河南省周口市沈丘县第二高级中学2024届高三考前模拟（三）

数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,||x+1|\le 2\}$，$B=\{y|y=x^2-1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,1]$

2．已知抛物线 $E:y^2=2px$ 上一点 A 的横坐标为4，F 为抛物线 E 的焦点，且 $|AF|=7$，则 $p=$（　）

A．3　　B．6　　C．12　　D．$\dfrac{3}{2}$

3．已知圆台的上、下底面的直径分别为8和4，若 p 为"圆台的体积不大于 56π"，则 p 的充分不必要条件可以为（　）

A．圆台的母线长为 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　B．圆台的母线长为 $2\sqrt{15}$

C．圆台的母线长为 $\sqrt{15}$　　D．圆台的母线长为 $3\sqrt{10}$

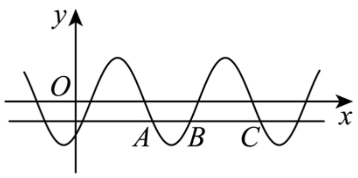
4．已知函数 $f(x)=a\ln\dfrac{x+b}{b}$，其中 a，b 均为正数．若 $f(8b)-f(3b)=2$，则 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}=$（　）

A．$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　B．$\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{4}{9}$

5．已知 $A(2,-1)$，$B(-2,-1)$，圆 $(x-a)^2+(y-2a+4)^2=1$ 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则 a 的最大值为（　）

A．$\dfrac{6}{5}$　　B．$\dfrac{12}{5}$　　C．3　　D．4

6．如图，直线 $y=-1$ 与函数 $f(x)=A_0\sin(2x+\varphi)\left(A_0>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象的三个相邻的交点分别为 A，B，C，其横坐标分别为 x_A，x_B，x_C，且 $x_C-x_B=2(x_B-x_A)=x_A$，则 φ 的值为（　）



A．$-\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$-\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

7．已知函数$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数且在$\mathbf{R}$上可导，若$f\left(2-x\right)-f\left(2+x\right)+4x=0$恒成立，则$f'\left(2024\right)=$（　）

A．-2　　B．0　　C．1　　D．2

8．已知首项为 6 的数列$\{a_n\}$满足$a_n=a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}+2$（$n\in\mathbf{N}^*$，且$n\geq 2$），若存在正整数$k$，使得$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2-3a_1-3a_2-\cdots-3a_k=a_1a_2a_3\cdots a_k$成立，则$k$的值为（　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

二、多选题

9．已知一组样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_{50}(x_1<x_2<\cdots<x_{50})$的方差$s^2=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(x_i-2)^2$，则（　）

A．这组样本数据的总和等于 100

B．这组样本数据的中位数一定为 2

C．数据$3x_1+1$，$3x_2+1$，…，$3x_{50}+1$的标准差为$3s$

D．现有一组新的样本数据$\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2+x_3}{2},\cdots,\frac{x_{49}+x_{50}}{2},\frac{x_{50}+x_1}{2}$，该组样本数据的极差比原样本数据的极差大

10．设$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则下列计算正确的是（　）

A．$\cos\left(\alpha+\beta\right)<\cos\left(\alpha-\beta\right)$

B．若$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{6}$，则$\tan\alpha=2$

C．若$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{\cos\alpha}$，则$2\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$

D．若$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=0$，则$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

11．已知F_1,F_2分别为椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$的左、右焦点，$P$为椭圆上任意一点（不在$x$轴上），$\triangle PF_1F_2$外接圆的半径为$R$，$\triangle PF_1F_2$内切圆的圆心为$I$，半径为$r$，直线$PI$交$x$轴于点$M$，$G$为$\triangle PF_1F_2$的重心，$O$为坐标原点，则下列说法正确的是（　）

A．r 为定值　　　　B．$\frac{|PI|}{|IM|}=3$

C．$\frac{r}{R}$ 的最大值为 $\frac{4}{9}$　　　　D．直线 IG 的倾斜角不变

三、填空题

12．已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}=3-z\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，则 $|z-3\overline{z}|=$_____.

13．某商家为举办抽奖活动，准备了 $n(n>2,n\in\mathbf{N}^*)$ 个相同的盒子，里面均装有 n 张形状完全相同的卡片，一部分卡片为写有“谢谢惠顾”的无效卡，另一部分卡片为写有“100 元”的代金券，第 $k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 个盒子中有 k 张代金券，$n-k$ 张无效卡．现将这些盒子混合，任选 1 个盒子，并且依次从中不放回地取出 2 张卡片，若第二次取出无效卡的概率不超过 $\frac{2}{5}$，则 n 的最大值为_____.

14．已知点 S，A，B，C 均在半径为 4 的球 O 的表面上，且 $SA\perp$ 平面 ABC，$SA=4$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$AB=2\sqrt{3}$，点 M 在 BC 上，当直线 SM 与平面 ABC 所成的角最大时，$AM=$_____.

四、解答题

15．已知首项不为 1 的正项数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，且点 $\left(a_n,\frac{6S_n}{a_n+2}\right)$ 在直线 $y=x+1$ 上.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{1}{S_n+n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

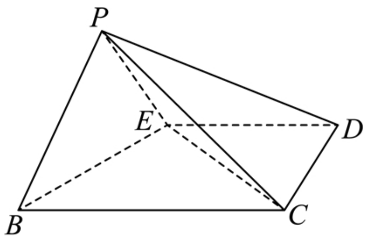
16．甲和乙两个箱子中各装有 N 个大小、质地均相同的小球，并且各箱中 $\frac{3}{5}$ 是红球，$\frac{2}{5}$ 是白球.

(1)当 $N=5$ 时，从甲箱中随机抽出 2 个球，求 2 个球的颜色不同的概率.

(2)由概率学知识可知，当总量 N 足够多而抽出的个体足够少时，超几何分布近似为二项分布．现从甲箱中不放回地取 3 个小球，恰有 2 个白球的概率记作 P_1；从乙箱中有放回地取 3 个小球，恰有 2 个白球的概率记作 P_2．那么当 N 至少为多少时，我们可以在误差不超过 0.001

（即 $P_1-P_2\le 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布？（参考数据：$\sqrt{578}\approx 24.04$）.

17．在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2CD=4$，E 为边 AD 上的中点．将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折，使得点A到点 P 的位置，且满足平面 $PBE\perp$ 平面 $BCDE$，连接 PC，PD，EC．



(1)求证：平面 $PBE\perp$ 平面 PCE．

(2)在线段 PC 上是否存在点 Q，使得二面角 $P-BE-Q$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$？若存在，求出 Q 点位置；若不存在，说明理由．

18．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，$(2,3)$.

(1)求双曲线 C 的渐近线方程.

(2)若过双曲线 C 上的动点 $P(x_0,y_0)$ 作一条切线 l，证明：直线 l 的方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

(3)若双曲线 C 在动点 Q 处的切线交 C 的两条渐近线于 A，B 两点，O 为坐标原点，求 $\triangle AOB$ 的面积.

19．已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\ln\left(1-x\right)-x-\cos x$．

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上的极值点的个数．

(2)“Σ”是一个求和符号，例如 $\sum\limits_{i=1}^{n}i=1+2+\cdots+n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(2x^i)=2x+2x^2+\cdots+2x^n$，等等．英国数学家布鲁克·泰勒发现，当 $n\to+\infty$ 时，$\cos x=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i-1}\cdot x^{2i-2}}{(2i-2)!}$，这就是麦克劳林展开式在三角函数上的一个经典应用．

证明：（i）当 $n\to+\infty$ 时，对 $\forall x>0$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}\cdot x^{2i+3}}{(2i+3)!}>0$；

（ii）$\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{6i^3}\right)<\ln n\left(n\in\mathbf{N}^*,n\ge 2\right)$．

参考答案：

1．A

【分析】解绝对值不等式化简集合 A，求函数值域化简集合 B，然后根据交集运算求解即可.

【详解】$A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle||x+1|\le 2\right\}=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|-2\le x+1\le 2\right\}=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|-3\le x\le 1\right\}=\left\{-3,-2,-1,0,1\right\}$，

又 $B=\left\{y\middle|y=x^2-1\right\}=\left\{y\middle|y\ge -1\right\}=\left[-1,+\infty\right)$，所以 $A\cap B=\left\{-1,0,1\right\}$.

故选：A

2．B

【分析】根据焦半径公式可求 p 的值.

【详解】由题意，$p>0$，抛物线的焦半径公式得 $|AF|=7=4+\frac{p}{2}$，故 $p=6$，

故选：B.

3．C

【分析】借助圆台体积公式可得圆台的体积不大于 56π 时的母线长度的范围，结合充分不必要条件定义即可得解.

【详解】设圆台的母线长为 l，则圆台的高为 $h=\sqrt{l^2-\left(\frac{8}{2}-\frac{4}{2}\right)^2}=\sqrt{l^2-4}$，

$V=\frac{1}{3}\left(\pi\times 4^2+\pi\times 2^2+\sqrt{\pi\times 4^2\times\pi\times 2^2}\right)h=\frac{28\pi}{3}\sqrt{l^2-4}$，

若圆台的体积不大于 56π，即有 $\frac{28\pi}{3}\sqrt{l^2-4}\le 56\pi$，解得 $l\le 2\sqrt{10}$，

又 $h=\sqrt{l^2-4}>0$，故 $l>2$，即 $2<l\le 2\sqrt{10}$，

由 $\frac{\sqrt{15}}{2}<2$，$2\sqrt{15}>2\sqrt{10}$，$3\sqrt{10}>2\sqrt{10}$，故 A、B、D 错误，

$2<\sqrt{15}\le 2\sqrt{10}$，故 C 正确.

故选：C.

4．C

【分析】求出 $f(8b)-f(3b)$ 后可求参数 a 的值，再结合对数的性质可求 $e^{-\frac{1}{a}}$ 的值.

【详解】$f(8b)-f(3b)=a\ln 9-a\ln 4=2$，故 $a=\frac{2}{\ln 9-\ln 4}=\frac{2}{\ln\frac{9}{4}}$，

故 $e^{-\frac{1}{a}}=e^{-\frac{\ln\frac{9}{4}}{2}}=e^{\ln\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

5．B

【分析】首先求点P的轨迹方程，再结合两圆的位置关系，即可列式求解.

【详解】设$P(x,y)$，$A(2,-1)$，$B(-2,-1)$，若$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

则$(2-x,-1-y)\cdot(-2-x,-1-y)=0$，

即$x^2+(y+1)^2=4$，即点P的轨迹是以点$(0,-1)$为圆心，2为半径的圆，

由条件可知，圆$(x-a)^2+(y-2a+4)^2=1$与圆$x^2+(y+1)^2=4$有交点，

则$2-1\le\sqrt{a^2+(2a-4+1)^2}\le 1+2$，解得：$0\le a\le\frac{12}{5}$，

所以a的最大值为$\frac{12}{5}$.

故选：B

6．A

【分析】根据正弦型函数的对称性可得$\varphi=-\frac{13\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，故可求$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

【详解】因为$x_C-x_B=2(x_B-x_A)=x_A$，故$x_B=\frac{3}{2}x_A,x_C=\frac{5}{2}x_A$，

故AB中点的横坐标为$\frac{5}{4}x_A$，BC中点的横坐标为$2x_A$，

故$\frac{5}{4}x_A\times 2+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，且$2x_A\times 2+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

故$\varphi=-\frac{13\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

故选：A

7．D

【分析】借助复合函数的导数计算与函数奇偶性的性质可得函数$f'(x)$的周期性，结合赋值法计算即可得解.

【详解】由$f(2-x)-f(2+x)+4x=0$，则$-f'(2-x)-f'(2+x)+4=0$，

即$f'(2-x)+f'(2+x)=4$，

由函数$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$为奇函数，故$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-f\left(-x+\frac{1}{2}\right)$，

则$f'\left(x+\frac{1}{2}\right)=-f'\left(-x+\frac{1}{2}\right)\times(-1)=f'\left(-x+\frac{1}{2}\right)$，

则 $f'(x+2)=f'(-x-1)=4-f'(-x+2)$，

即 $f'(x-1)+f'(x+2)=4=f'(x+2)+f'(x+5)$，

即 $f'(x-1)=f'(x+5)$，故 $f'(x)$ 为周期为6的周期数列，

故 $f'(2024)=f'(6\times 337+2)=f'(2)$，

对 $f'(2-x)+f'(2+x)=4$，令 $x=0$，有 $2f'(2)=4$，即 $f'(2)=2$，

故 $f'(2024)=f'(2)=2$.

故选：D.

8．A

【分析】由递推关系可得 $a_{n+1}-a_n-2=a_n^2-3a_n$，利用裂项相消法可求 k 的值.

【详解】由递推关系可得 $a_2=8$.

因为 $a_1^2-3a_1=36-18=18\neq a_1$，故 $k\geq 2$.

因为 $a_n=a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}+2$，故 $a_{n+1}=a_1a_2a_3\cdots a_n+2=a_n(a_n-2)+2$，

故 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$，故 $a_{n+1}-a_n=a_n^2-3a_n+2$ 即 $a_{n+1}-a_n-2=a_n^2-3a_n$

故 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2-3a_1-3a_2-\cdots-3a_k=a_1a_2a_3\cdots a_k$ 可化为：

$36-3\times 6+a_3-a_2+a_4-a_3+\cdots+a_{k+1}-a_k-2(k-1)=a_{k+1}-2$，

整理得到：$36-3\times 6+a_{k+1}-8-2(k-1)=a_{k+1}-2$，解得 $k=7$，

故选：A.

【点睛】关键点点睛：已知递推关系时讨论数列的性质，往往需要把已知的递推关系变形得到新的递推关系，再依据所得结果求和、求通项等.

9．AC

【分析】根据方差的形式可求样本均值，从而可判断 A，根据方差的性质可判断 C 的正误，根据极差和中位数的计算方法可判断 BD 的正误.

【详解】对于 A，因为方差 $s^2=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(x_i-2)^2$，故 $\overline{x}=2$，所以这组样本数据的总和等于 100，故 A 正确.

对于 C，数据 $3x_1+1$，$3x_2+1$，…，$3x_{50}+1$ 的方差为 $9s^2$，故其标准差为 $\sqrt{9s^2}=3s$

，故 C 正确.

对于 B，根据方差、均值无法求出中位数，故 B 错误.

对于 D，新样本数据的极差为$\frac{x_{50}+x_{49}}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_{50}-x_1}{2}+\frac{x_{49}-x_2}{2}<x_{50}-x_1$，

故新的样本数据的极差比原样本数据的极差小，故 D 错误.

故选：AC.

10．AD

【分析】由两角和差的余弦公式判断 A，利用二倍角公式及同角三角函数关系判断 B，化弦为切，结合两角和差的正余弦公式求解判断 C，利用二倍角公式及三角恒等变换化简求解判断 D.

【详解】对于 A，因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，故$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta>0$，

所以$\cos\left(\alpha+\beta\right)<\cos\left(\alpha-\beta\right)$，正确；

对于 B，因为$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\cos 2\alpha=-\frac{1}{6}$，所以$\cos 2\alpha=-\frac{1}{3}$，

而$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，所以$\sin^2\alpha=\frac{2}{3}$，又$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\tan\alpha=\sqrt{2}$，错误；

对于 C，由$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{\cos\alpha}$得，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\alpha}$，所以

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta$，

即$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$，因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\alpha+\beta\in(0,\pi),\frac{\pi}{2}-\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

则$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\beta$或$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-\beta=\pi$，即$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$或$\alpha=\frac{\pi}{2}$（不合题意，舍去），错误；

对于 D，

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta},$$

因为$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=0$，所以$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=0$，

即$\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta+sin\alpha cos\beta+\cos\alpha\cos\beta=0$，即$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=0$，

所以$\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=0$，即$\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=0$，

因为$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以$\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，

所以$\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}=\pi$，所以$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，正确.

故选：AD

11．BCD

【分析】设$P\left(x,y\right)$，对于 A：利用等面积法求得$r=\frac{|y|}{4}$，即可判断；对于 B：利用内切圆的性质结合椭圆定义分析判断；对于 C：$\angle F_1PF_2=\theta$，结合解三角形的相关知识可得$R=\frac{1}{\sin\theta}$，$r=\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$，结合椭圆性质分析判断；对于 D：根据题意可得$|PF_1|=\frac{1}{3}x+3$，$|PF_2|=3-\frac{1}{3}x$，结合角平分线的性质可得$M\left(\frac{x}{9},0\right)$，即可得$I\left(\frac{x}{3},\frac{y}{4}\right)$，再求点$G$的坐标即可判断.

【详解】由题意可知：$a=3,b=2\sqrt{2},c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

则$|PF_1|+|PF_2|=2a=6,|F_1F_2|=2c=2$，

设$P\left(x,y\right)$，则$|x|\in\left[0,3\right),|y|\in\left(0,2\sqrt{2}\right]$，

对于选项 A：因为$\triangle PF_1F_2$的面积$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y|=|y|$，

又因为$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r+\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot r=\frac{1}{2}\left(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|\right)r=4r$，可得$r=\frac{|y|}{4}$，

由于$|y|$不是定值，所以不r为定值，故 A 错误；

对于选项 B：因为IF_1，IF_2分别是$\angle PF_1F_2$，$\angle PF_2F_1$的角平分线，

由角平分线定理可得$\frac{|PI|}{|IM|}=\frac{|PF_1|}{|F_1M|}=\frac{|PF_2|}{|F_2M|}$，

所以$\frac{|PI|}{|IM|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|F_1M|+|F_2M|}=\frac{2a}{2c}=3$，故 B 正确；

对于选项 C：设$\angle F_1PF_2=\theta$，

由正弦定理可得：$2R=\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{2}{\sin\theta}$，即$R=\frac{1}{\sin\theta}$

由余弦定理可得：$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$

$=\left(\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|\right)^2-2\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|-2\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|\cos\angle F_1PF_2$，

即 $4=36-2\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|-2\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|\cos\theta$，整理得 $\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|=\dfrac{16}{1+\cos\theta}$，

则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{8\sin\theta}{1+\cos\theta}=4r$，解得 $r=\dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$，

可得 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{\dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}}{\dfrac{1}{\sin\theta}}=\dfrac{2\sin^2\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2\left(1-\cos^2\theta\right)}{1+\cos\theta}=2\left(1-\cos\theta\right)$，

又因为当 P 在短轴的端点时，θ 最大，$\cos\theta$ 最小，

此时 $\left|PF_1\right|=\left|PF_2\right|=3$，$\cos\theta=\dfrac{\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-\left|F_1F_2\right|^2}{2\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|}=\dfrac{7}{9}$，

可得 $\cos\theta\in\left[\dfrac{7}{9},1\right)$，则 $\dfrac{r}{R}=2\left(1-\cos\theta\right)\in\left(0,\dfrac{4}{9}\right]$，

所以 $\dfrac{r}{R}$ 的最大值为 $\dfrac{4}{9}$，故 C 正确；

对于选项 D：因为 $P\left(x,y\right)$ 在椭圆上，

可得 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$，即 $y^2=8-\dfrac{8}{9}x^2$，

则 $\left|PF_1\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2x+1+8-\dfrac{8}{9}x^2}=\sqrt{\dfrac{1}{9}x^2+2x+9}=\left|\dfrac{1}{3}x+3\right|$，

又因为 $\left|x\right|\in\left[0,3\right)$，可得 $\left|PF_1\right|=\dfrac{1}{3}x+3$，$\left|PF_2\right|=2a-\left|PF_1\right|=3-\dfrac{1}{3}x$，

由选项 B 可知 $\dfrac{\left|PF_1\right|}{\left|F_1M\right|}=\dfrac{\left|PF_2\right|}{\left|F_2M\right|}$，则 $\left|F_1M\right|=\dfrac{\left|PF_1\right|\cdot\left|F_2M\right|}{\left|PF_2\right|}=\dfrac{\left(3+\dfrac{1}{3}x\right)\left|F_2M\right|}{3-\dfrac{1}{3}x}=\dfrac{\left(9+x\right)\left|F_2M\right|}{9-x}$，

又因为 $\left|F_1M\right|+\left|F_2M\right|=\dfrac{\left(9+x\right)\left|F_2M\right|}{9-x}+\left|F_2M\right|=\dfrac{18}{9-x}\left|F_2M\right|=2$，可得 $\left|F_2M\right|=\dfrac{9-x}{9}$，

则 $\left|OM\right|=\left|OF_2\right|-\left|F_2M\right|=1-\dfrac{9-x}{9}=\dfrac{x}{9}$，即 $M\left(\dfrac{x}{9},0\right)$，

由 $\dfrac{\left|PI\right|}{\left|IM\right|}=3$，可得点 I 的坐标为 $I\left(\dfrac{x}{3},\dfrac{y}{4}\right)$，

由重心坐标公式可知点 G 的坐标为 $G\left(\dfrac{x}{3},\dfrac{y}{3}\right)$，

即直线 IG 与 x 轴垂直，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，是定值，故 D 正确；