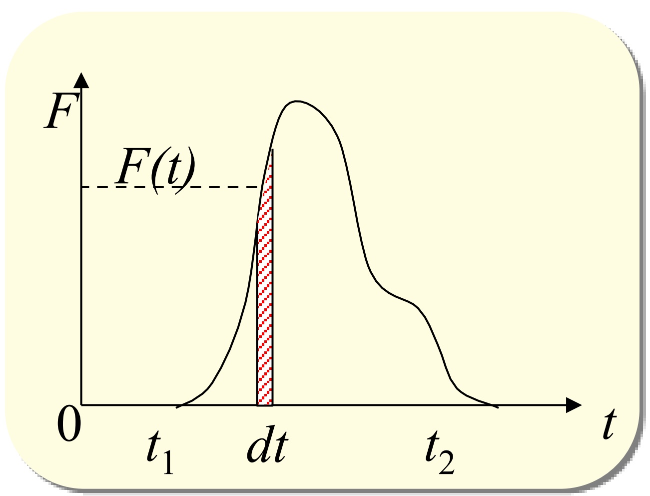
$$I_y = \int_{t1}^{t2} F_y dt = p_{y2} - p_{y1}$$

$$I_z = \int_{t1}^{t2} F_z dt = p_{z2} - p_{z1}$$



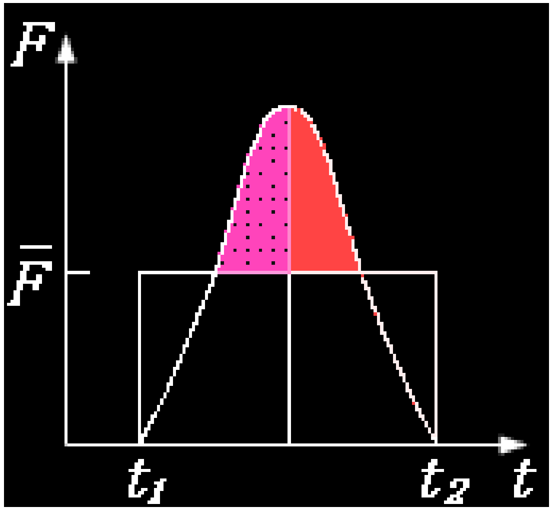

5 几何表示力的冲量

$$\vec{I} = \int_{t1}^{t2} \vec{F} dt$$



## 二、平均冲力

在碰撞问题中，物体所受的力(冲力)随时间变化很快，为了估算冲力大小，可以引入平均冲力的概念。




平均冲力的冲量 = 真实冲力的冲量

以冲力在$x$轴的分量$F$为例

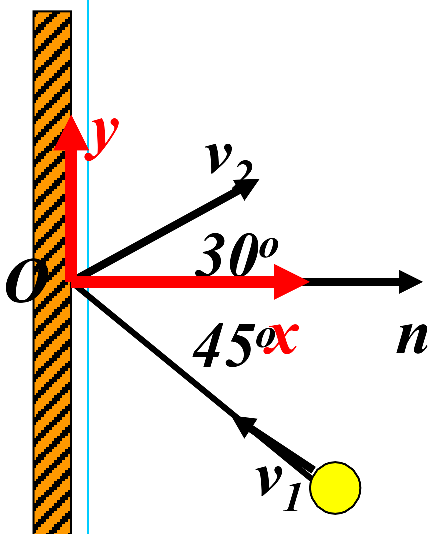
$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \overline{F}(t_2 - t_1)$$

$$\overline{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{t_2 - t_1}$$

$$\overline{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{t_2 - t_1} = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1}$$

实验上很难测出冲力，往往是利用动量定理来计算平均冲力的。

例1、如图，质量为2.5g的乒乓球以20m/s的速率飞来，被板推挡后，又以10m/s的速率飞出，如果必须考虑板与球间的摩擦力。设两速度在垂直于板面的同一平面内，且它们与板面法线的夹角分别为45度和30度，求：（1）乒乓球得到的冲量；（2）若撞击时间为0.01s，求板施于球的平均冲力F的大小和方向。




解：取挡板和球为研究对象，由于作用时间很短，忽略重力影响。由动量定理：

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$I_x = mv_2\cos 30^\circ - (-mv_1)\cos 45^\circ = \overline{F}_x \Delta t$$

$$I_y = mv_2\sin 30^\circ - mv_1\sin 45^\circ = \overline{F}_y \Delta t$$

代入已知数据，计算得到冲量和力的分量：

$$I_x = 0.061\text{Ns} \qquad I_y = 0.007\text{Ns}$$

$$\overline{F}_x = 6.1\text{N} \quad \overline{F}_y = 0.7\text{N}$$

方向用与x夹角表示：

$$\overline{F} = \sqrt{\overline{F}_x^2 + \overline{F}_y^2} = 6.14\text{N} \qquad \tan\alpha = F_x / F_y = 0.1148$$

*板子倾斜怎么做？*

## § 3.2 质点系的动量定理

**质点系** 由多个质点组成的系统称为质点系。

**内力与外力** 质点受到质点系以外施加的力称为外力，受到的质点系内其它质点施加的力称为内力。

质点系也有一个形式简洁的动量定理。我们验证如下：

每一个质点的动量定理

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_1 dt = \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_2 dt = \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}$$

$$\vdots$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_N dt = \vec{p}_{Nf} - \vec{p}_{Ni}$$

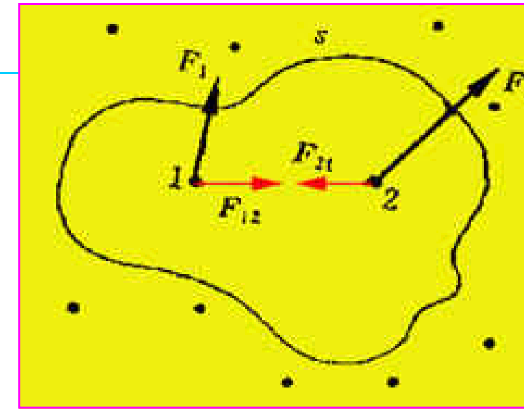
全部相加 ⟹

$$\int_{t_i}^{t_f} (\vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_N) dt =$$

$$= (\vec{p}_{1f} + \cdots + \vec{p}_{Nf}) - (\vec{p}_{1i} + \cdots + \vec{p}_{Ni})$$

$$= \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

质点系动量的增量。




接下来化简等号左边力的求和形式

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1外} + \vec{F}_{1内}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2外} + \vec{F}_{2内}$$

$$\vdots$$

$$\vec{F}_N = \vec{F}_{N外} + \vec{F}_{N内}$$

全部相加

$$(\vec{F}_{1外} + \cdots + \vec{F}_{N外}) + (\vec{F}_{1内} + \cdots + \vec{F}_{N内})$$

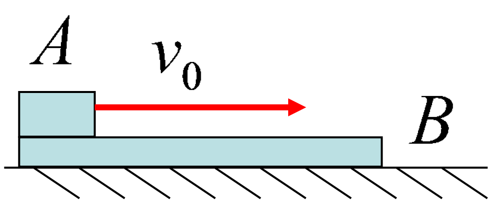
质点系的内力实际上是作用力与反作用力，所以内力求和为零。

$$\boxed{\int_{t_i}^{t_f} (\vec{F}_{1外} + \cdots + \vec{F}_{N外})dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i}$$

质点系动量定理

质点系所受合外力的冲量等于系统内质点动量之和的增量，即质点系总动量的增量。

例1、木板B静止置于水平台面上，小木块A放在B板的一端上，如图所示。已知mA=0.25kg，mB=0.75kg，小木块A与木板B之间的摩擦因数u1=0.5，木板B与台面间的摩擦因数u2=0.1。现在给小木块A一向右的水平初速度v0=40m/s，问经过多长时间A、B恰好具有相同的速度？（设B板足够长。）




列出AB系统的动量定理：

$$-F_k\Delta t = (m_A + m_B)v - m_A v_0$$

$$F_k = \mu_2(m_A + m_B)g$$

再列出A的动量定理

$$-f\Delta t = m_A v - m_A v_0$$

$$f = \mu_1 m_A g$$

可解出末速度

$$v = \left(\frac{m_A\mu_1}{m_A + m_B} - \mu_2\right)\cdot\frac{v_0}{\mu_1 - \mu_2} = 2.5m/s$$

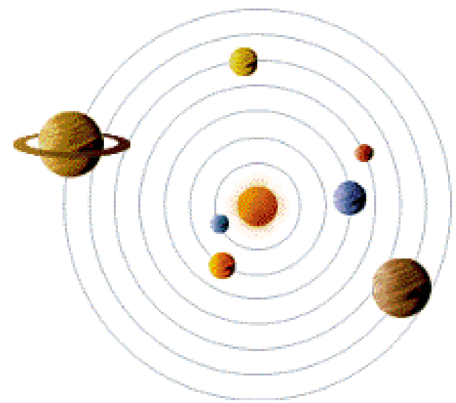
时间 $$\Delta t = \frac{v_0 - v}{\mu_1 g} = 7.65s$$

# §3.3 动量守恒定律

## 一、动量守恒定律

当质点系所受合外力为零时(或合外力的冲量为零)，系统的总动量保持不变。

$$若F=0(或I=0)则\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=恒矢量$$



**说明**

1 质点系总动量守恒，但系统中各质点动量可以改变。动量通过内力在系统内重新分配，一个质点的动量减少一定等于其余质点动量的增加。

2 守恒条件F=0很严格，真实系统在碰撞与爆炸过程中可以认为系统总动量守恒(外力远小于内力)。

## §3.3 动量守恒定律

**说明**

3 动量守恒是矢量式子。

$$P_x = \sum m_i v_{ix} = C_x \qquad F_x = 0$$

$$P_y = \sum m_i v_{iy} = C_y \qquad F_y = 0$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = C_z \qquad F_z = 0$$

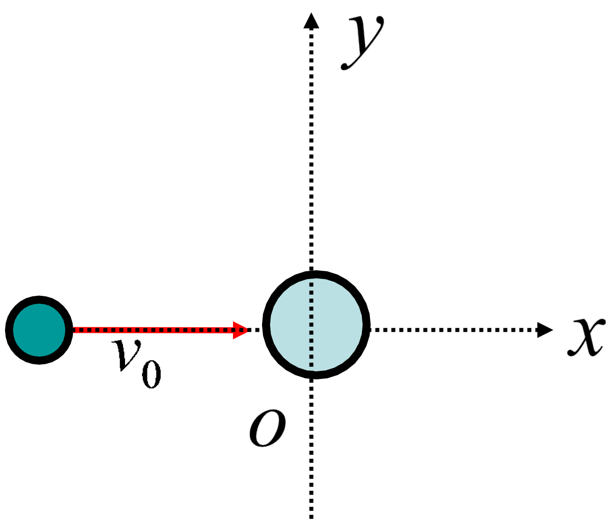
如果合外力不为零，但是某一个方向上的分量为零，那么在这一个方向上也有动量的分量保持守恒。

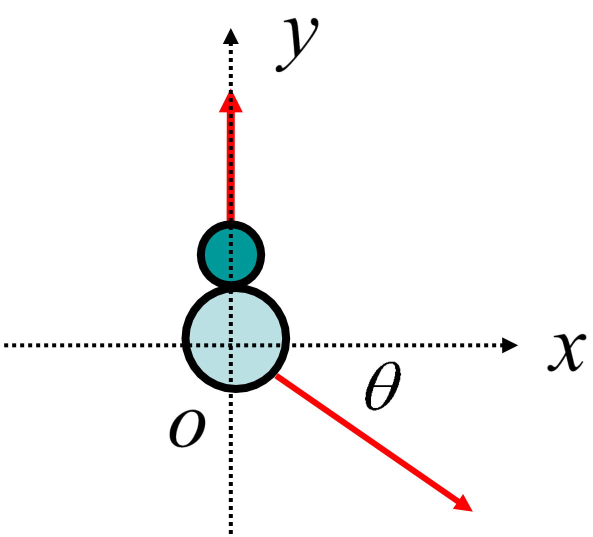
4 动量守恒只对惯性系成立，是物理学中最普遍、最基本的定律之一。

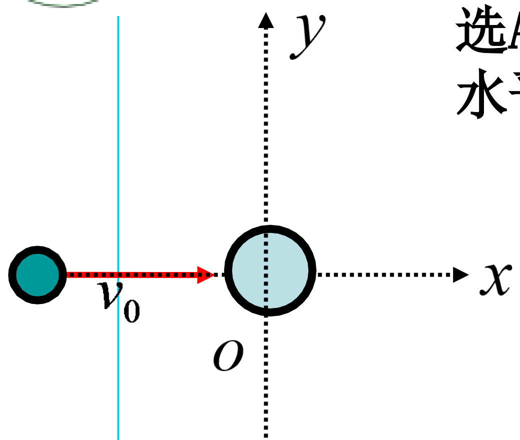
例1、质量为m1的小球A以速度v0沿着x轴正方向运动，与另一质量为m2的静止小球B在水平面内碰撞，碰后球A沿着y轴正方向运动，B的运动方向与x轴成θ角度，如图所示。求

(1)碰撞后AB的速率为多少？

(2)若碰撞时间为Δt，求A受到的平均冲力？



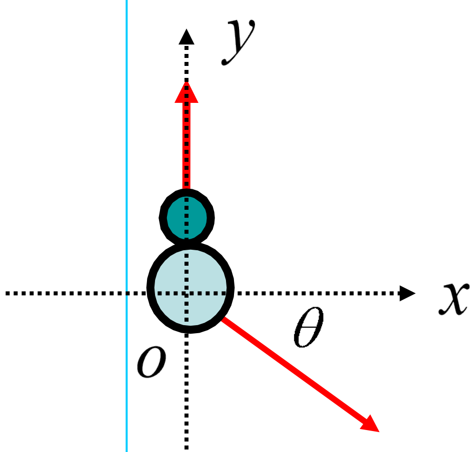



选AB球为系统，在水平面内不受外力，系统动量守恒，在水平面内建立XY系，列出两个轴上的动量守恒式子：

$$m_1 v_0 = m_2 v_2 \cos\theta$$

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin\theta$$

$$v_1 = v_0 \tan\theta \qquad v_2 = \frac{m_1 v_0}{m_2 \cos\theta}$$

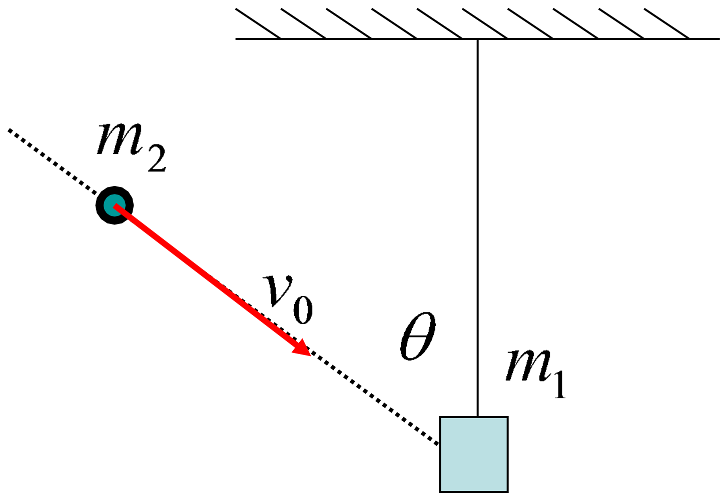



要求A球所受冲力，可以A球的动量定理即可。列出两个轴上的动量定理：

$$F_x = \frac{0 - m_1 v_0}{\Delta t} = -\frac{m_1 v_0}{\Delta t} \qquad F_y = \frac{m_1 v_1 - 0}{\Delta t} = \frac{m_1 v_0 \tan\theta}{\Delta t}$$

$$\vec{F} = -\frac{m_1 v_0}{\Delta t}\vec{i} + \frac{m_1 v_0 \tan\theta}{\Delta t}\vec{j}$$

例2、如图所示，一轻绳悬挂质量为m1的沙袋静止下垂，质量为m2的子弹以速率v0和竖直方向成θ角射入沙袋不再出来，求子弹与沙袋一起开始运动时的速度。




m1 m2系统是否有动量守恒？

分析受力情况。

## 二、碰撞过程中的动量守恒

两个或两个以上的物体相遇，且相互作用持续一个极短暂的时间——碰撞。物体间的相互作用是突发性，持续时间极短。作用力峰值极大，碰撞符合动量守恒定律的适用条件。碰撞过程中物体会产生形变。

接触阶段： 两球对心接近运动

形变产生阶段： 两球相互挤压，最后两球速度相同(动能转变为势能)

形变恢复阶段： 在弹性力作用下两球速度逐渐不同而分开运动(势能转变为动能)

分离阶段： 两球分离，各自以不同的速度运动

- 完全弹性碰撞（两体分开）： 系统动能守恒,动量守恒。
- 非完全弹性碰撞（两体分开） ： 系统动能不守恒，动量守恒。
- 完全非弹性碰撞（两体合一） ： 系统以相同的速度运动（二体合一），动量守恒。

# §3.4 角动量 质点的角动量定理

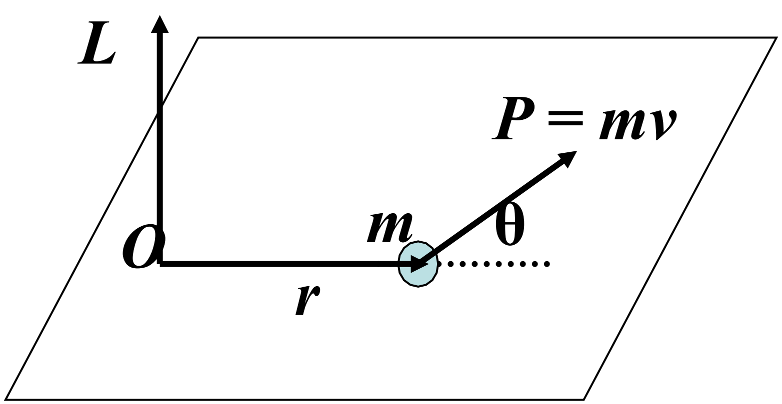
## 一、质点的角动量 Angular Momentum

- 为了描述质点相对于某一定点做转动的惯性或则说转动效果时，用动量描述来描述是不方便的。必须入新物理量：角动量。

- 定义：

  假设质量为m的质点，在某一时刻相对参考点O的位置矢量为 r，速度为v，则相对O点的角动量L是该质点位置矢量与动量的矢量积。

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$




角动量的大小：

$$L = r \cdot p \cdot \sin\theta = rmv\sin\theta$$

方向：

右手螺旋定则