2023-2024 学年高三上册数学期末模拟试卷 9

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

第 I 卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1．若集合 $A=\{x \mid x=4k-3, k\in \mathbb{N}\}$，$B=\{x \mid (x+3)(x-9)\le 0\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2．复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $\frac{1}{\bar{z}}=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　C．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2$，且 $|\vec{b}|=1$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为（　　）

A．1　　B．-1　　C．$\vec{b}$　　D．$-\vec{b}$

4．科技是一个国家强盛之根，创新是一个民族进步之魂，科技创新铸就国之重器，极目一号（如图 1）是中国科学院空天信息研究院自主研发的系留浮空器．2022 年 5 月，“极目一号”III 型浮空艇成功完成 10 次升空大气科学观测，最高升空至 9050 米，超过珠穆朗玛峰，创造了浮空艇大气科学观测海拔最高的世界纪录，彰显了中国的实力．“极目一号”III 型浮空艇长 55 米，高 19 米，若将它近似看作一个半球、一个圆柱和一个圆台的组合体，正视图如图 2 所示，则“极目一号”III 型浮空艇的体积约为（　　）

（参考数据：$9.5^2\approx 90$，$9.5^3\approx 85$…，$\frac{315}{1995}$…≈ 31660…，$\pi\approx 3.14$）

A．9064m^3　　B．9004m^3　　C．8944m^3　　D．8884m^3

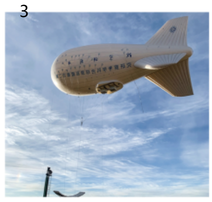


图1

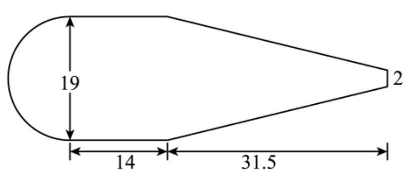
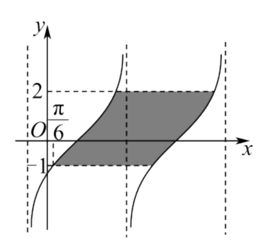


图2

5．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S=1$，且 $\frac{S_2}{2}-\frac{S_4}{4}=-1$，则 $S=$（　　）

A．25　　B．45　　C．55　　D．65

6．函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像如图所示，图中阴影部分的面积为 6π，则 $\varphi=$（　　）



A．$-\frac{\pi}{3}$　　B．$-\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{5\pi}{12}$

7．已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，焦距为 4，若过点 F_1 且倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线与双曲线的左、右支分别交于 A，B 两点，$S_{\triangle ABF_2}=2S_{\triangle AF_1F_2}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8．对任意的 x 0, ，不等式 e^x e^a x a x^2 e 2ln a a 1 0 恒成立，则实数 a 的取值集合是（　　）

A．

B．$\sqrt{2}$

C．$\frac{1}{2}$,

D．$\sqrt{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知圆 M $(x-4)^2+(y-5)^2=12$，直线 l: $mx-y-2m+3=0$，直线 l 与圆 M 交于 A，C 两点，则下列说法正确的是（　　）

A．直线 l 恒过定点 $(2,3)$

B．$|AC|$ 的最小值为 4

C．$\overrightarrow{MA}$ 的取值范围为 $[12,4]$

D．当 $\angle AMC$ 最小时，其余弦值为 $\frac{1}{2}$

10．有 3 台车床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率 5%，第 2，3 台加工的次品率均 3%，加工出来的零件混放在一起，第 1，2，3 台车床加工的零件数分别占总数的 15%，25%，60%．随机取一个零件，记 A “零件为次品”，B_i “零件为第 i 台车床加工”（$i=1$，2，3），下列结论正确的有（　　）

A．$P(A)=0.03$

B．$\sum_{i=1}^{3}P(B_i)=1$

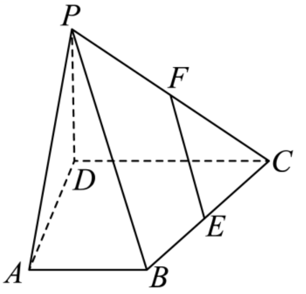
C．$P(B_1|A)=P(B_2|A)$

D．$P(B_1|A)+P(B_2|A)=P(B_3|A)$

11．已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1, x\le 0\\ \frac{x}{e^x}, x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $4e^2f^2(x)-af(x)+\frac{1}{e}=0$ 恰好有 6 个不同的实数解，则 a 的取值可以是（　　）

A．$\frac{17}{4}$　　B．$\frac{19}{4}$　　C．$\frac{21}{4}$　　D．$\frac{23}{4}$

12．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel CD$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，$PD=CD=2AB=2$，$AD=\sqrt{3}$，点 E 为边 BC 的中点，点 F 为棱 PC 上一动点（异于 P、C 两点），则下列判断中正确的是（　　）.



A．直线 EF 与直线 AP 互为异面直线

B．存在点 F，使 $EF//$ 平面 PAD

C．存在点 F，使得 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

D．直线 EF 与直线 AD 所成角的余弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分,其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分．

13．已知向量 $\vec{a}$ □ 2,3□，$\vec{b}$ □ □3, 2□，写出一个与 $\vec{a}$ □ $\vec{b}$ 垂直的非零向量 $\vec{c}$ □______．

14．2023 年春节期间，电影院上映《满江红》《流浪地球 2》《熊出没·伴我“熊芯”》等多部电影，这些电影涵盖了悬疑、科幻、动画等多类型题材，为不同年龄段、不同圈层的观众提供了较为丰富的观影选择.某居委会有 6 张不同的电影票，奖励给甲、乙、丙三户“五好文明家庭”，其中一户 1 张，一户 2 张，一户 3 张，则共有______种不同的分法.

15．$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，其 a □ ，$\sin A\sin B$ □ $\sin A\sin C$ □ $\sin B\sin C$，则 b □ c 的最小值为____________.

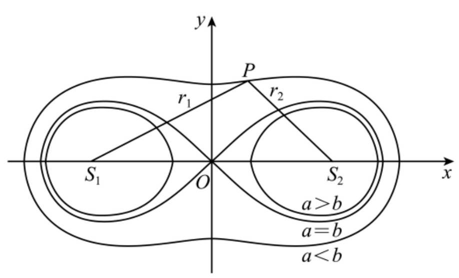
16．Cassini 卵形线是由法国天文家 Jean—Dominique Cassini（1625—1712）引入的．卵形线的定义：线上的任何

点到两个固定点 S_1，S_2 的距离的乘积等于常数 b^2．b 是正常数，设 S_1，S_2 的距离为 $2a$，如果 a □ b，就得到一个没

有自交点的卵形线；如果 a □ b，就得到一个双纽线；如果 a □ b，就得到两个卵形线．若 S_1 □ 0, □2□，S_2 □ 0, 2□．动

点 P 满足 $\left|PS_1\right|\left|PS_2\right|$ □ 4．则动点 P 的轨迹 C 的方程为______；若 A_1 和 A_2 是轨迹 C 与 y 轴交点中距离最远的两点，

则 $\triangle A_1PA_2$ 面积的最大值为______．



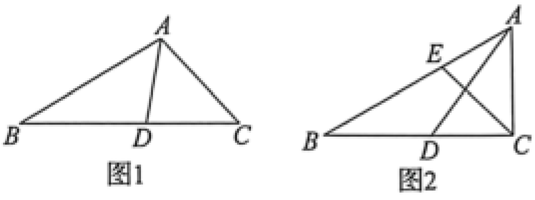
四、解答题：本小题共 6 小题，共 70 分，其中第 17 题 10 分，18~22 题 12 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$，前 n 项和 S_n 满足 a_n^2 □ $2S_n$ □ a_n $(n\in \mathrm{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)记 P_n 是数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和，Q_n 是数列 $\left\{\frac{1}{a_{2^{n-1}}}\right\}$ 的前 n 项和.当 n □ 2 时，试比较 P_n 与 Q_n 的大小.

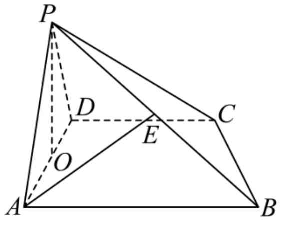
18．在VABC中，D是边 BC 上的点，AD 平分□ BAC，△ABD 的面积是V ACD 的面积的两倍.



(1)如图 1，□BAC□120□，且$|AD|$□，求VACD的面积；

(2)如图 2，若点 E在边 AB 上，且$|BC|$□$\sqrt{3}|AC|$，$|AE|$□$\dfrac{\sqrt{3}□1}{2}|AB|$，求 tan □$BCE$的值.

19．在四棱锥 P □ $ABCD$ 中，平面PAD□平面$ABCD$，PA□ PD，C为AD的中点.



(1)求证：PO□ BC；

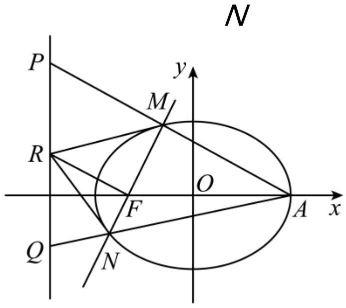
(2)若$AB//CD$，AB□ o，AD□ DC□ CB□4，PO□$2\sqrt{7}$，点 E在棱 PB 上，直线 AE与平面 $ABCD$所成角为$\dfrac{\pi}{6}$，求点 E到平面 PCD 的距离.

20．根据教育部的相关数据，预计 2022 年中国大学毕业生将达到 1076 万人，比 2021 年增长 167 万人，规模和数量将创历史新高．国家对毕业生就业出台了许多政策，某公司积极响应国家政策决定招工 400 名(正式工 280 名，临时工 120 名)，有 2500 人参加考试，考试满分为 450 分，考生成绩符合正态分布．考生甲的成绩为 270 分，考生丙的成绩为 430 分，考试后不久甲仅了解到如下情况：此次测试平均成绩为 171 分，351 分以上共有 57 人．(1)请用你所学的统计知识估计甲能否被录用，如录用能否被录为正式工?

(2)考生乙告诉考生丙：“这次测试平均成绩为 201 分，351 分以上共有 57 人．”请结合统计学知识帮助丙同学辨别乙同学信息的真伪，并说明理由．附：

$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6828$；$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9544$；$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9974$．

21．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的右顶点为 A，左焦点为 F，过点 F 作斜率不为零的直线 l 交椭圆于 M，N 两点，连接 AM，AN 分别交直线 $x=-\frac{9}{2}$ 于 P，Q 两点，过点 F 且垂直于 MN 的直线交直线 $x=-\frac{9}{2}$ 于点 R．



(1)求证：点 R 为线段 PQ 的中点；

(2)记 $\triangle MPR$，$\triangle MRN$，$\triangle NRQ$ 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，试探究：是否存在实数 λ 使得 $\lambda S_2=S_1+S_3$？若存在，请求出实数 λ 的值；若不存在，请说明理由．

22．已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}+ax$，函数 $g(x)=\frac{\ln 2x}{x}+\frac{a^{-x}}{2x^{2}}-\frac{2}{e}^{x}+1$.

(1)当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)已知 $a=\frac{1}{\ }$，$e^{x}>\frac{1}{x}$，求证：$g(x)>0$；

(3)已知 n 为正整数，求证：$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\ln 2$.

答案解析

第 I 卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1．若集合 $A=\{x\mid x=4k-3,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid (x+3)(x-9)\le 0\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】C

【详解】由题意得，$A=\{x\mid x=4k-3,k\in\mathbf{N}\}=\{-3,1,5,9,13,17,\cdots\}$，$B=\{x\mid -3\le x\le 9\}$，

故 $A\cap B=\{-3,1,5,9\}$，即 $A\cap B$ 共有 4 个元素，

故选：C．

2．复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，则 $\frac{1}{z}=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$　　　　B．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$　　　　C．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$　　　　D．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

【答案】B

【详解】由题意得 $\frac{1}{z}=\frac{2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{2-2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，

故选：B.

3．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2$，且 $|\vec{b}|=1$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为（　　）

A．1　　　　B．-1　　　　C．$\vec{b}$　　　　D．$-\vec{b}$

【答案】C

【详解】因为 $|\vec{b}|=1$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

所以，向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{1}\times\frac{\vec{b}}{1}=\vec{b}$.

故选：C．

4．科技是一个国家强盛之根，创新是一个民族进步之魂，科技创新铸就国之重器，极目一号（如图 1）是中国科学院空天信息研究院自主研发的系留浮空器．2022 年 5 月，“极目一号”III 型浮空艇成功完成 10 次升空大气科学观测，最高升空至 9050 米，超过珠穆朗玛峰，创造了浮空艇大气科学观测海拔最高的世界纪录，彰显了中国的实力．“极目一号”III 型浮空艇长 55 米，高 19 米，若将它近似看作一个半球、一个圆柱和一个圆台的组合体，正视图如图 2 所示，则“极目一号”III 型浮空艇的体积约为（　　）

（参考数据：$9.5^2\approx 9$…，9.5…≈ 85…，$\frac{315}{1005}$…≈ 31660…，$\pi\approx 3.1$…）

图1

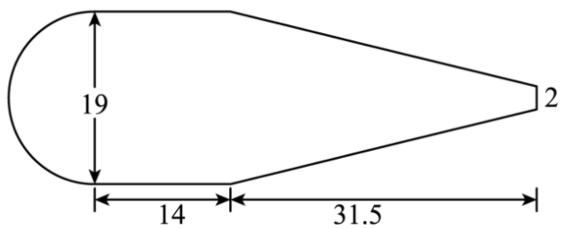


图2

A．9064m^3　　B．9004m^3　　C．8944m^3　　D．8884m^3

【答案】A

【详解】由图2得半球、圆柱底面和圆台一个底面的半径为 $R=\frac{19}{2}=9.5$（m），而圆台一个底面的半径为 $r=1$（m），

则 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times9.5^3=\frac{171}{3}\pi$（$m^3$），

$V_{圆柱}=\pi\times9.5^2\times14=1260\pi$（$m^3$），

$V_{圆台}=\frac{1}{3}\times(\pi\times9.5^2+\sqrt{9.5^2\pi\times\pi}+\pi)\times31.5=\frac{316}{3}\pi$（$m^3$），

所以 $V=V_{半球}+V_{圆柱}+V_{圆台}=\frac{171}{3}\pi+1260\pi+\frac{316}{3}\pi\approx9064$（$m^3$）.

故选：A．

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_1=1$，且$\frac{S_2}{2}-\frac{S_4}{4}=\frac{1}{4}$，则$S_5=$（　　）

A．25　　B．45　　C．55　　D．65

【答案】D

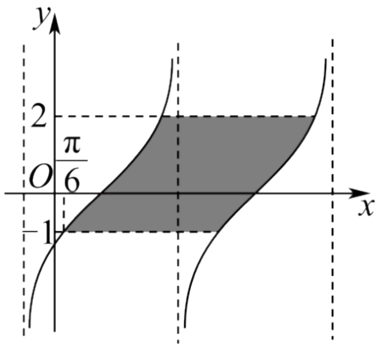
【详解】由等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，设其公差为$d$，

由$\frac{S_2}{2}-\frac{S_4}{4}=\frac{1}{4}$，知$\frac{S_3}{3}-\frac{S_3}{3}=\frac{S_1}{1}+2d-(\ \ )-2d=\ \ 3$，

所以$\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)d=1+(n-1)\times3=3n-2$，所以$S_n=3n^2-2n$，所以$S_5=65$，

故选：D．

6．函数$f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图像如图所示，图中阴影部分的面积为$6\pi$，则$\varphi=$（　　）



A．$-\frac{\pi}{3}$　　　B．$-\frac{\pi}{4}$　　　C．$\frac{\pi}{6}$　　　D．$\frac{5\pi}{12}$

【答案】A

【详解】如图所示，区域①和区域③面积相等，故阴影部分的面积即为矩形$ABCD$的面积，可得$AB=3$，

设函数$f(x)$的最小正周期为T，则$AD=T$，

由题意可得：$3T=6\pi$，解得$T=2\pi$，

故$\frac{\pi}{\omega}=2\pi$，可得$\omega=\frac{1}{2}$，

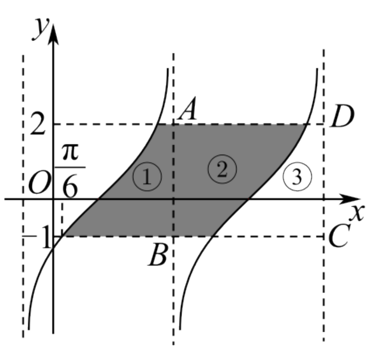
即$f(x)=1+\tan\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$，

可知$f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，即$\tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=-1$，

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\pi}{12}+\varphi\in\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，

$\therefore \frac{\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{4}$，解得$\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

故选：A.



7．已知F_1，F_2分别是双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，焦距为4，若过$F_1$且倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线与双曲线的左、右支分别交于A，$B$两点，$S_{\triangle ABF_2}=2S_{\triangle AF_1F_2}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【详解】因为 $S_{\triangle ABF_2}=2S_{\triangle AF_1F_2}$，$\frac{1}{2}h|AB|=2\cdot\frac{1}{2}h|AF_1|$，解得 $|AB|=2|AF_1|$

设 $|AF_1|=t$，$|AF_2|=t+2a$，$|BF_1|=3t$，$|BF_2|=3t+2a$

根据题意可知 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t-2,\frac{t}{2}\right)$，$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}t-2,-\frac{3t}{2}\right)$

设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，设 $P(x_0,y_0)$，

若 P 点在双曲线的左支上，则双曲线的焦半径为：$|PF_1|=-ex_0-a$，$|PF_2|=-ex_0+a$，

由题意可得 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，所以 $|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}$

根据 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ 变形得 $y_0^2=b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)$，

所以 $|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)}=\sqrt{(x_0+c)^2+(c^2-a^2)\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)}$

$=\sqrt{x_0^2+2cx_0+c^2+\frac{c^2}{a^2}x_0^2-x_0^2-c^2+a^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}$

$=\left|\frac{c}{a}x_0+a\right|=-ex_0-a$

故 $|PF_1|=-ex_0-a$，同理可得 $|PF_2|=-ex_0+a$，

同理可得，若 P 点在双曲线的右支上，则双曲线的焦半径为：$|PF_1|=ex_0+a$，$|PF_2|=ex_0-a$，

根据双曲线焦半径公式可得：$|AF_1|=-ex_A-a=2e+\frac{\sqrt{3}}{2}et-a$，$|AF_2|=-ex_A+a=2e+\frac{\sqrt{3}}{2}et+a$；

$|BF_1|=ex_B+a=-2e+\frac{3\sqrt{3}}{2}et+a$，$|BF_2|=ex_B-a=-2e+\frac{3\sqrt{3}}{2}et-a$，

$|AF_1|+|BF_1|=\sqrt{3}et=4t$，解得 $e=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

故选：C

8．对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $\left(e^x-e^a+x-a\right)\left(x^2-e^{1-x}-2\ln a+a-1\right)\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值集合是（　　）

A．$\{1\}$　　　　B．$[\sqrt{2},+\infty)$

C．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　　　D．$\{\sqrt{2}\}$

【答案】A

【详解】由题意，知 $a>0$，令 $f(x)=e^x+x-e^a-a$，$x>0$，则 $f'(x)=e^x+1>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，易知 $f(a)=0$，

所以当 $x>a$ 时，$f(x)>0$；当 $0<x<a$ 时，$f(x)<0$.

令 $g(x)=x^2-e^{-x}-2\ln a-a+1$，

则对任意的 $x>0$，不等式 $(e^x-e^a)(x-a)(x^2-e^{1-x}-2\ln a-a+1)\geq 0$ 恒成立，

等价于当 $x>a$ 时，$g(x)\geq 0$，当 $0<x<a$ 时，$g(x)\leq 0$.

当 $x>0$ 时，$g'(x)=2x+e^{-x}>0$，则函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=a$ 是 $g(x)=x^2-e^{-x}-2\ln a-a+1$ 的零点，即 $a^2-e^{-a}-2\ln a-a+1=0$，

即 $a^2-2\ln a-e^{1-a}=a$，即 $e^{2\ln a}-2\ln a-e^{1-a}=a$.

构造函数 $h(t)=e^t-t$，$h'(t)=e^t+1>0$，函数 $h(t)$ 在 R 上单调递增，

由 $e^{2\ln a}-2\ln a=e^{1-a}-a$，得 $h(2\ln a)=h(1-a)$，所以 $2\ln a=1-a$，即 $2\ln a+a-1=0$，

令 $\varphi(a)=2\ln a+a-1$，则 $\varphi'(a)=\frac{2}{a}+1>0$，函数 $\varphi(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

易知 $\varphi(1)=0$，故 $a=1$.

故选：A.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知圆 $M:(x-4)^2+(y-5)^2=12$，直线 $l:mx+y-2m-3=0$，直线 l 与圆 M 交于 A，C 两点，则下列说法正确的是（　　）

A．直线 l 恒过定点 $(2,3)$

B．$|\overrightarrow{AC}|$ 的最小值为 4

C．$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的取值范围为 $[-12,4]$

D．当 $\angle AMC$ 最小时，其余弦值为 $\frac{1}{2}$

【答案】ABC

【详解】A.直线 $l:mx+y-2m-3=0$，即 $m(x-2)+y-3=0$，直线恒过点 $(2,3)$，故 A 正确；

B.当定点 $(2,3)$ 是弦 AC 的中点时，此时 $|AC|$ 最短，圆心 $M(4,5)$ 和定点 $(2,3)$ 的距离时 $2\sqrt{2}$，此时

$|AC|=2\sqrt{12-(2\sqrt{2})^2}=4$，故 B 正确；

C.当 $|AC|$ 最小时，$\angle AMC$ 最小，此时 $\cos\angle AMC=\frac{12+12-16}{2\times 12}=\frac{1}{3}$，此时

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MC}|\cos\angle AMC=12\times\frac{1}{3}=4$，当 $|AC|$ 是直径时，此时 $\angle AMC$ 最大，$\angle AMC=\pi$，此时

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MC}|\cos\angle AMC=12\times(-1)=-12$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的取值范围为 $[-12,4]$，故 C 正确；

D.根据 C 可知当 $\angle AMC$ 最小时，其余弦值为 $\frac{1}{3}$，故 D 错误.

故选：ABC