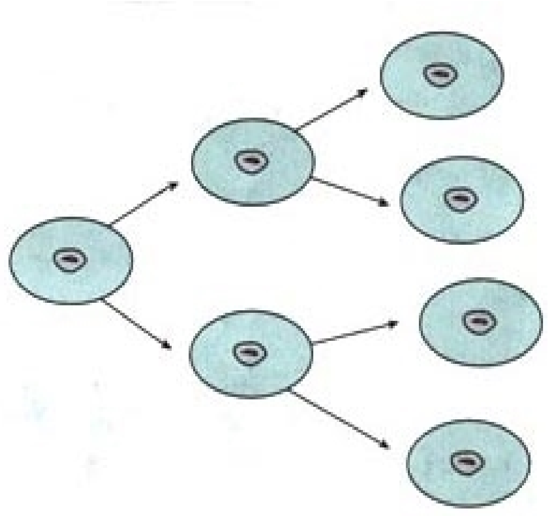
2.4 等比数列

引例：

① 如下图是某种细胞分裂的模型：



细胞分裂个数可以组成下面的数列：

1　2　4　8　16　…

引例：

②我国古代一些学者提出："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"用现代语言叙述为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完。这样，每日剩下的部分都是前一日的一半。如果把"一尺之棰"看成单位"1"，那么，得到的数列是：

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \cdots$$

一、探究发现

取出这些数列，观察：有什么共同特征？

$$1，2，4，8，16，\cdots\cdots$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\ \cdots$$

共同特征：从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一常数。

(一)定义：

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一常数，那么这个数列就叫做等比数列。这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示。

符号表示：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q(q \neq 0, n \geq 2, n \in N)$

理解：

1)公差d可为0，公比q不可以为0。且每一项不为0；

2)公比是每一项与其前一项之比，防止前后次序颠倒。

3)证明一个数列为等比数列，其依据是 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$

(二)等比数列的通项公式

由定义可知：

$$\frac{a_2}{a_1}=q,\frac{a_3}{a_2}=q,\frac{a_4}{a_3}=q,\ldots\ldots,\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=q,\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$$ (n-1个等式)

观察上式，可以把每一个等式的左边相乘，右边也相乘，等式还成立。

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1}\cdot\frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}}\cdot\frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}}\cdot\frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}=q\cdot q\cdot q\cdot\ldots\ldots\cdot q$$

叠乘法

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1}$$

$$a_n=a_1q^{n-1}(a_1\neq 0 \text{且} q\neq 0)$$

(三)等比数列的推导公式

对于等比数列中的任意两项a_n，a_m

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

证明：$\because a_n = a_1 q^{n-1}$，$a_m = a_1 q^{m-1}$

$$\therefore \frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{m-1}} = q^{n-m}$$

可得$a_n = a_m q^{n-m}$

例1、一个等比数列的第3项与第4项分别是12与18 ,求它的通项公式与第2项.

解：设首项为a_1，公比为q，则有

$$\begin{cases} a_1q^2 = 12 \\ a_1q^3 = 18 \end{cases}$$

解得 $q = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{16}{3}$

$\therefore a_n = \frac{32}{9}(\frac{3}{2})^n$，$a_2 = 8$

例2、在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_3=20$，$a_6=160$，求a_n.

解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,由题意得

$$\begin{cases} a_1q^2=20 \\ a_1q^5=160 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} q=2 \\ a_1=5 \end{cases}$$

因此，$a_n=5\times 2^{n-1}$

练习1、在等比数列$\{a_n\}$中

(1)$a_4=27, q=-3$, 求a_7;　-729

(2)若$a_2=18, a_4=8$, 求a_1与q;　$a_1=27, q=\frac{2}{3}$或$a_1=-27, q=-\frac{2}{3}$

(3)已知$a_2=18, a_4=8$, 求a_8;　$\frac{128}{81}$

(4)已知$a_3+a_6=36, a_4+a_7=18, a_n=\frac{1}{2}$, 求$n$　9

小结:

1、注意在等比数列中，遇到q的偶次方要注意解的个数。

2、在等比数列的方程中常用的乘，除运算

3、在一些特定问题中, q^n可以整体运算。

2、已知等比数列$\{a_n\}$，$a_2=2$，$q=\sqrt{2}$，则$4\sqrt{2}$是这个数列的第几项？

解：由已知得：$a_1=\dfrac{a_2}{q}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$

$\because 4\sqrt{2}$为$\{a_n\}$中的项

$\therefore 4\sqrt{2}=(\sqrt{2})^n, \therefore 2^{\frac{5}{2}}=2^{\frac{n}{2}}$

$\therefore n=5$

即$4\sqrt{2}$是等比数列$\{a_n\}$的第5项

随堂练习

1、下列叙述中正确的是(D)

A、等比数列的首项不能为零，但公比可以为零。

B、等比数列的公比$q>0$时，是递增数列。

C、若数列$\{a_n\}$为常数列，则此数列为等比数列。

D、已知等比数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(-2)^n$,则它的公比为-2。

2、数列$m,m,m,\ldots,m,\ldots$(C)

A、一定是等比数列

B、既是等差数列又是等比数列

C、一定是等差数列，不一定是等比数列

D、既不是等差数列，也不是等比数列

3、已知数列$a, a(a-1), a(1-a)^2, \ldots$是等比数列，则实数$a$满足

A、$a\neq 1$　　B、$a\neq 0$或$a\neq 1$　　C、$a\neq 0$　　D、$a\neq 1$且$a\neq 0$　D

4、等比数列$\{a_n\}$的公比为2，则$\dfrac{2a_1+a_2}{2a_3+a_4}$的值为(A)

A、$\dfrac{1}{4}$　　B、$\dfrac{1}{2}$　　C、$\dfrac{1}{8}$　　D、1

5、在等比数列中，已知首项为$\dfrac{9}{8}$，末项为$\dfrac{1}{3}$，公比为$\dfrac{2}{3}$，则项数n等于 4 ________

6、已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}(n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$的第20项$a_{20}=$ $\underline{2^{20}}$

7、等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，公差不为0，且a_1,a_3,a_{11}恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值等于$\underline{\quad 4 \quad}$

(四)等比中项

观察如下的两个数之间，插入一个什么数后三个数就会成为一个等比数列：

(1)1, ±3 ， 9　　　(2)-1，±2 ， -4

(3)-12, ±6 ， -3　　　(4)1，±1 ， 1

若a，G，b成等比数列，那么G叫做a与b的**等比中项**。

$$G = \pm\sqrt{ab} \quad \text{即} G^2 = ab$$

练一练：

等比数列$\{a_n\}$中, $a_1 = \frac{1}{8}$，$q = 2$，则a_4与a_8的等比中项是±4.

练习

(1)已知等比数列$\{a_n\}$，$a_3=7$，$a_7=21$，则$a_5=$(C)

A. 35　　B. 63　　C. $7\sqrt{3}$　　D. $\pm 7\sqrt{3}$

(2)已知等比数列$\{a_n\}$，$a_3=7$，$a_7=21$，则a_3和a_7的等比中项是(　　)D

A. 35　　B. 63　　C. $7\sqrt{3}$　　D. $\pm 7\sqrt{3}$

例题：

1、一个等比数列的第6项是$\dfrac{4}{9}$，第17项是$\dfrac{1}{3}$，

求它的第1项；$\dfrac{16}{27}$

2、已知$\{a_n\}$是等比数列且$a_n>0$，

$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，求a_3+a_5

5

巩固练习

1.在等比数列$\{a_n\}$中,$a_5=4,a_7=6$,求a_9　9

2.在等比数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_6=3$,　9

求$a_3a_5+2a_4a_6+a_5a_7$的值.

3. 在2和30之间插入两个正数,使前3个数依次成等比数列,后三个数依次成等差数列,求插入的这两个正数.

6、18