绝密★启用前

冲刺2023年高考数学真题重组卷01

新高考地区专用（解析版）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.（2022年高考北京卷）已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x|-2<x\le 1\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A．$(-2,1]$　　B．$(-3,-2)\cup[1,3)$　　C．$[-2,1)$　　D．$(-3,-2]\cup(1,3)$

D【解析】利用补集的定义可得正确的选项.

【详解】由补集定义可知：$\complement_U A=\{x|-3<x\le -2$或$1<x<3\}$，即$\complement_U A=(-3,-2]\cup(1,3)$，

故选：D.

2．（2022年高考全国乙卷）已知$z=1-2i$，且$z+a\bar{z}+b=0$，其中a，b为实数，则（　　）

A．$a=1,b=-2$　　B．$a=-1,b=2$　　C．$a=1,b=2$　　D．$a=-1,b=-2$

A【解析】先算出$\bar{z}$,再代入计算,实部与虚部都为零解方程组即可

【详解】$z=1-2i$

$z+a\bar{z}+b=1-2\mathrm{i}+a(1+2\mathrm{i})+b=(1+a+b)+(2a-2)\mathrm{i}$

由$z+a\bar{z}+b=0$,结合复数相等的充要条件为实部、虚部对应相等，

得$\begin{cases}1+a+b=0\\2a-2=0\end{cases}$,即$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$

故选:A

3.（2022年全国高考全国II）已知向量$\vec{a}=(3,4),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若$<\vec{a},\vec{c}>=<\vec{b},\vec{c}>$，则$t=$（　　）

A．-6　　B．-5　　C．5　　D．6

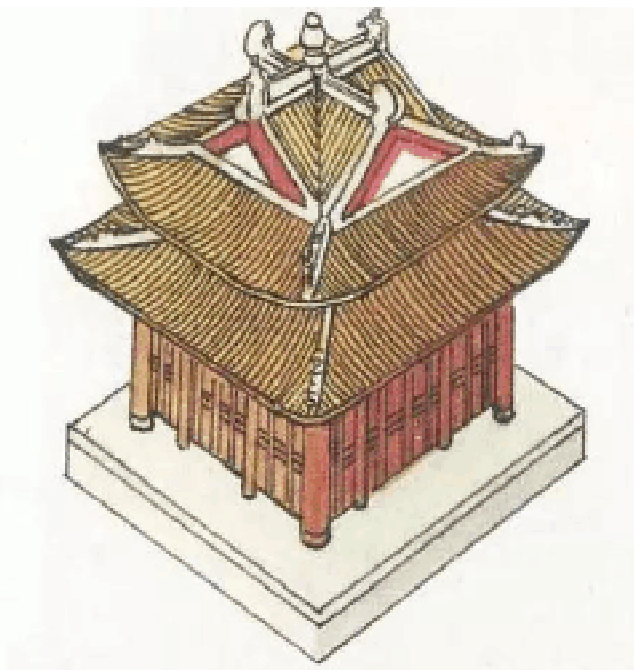
C【解析】利用向量的运算和向量的夹角的余弦公式的坐标形式化简即可求得

【详解】解：$\vec{c}=(3+t,4)$，$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$，即$\dfrac{9+3t+16}{5|\vec{c}|}=\dfrac{3+t}{|\vec{c}|}$，解得$t=5$，

故选：C

4．（2022年高考天津卷）如图，“十字歇山”是由两个直三棱柱重叠后的景象，重叠后的底

面为正方形，直三棱柱的底面是顶角为$120°$，腰为 3 的等腰三角形，则该几何体的体积为（　）

A．23　　　　B．24　　　　C．26　　　　D．27

D【解析】作出几何体直观图，由题意结合几何体体积公式即可得组合体的体积.

【详解】该几何体由直三棱柱 $AFD-BHC$ 及直三棱柱 $DGC-AEB$ 组成，作 $HM\perp CB$ 于 M，如图，

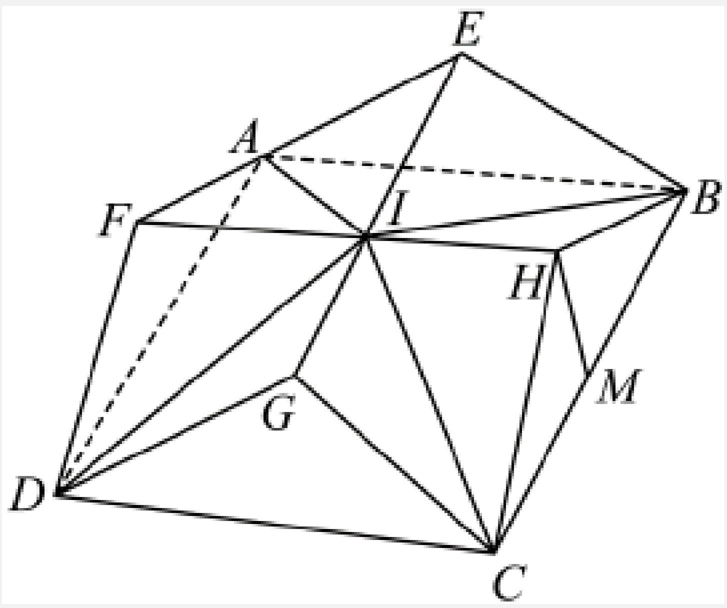
因为 $CH=BH=3,\angle CHB=120^{\circ}$，所以 $CM=BM=\frac{3\sqrt{3}}{2},HM=\frac{3}{2}$，

因为重叠后的底面为正方形，所以 $AB=BC=3\sqrt{3}$，

在直棱柱 $AFD-BHC$ 中，$AB\perp$平面 BHC，则 $AB\perp HM$，

由 $AB\cap BC=B$ 可得 $HM\perp$平面 $ADCB$，

设重叠后的 EG 与 FH 交点为 I，



则 $V_{I-BCDA}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2},V_{AFD-BHC}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\times3\sqrt{3}=\frac{81}{4}$

则该几何体的体积为 $V=2V_{AFD-BHC}-V_{I-BCDA}=2\times\frac{81}{4}-\frac{27}{2}=27$.

故选：D.

5.（2021 年高考全国甲卷）将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{5}$

C【解析】将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，可利用插空法，4 个 1 产生 5 个空，

若 2 个 0 相邻，则有 $C_5^1=5$ 种排法，若 2 个 0 不相邻，则有 $C_5^2=10$ 种排法，

所以 2 个 0 不相邻的概率为 $\frac{10}{5+10}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

6.（2022 年高考天津卷）已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，关于该函数有下列四个说法：

① $f(x)$ 的最小正周期为 2 ；

② $f(x)$ 在 $[-\frac{}{4},\frac{}{4}]$ 上单调递增；

③当 $x\in\left[-\frac{}{6},\frac{}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$；

④ $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{}{8}$ 个单位长度得到.

以上四个说法中，正确的个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

A【解析】根据三角函数的图象与性质，以及变换法则即可判断各说法的真假.

【详解】因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2}{2}=$ ，①不正确；

令 $t=2x\in\left[-\frac{}{2},\frac{}{2}\right]$，而 $y=\frac{1}{2}\sin t$ 在 $\left[-\frac{}{2},\frac{}{2}\right]$ 上递增，所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{}{4},\frac{}{4}]$ 上单调递增，②正确；因为 $t=2x\in\left[-\frac{}{3},\frac{2}{3}\right]$，$\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$，③不正确；

由于 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{}{4})=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{}{8}\right)\right]$，所以 $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{}{8}$ 个单位长度得到，④不正确.

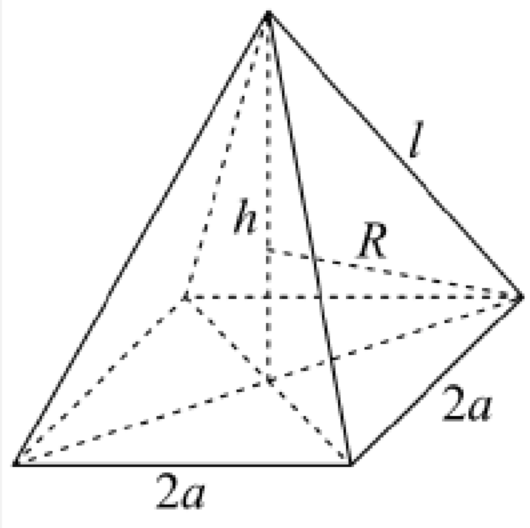
故选：A.

7.（2022 年高考全国 I 卷）已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

C【解析】设正四棱锥的高为 h，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【详解】∵球的体积为 36π，所以球的半径 $R=3$，



[方法一]：导数法

设正四棱锥的底面边长为$2a$，高为h，

则$l^2=2a^2+h^2$，$3^2=2a^2+(3-h)^2$，

所以$6h=l^2$，$2a^2=l^2-h^2$

所以正四棱锥的体积$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 4a^2\times h=\frac{2}{3}\times(l^2-\frac{l^4}{36})\times\frac{l^2}{6}=\frac{1}{9}\left(l^4-\frac{l^6}{36}\right)$，

所以$V'=\frac{1}{9}\left(4l^3-\frac{l^5}{6}\right)=\frac{1}{9}l^3\left(\frac{24-l^2}{6}\right)$，

当$3\le l\le 2\sqrt{6}$时，$V'>0$，当$2\sqrt{6}<l\le 3\sqrt{3}$时，$V'<0$，

所以当$l=2\sqrt{6}$时，正四棱锥的体积V取最大值，最大值为$\frac{64}{3}$，

又$l=3$时，$V=\frac{27}{4}$，$l=3\sqrt{3}$时，$V=\frac{81}{4}$，

所以正四棱锥的体积V的最小值为$\frac{27}{4}$，

所以该正四棱锥体积的取值范围是$\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

故选：C.

[方法二]：基本不等式法

由方法一故所以$V=\frac{4}{3}a^2h=\frac{2}{3}\left(6h-h^2\right)h=\frac{1}{3}\left(12-2h\right)h\times h\leqslant\frac{1}{3}\times\left[\frac{\left(12-2h\right)+h+h}{3}\right]^3=\frac{64}{3}$（当且仅当$h=4$取到），

当$h=\frac{3}{2}$时，得$a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，则$V_{\min}=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2\times\frac{3}{2}=\frac{27}{4}$;

当$l=3\sqrt{3}$时，球心在正四棱锥高线上，此时$h=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$，

$\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，正四棱锥体积$V_1=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2\times\frac{9}{2}=\frac{81}{4}<\frac{64}{3}$，故该正四棱锥体积的取值范围是$[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$.

8．（2022 年高考全国 I 卷）设 $a=0.1e^{0.1}, b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$a<c<b$

C【分析】构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，导数判断其单调性，由此确定 a,b,c 的大小.

【详解】方法一：构造法

设 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>-1)$，因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $f(\frac{1}{9})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{10}{9}-\frac{1}{9}<0$，故 $\frac{1}{9}>\ln\frac{10}{9}=-\ln 0.9$，即 $b>c$，

所以 $f(-\frac{1}{10})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{9}{10}+\frac{1}{10}<0$，故 $\frac{9}{10}<e^{-\frac{1}{10}}$，所以 $\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}<\frac{1}{9}$，

故 $a<b$，

设 $g(x)=xe^{x}+\ln(1-x)(0<x<1)$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{(x^2-1)e^{x}+1}{x-1}$，

令 $h(x)=e^{x}(x^2-1)+1$，$h'(x)=e^{x}(x^2+2x-1)$，

当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)=e^{x}(x^2-1)+1$ 单调递减，

当 $\sqrt{2}-1<x<1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)=e^{x}(x^2-1)+1$ 单调递增，

又 $h(0)=0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h(x)<0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)=xe^{x}+\ln(1-x)$ 单调递增，

所以 $g(0.1)>g(0)=0$，即 $0.1e^{0.1}>-\ln 0.9$，所以 $a>c$

故选：C.

方法二：比较法

解：$a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{0.1}{1-0.1}$，$c=-\ln(1-0.1)$，

① $\ln a-\ln b=0.1+\ln(1-0.1)$，

令 $f(x)=x+\ln(1-x), x\in(0,0.1]$,

则 $f'(x)=1-\frac{1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}<0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,0.1]$ 上单调递减，

可得 $f(0.1)<f(0)=0$，即 $\ln a-\ln b<0$，所以 $a<b$；

② $a-c=0.1e^{0.1}+\ln(1-0.1)$，

令 $g(x)=xe^{x}+\ln(1-x), x\in(0,0.1]$,

则 $g'(x)=xe^{x}+e^{x}-\frac{1}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)e^{x}-1}{1-x}$，

令 $k(x)=(1+x)(1-x)e^{x}-1$，所以 $k'(x)=(1-x^{2}-2x)e^{x}>0$，

所以 $k(x)$ 在 $(0,0.1]$ 上单调递增，可得 $k(x)>k(0)>0$，即 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,0.1]$ 上单调递增，可得 $g(0.1)>g(0)=0$，即 $a-c>0$，所以 $a>c.$

故 $c<a<b.$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．（2022 年高考全国 I 卷）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

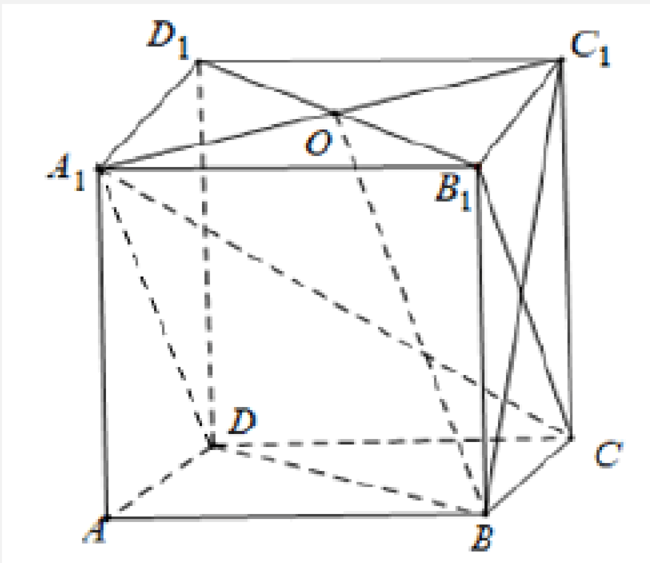
A．直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　　B．直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C．直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　　D．直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

ABD【解析】数形结合，依次对所给选项进行判断即可．

【详解】如图，连接 B_1C、BC_1，因为 $DA_1//B_1C$，所以直线 BC_1 与 B_1C 所成的角即为直线 BC_1 与 DA_1 所成的角，

因为四边形 BB_1C_1C 为正方形，则 $B_1C\perp BC_1$，故直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$，A 正确；



连接 A_1C，因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，则 $A_1B_1\perp BC_1$，

因为 $B_1C\perp BC_1$，$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C，

又 $A_1C\subset$ 平面 A_1B_1C，所以 $BC_1\perp CA_1$，故 B 正确；

连接 A_1C_1，设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，连接 BO，

因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1O\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $C_1O\perp B_1B$，

因为 $C_1O\perp B_1D_1$，$B_1D_1\cap B_1B=B_1$，所以 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，

设正方体棱长为 1，则 $C_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BC_1=\sqrt{2}$，$\sin\angle C_1BO=\frac{C_1O}{BC_1}=\frac{1}{2}$，

所以，直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30°，故 C 错误；

因为 $C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，易得 $\angle C_1BC=45^{\circ}$，故 D 正确.

故选：ABD

10．（2022 年高考全国 II 卷）若 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　）

A．$x+y\le 1$　　　　B．$x+y\ge -2$

C．$x^2+y^2\le 2$　　　　D．$x^2+y^2\ge 1$

BC【解析】根据基本不等式或者取特值即可判断各选项的真假.

【详解】因为 $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$（$a,b\in\mathbf{R}$），由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为，

$(x+y)^2-1=3xy\le 3\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$，解得 $-2\le x+y\le 2$，当且仅当 $x=y=-1$ 时，$x+y=-2$，当且仅当 $x=y=1$ 时，$x+y=2$，所以 A 错误，B 正确；

由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为 $\left(x^2+y^2\right)-1=xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$，解得 $x^2+y^2\le 2$，当且仅当 $x=y=\pm 1$ 时取等号，所以 C 正确；

因为 $x^2+y^2-xy=1$ 变形可得 $\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=1$，设 $x-\dfrac{y}{2}=\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta$，所以

$x=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta,y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，因此

$x^2+y^2=\cos^2\theta+\dfrac{5}{3}\sin^2\theta+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta-\dfrac{1}{3}\cos 2\theta+\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[\dfrac{2}{3},2\right]$，所以当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3},y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时满足等式，但是 $x^2+y^2\ge 1$ 不成立，所以 D 错误.

故选：BC.

11．（2022 年高考全国 II 卷）已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，其中 A 在第一象限，点 $M(p,0)$，若 $|AF|=|AM|$，则（　）

A．直线 AB 的斜率为 $\sqrt{\ }$　　　　B．$|OB|=|OF|$

C．$|AB|>4|OF|$　　　　D．$\angle OAM+\angle OBM<180^{\circ}$

ACD【解析】由 $|AF|=|AM|$ 及抛物线方程求得 $A(\dfrac{3p}{4},\dfrac{\sqrt{6}p}{2})$，再由斜率公式即可判断 A 选项；表示出直线 AB 的方程，联立抛物线求得 $B(\dfrac{p}{3},-\dfrac{\sqrt{6}p}{3})$，即可求出 $|OB|$ 判断 B 选项；由抛物线的定义求出 $|AB|=\dfrac{25p}{12}$ 即可判断 C 选项；由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$ 求得 $\angle AOB$，$\angle AMB$

为钝角即可判断 D 选项.

【详解】对于 A，易得 $F(\frac{p}{2},0)$，由 $|AF|=|AM|$ 可得点 A 在 FM 的垂直平分线上，则 A 点横坐标为 $\frac{\frac{p}{2}+p}{2}=\frac{3p}{4}$，

代入抛物线可得 $y^2=2p\cdot\frac{3p}{4}=\frac{3}{2}p^2$，则 $A(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2})$，则直线 AB 的斜率为 $\frac{\frac{\sqrt{6}p}{2}}{\frac{3p}{4}-\frac{p}{2}}=2\sqrt{6}$，

A 正确；

对于 B，由斜率为 $\sqrt{\ }$ 可得直线 AB 的方程为 $x=\frac{1}{2\sqrt{6}}y+\frac{p}{2}$，联立抛物线方程得

$y^2-\frac{1}{\sqrt{6}}py-p^2=0$，

设 $B(x_1,y_1)$，则 $\frac{\sqrt{6}}{2}p+y_1=\frac{\sqrt{6}}{6}p$，则 $y_1=-\frac{\sqrt{6}p}{3}$，代入抛物线得 $\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)^2=2p\cdot x_1$，解得

$x_1=\frac{p}{3}$，则 $B(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3})$，

则 $|OB|=\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}p}{3}\neq|OF|=\frac{p}{2}$，B 错误；

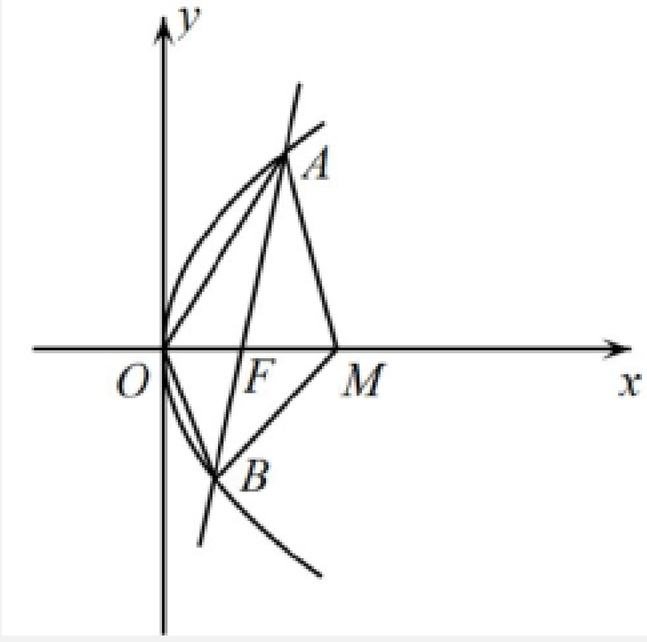
对于 C，由抛物线定义知：$|AB|=\frac{3p}{4}+\frac{p}{3}+p=\frac{25p}{12}>2p=4|OF|$，C 正确；

对于 D，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2})\cdot(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3})=\frac{3p}{4}\cdot\frac{p}{3}+\frac{\sqrt{6}p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{3p^2}{4}<0$，则 $\angle AOB$ 为钝角，

又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(-\frac{p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2})\cdot(-\frac{2p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3})=-\frac{p}{4}\cdot\left(-\frac{2p}{3}\right)+\frac{\sqrt{6}p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{5p^2}{6}<0$，则 $\angle AMB$ 为钝角，

又 $\angle AOB+\angle AMB+\angle OAM+\angle OBM=360^\circ$，则 $\angle OAM+\angle OBM<180^\circ$，D 正确.

故选：ACD.



12.（2022年高考全国I卷）已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则（　）

A．$f(0)=0$　　　　B．$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　　　C．$f(-1)=f(4)$　　　　D．$g(-1)=g(2)$

BC【分析】方法一：转化题设条件为函数的对称性，结合原函数与导函数图象的关系，根据函数的性质逐项判断即可得解.

【详解】[方法一]：对称性和周期性的关系研究

对于 $f(x)$，因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$ 为偶函数，所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$ 即 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$①，

所以 $f(3-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称，则 $f(-1)=f(4)$，故C正确；

对于 $g(x)$，因为 $g(2+x)$ 为偶函数，$g(2+x)=g(2-x)$，$g(4-x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 关于 $x=2$ 对称，由①求导，和 $g(x)=f'(x)$，得

$$\left[f\left(\frac{3}{2}-x\right)\right]'=\left[f\left(\frac{3}{2}+x\right)\right]'\Leftrightarrow -f'\left(\frac{3}{2}-x\right)=f'\left(\frac{3}{2}+x\right)\Leftrightarrow -g\left(\frac{3}{2}-x\right)=g\left(\frac{3}{2}+x\right)$$，所以

$g(3-x)+g(x)=0$，所以 $g(x)$ 关于 $(\frac{3}{2},0)$ 对称，因为其定义域为R，所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，结合 $g(x)$ 关于 $x=2$ 对称，从而周期 $T=4\times\left(2-\frac{3}{2}\right)=2$，所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$g(-1)=g(1)=-g(2)$，

故B正确，D错误；

若函数 $f(x)$ 满足题设条件，则函数 $f(x)+C$（C为常数）也满足题设条件，所以无法确定 $f(x)$ 的函数值，故A错误.

故选：BC.

[方法二]：【最优解】特殊值，构造函数法.

由方法一知 $g(x)$ 周期为2，关于 $x=2$ 对称，故可设 $g(x)=\cos(\ x)$，则 $f(x)=\frac{1}{\ }\sin(\ x)+c$，

显然 A，D 错误，选 BC.

故选：BC.

[方法三]：

因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$， $g(2+x)$ 均为偶函数，

所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$ 即 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$， $g(2+x)=g(2-x)$，

所以 $f(3-x)=f(x)$， $g(4-x)=g(x)$，则 $f(-1)=f(4)$，故 C 正确；

函数 $f(x)$， $g(x)$ 的图象分别关于直线 $x=\frac{3}{2},x=2$ 对称，

又 $g(x)=f'(x)$，且函数 $f(x)$ 可导，

所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0, g(3-x)=-g(x)$，

所以 $g(4-x)=g(x)=-g(3-x)$，所以 $g(x+2)=-g(x+1)=g(x)$，

所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$， $g(-1)=g(1)=-g(2)$，故 B 正确，D 错误；

若函数 $f(x)$ 满足题设条件，则函数 $f(x)+C$（C 为常数）也满足题设条件，所以无法确定 $f(x)$ 的函数值，故 A 错误.

故选：BC.

【整体点评】方法一：根据题意赋值变换得到函数的性质，即可判断各选项的真假，转化难度较高，是该题的通性通法；

方法二：根据题意得出的性质构造特殊函数，再验证选项，简单明了，是该题的最优解.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．（2021 年高考天津卷）在 $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中， x^6 的系数是__________.

160【解析】求出二项式的展开式通项，令 x 的指数为 6 即可求出.

【详解】$\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\left(2x^3\right)^{6-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=2^{6-r}C_6^r\cdot x^{18-4r}$，

令 $18-4r=6$，解得 $r=3$，

所以 x^6 的系数是 $2^3C_6^3=160$.

故答案为：160.

14．（2022 年高考全国 II 卷）设点 $A(-2,3), B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围是________.

$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$【解析】首先求出点 A 关于 $y=a$ 对称点 A' 的坐标，即可得到直线 l 的方程，根据圆心

到直线的距离小于等于半径得到不等式，解得即可；

【详解】解：$A(-2,3)$关于$y=a$对称的点的坐标为$A'(-2,2a-3)$，$B(0,a)$在直线$y=a$上，

所以$A'B$所在直线即为直线l，所以直线l为$y=\frac{a-3}{-2}x+a$，即$(a-3)x+2y-2a=0$；

圆$C:(x+3)^2+(y+2)^2=1$，圆心$C(-3,-2)$，半径$r=1$，

依题意圆心到直线l的距离$d=\frac{|-3(a-3)-4-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+2^2}}\le 1$，

即$(5-5a)^2\le(a-3)^2+2^2$，解得$\frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{2}$，即$a\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$；

故答案为：$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$

15．（2021年高考全国新高考II卷）已知函数$f(x)=|e^x-1|,x_1<0,x_2>0$，函数$f(x)$的图象在点$A(x_1,f(x_1))$和点$B(x_2,f(x_2))$的两条切线互相垂直，且分别交y轴于M，N两点，则$\frac{|AM|}{|BN|}$取值范围是_______.

$(0,1)$ 【分析】结合导数的几何意义可得$x_1+x_2=0$，结合直线方程及两点间距离公式可得$|AM|=\sqrt{1+e^{2x_1}}\cdot|x_1|$，$|BN|=\sqrt{1+e^{2x_2}}\cdot|x_2|$，化简即可得解.

【详解】由题意，$f(x)=|e^x-1|=\begin{cases}1-e^x,x<0\\ e^x-1,x\ge 0\end{cases}$，则$f'(x)=\begin{cases}-e^x,x<0\\ e^x,x>0\end{cases}$，

所以点$A(x_1,1-e^{x_1})$和点$B(x_2,e^{x_2}-1)$，$k_{AM}=-e^{x_1},k_{BN}=e^{x_2}$，

所以$-e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1,x_1+x_2=0$，

所以$AM:y-1+e^{x_1}=-e^{x_1}(x-x_1),M(0,e^{x_1}x_1-e^{x_1}+1)$，

所以$|AM|=\sqrt{x_1^2+(e^{x_1}x_1)^2}=\sqrt{1+e^{2x_1}}\cdot|x_1|$，

同理$|BN|=\sqrt{1+e^{2x_2}}\cdot|x_2|$，

所以$\frac{|AM|}{|BN|}=\frac{\sqrt{1+e^{2x_1}}\cdot|x_1|}{\sqrt{1+e^{2x_2}}\cdot|x_2|}=\sqrt{\frac{1+e^{2x_1}}{1+e^{2x_2}}}=\sqrt{\frac{1+e^{2x_1}}{1+e^{-2x_1}}}=e^{x_1}\in(0,1)$.

故答案为：$(0,1)$

【点睛】关键点点睛：

解决本题的关键是利用导数的几何意义转化条件$x_1+x_2=0$，消去一个变量后，运算即可得解.

16．（2022 年高考全国 I 卷）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$．过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是________________．

13【解析】利用离心率得到椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，即 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，根据离心率得到直线 AF_2 的斜率，进而利用直线的垂直关系得到直线 DE 的斜率，写出直线 DE 的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，代入椭圆方程 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，整理化简得到：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，利用弦长公式求得 $c=\frac{13}{8}$，得 $a=2c=\frac{13}{4}$，根据对称性将 $\triangle ADE$ 的周长转化为 $\triangle F_2DE$ 的周长，利用椭圆的定义得到周长为 $4a=13$．

【详解】∵椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，∴ $a=2c$，∴ $b^2=a^2-c^2=3c^2$，∴椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，即 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，不妨设左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，如图所示，∵ $AF_2=a$，$OF_2=c$，$a=2c$，∴ $\angle AF_2O=\frac{\pi}{3}$，∴ $\triangle AF_1F_2$ 为正三角形，∵过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，DE 为线段 AF_2 的垂直平分线，∴直线 DE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，斜率倒数为 $\sqrt{3}$，直线 DE 的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，代入椭圆方程 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，整理化简得到：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，

判别式 $\Delta=\left(6\sqrt{3}c\right)^2+4\times13\times9c^2=6^2\times16\times c^2$，

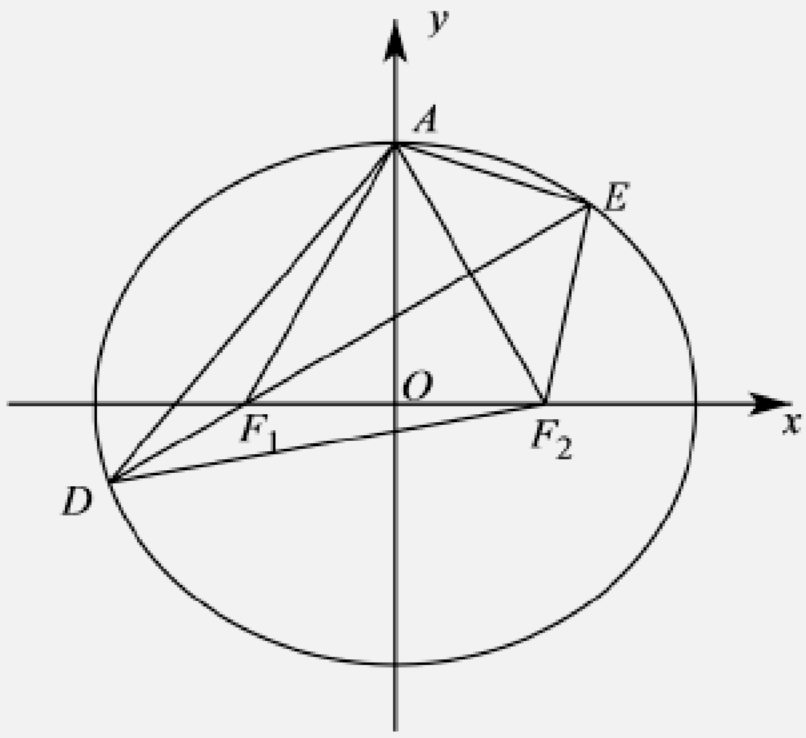
∴ $|DE|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,|y_1-y_2|=2\times\frac{\sqrt{\ }}{13}=2\times6\times4\times\frac{c}{13}=6$，

∴ $c=\frac{13}{8}$，得 $a=2c=\frac{13}{4}$，

∵ DE 为线段 AF_2 的垂直平分线，根据对称性，$AD=DF_2$，$AE=EF_2$，∴ $\triangle ADE$ 的周长等于 $\triangle F_2DE$ 的周长，利用椭圆的定义得到 $\triangle F_2DE$ 周长为

$|DF_2|+|EF_2|+|DE|=|DF_2|+|EF_2|+|DF_1|+|EF_1|=|DF_1|+|DF_2|+|EF_1|+|EF_2|=2a+2a=4a=13$．

故答案为：13.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（2022 年高考全国 I 卷）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列．

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

(1) $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$；(2)见解析【解析】(1)利用等差数列的通项公式求得 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，得到 $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$，利用和与项的关系得到当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，进而得：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，利用累乘法求得 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，检验对于 $n=1$ 也成立，得到 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$；

（2）由（1）的结论，利用裂项求和法得到 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，进而证得．

【详解】(1) ∵ $a_1=1$，∴ $S_1=a_1=1$，∴ $\frac{S_1}{a_1}=1$，

又∵ $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，

∴ $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，∴ $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$，

∴当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，