2023-2024 学年高三上册数学期末模拟试卷 11

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

第 I 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x|\log_2 x<1\}$，集合 $N=\{x|-1<x<1\}$，则 $M\cap(\complement_{R}N)=$（　　）

A．$(-\infty,-1]\cup[1,2)$　　B．$(1,2)$　　C．$(-\infty,-1]\cup(1,2)$　　D．$[1,2)$

2．已知复数 z 满足 $(1-2i)z=|2\sqrt{2}-i|$，则 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作，书中称轴截面为等腰直角三角形的圆锥为直角圆锥，则直角圆锥侧面展开图的圆心角的弧度数为（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　C．$\sqrt{2}\pi$　　D．$2\sqrt{2}\pi$

4．已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{3\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{}$ 对称，当 $f(x)$ 的最小正周期取得最大值时，距离原点最近的对称中心为（　　）

A．$\left(\pi,0\right)$　　B．$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$　　C．$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$　　D．$\left(-\pi,0\right)$

5．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(4,0)$，过点 F 且斜率为 1 的直线交椭圆于 A，B 两点.若 AB 的中点坐标为 $(3,-1)$，则 E 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{29}=1$　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

C．$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$　　D．$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$

6．已知 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=3\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．-1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．若曲线 $f(x)=$ 有三条过点 $(0,a)$ 的切线，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,e$　　B．$(0,e$　　C．$(0,$　　D．$(0,$

8．“省刻度尺”问题由英国数学游戏大师杜登尼提出：23cm 长的尺子，要能够量出长度为 1cm 到 23cm 且边长为整数的物体，至少需要 6 个刻度（尺子头尾不用刻）现有一根 8cm 的尺子，要在至多测量两次的情况下量两次量出长度为 1cm 到 8cm 且边长为整数的物体，尺子上至少需要有（　　）个刻度

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

9．$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$AC=BC$，$\sin\angle BDC=3\sin\angle BAC$，当$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{AB}|$取得最小值时，$\triangle ABC$的面积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{16}$

10．现有甲、乙两组数据，每组数据均由六个数组成，其中甲组数据的平均数为　，方差为　，乙组数据的平均数为　，方差为　．若将这两组数据混合成一组，则新的一组数据的方差为（　　）

A．3.5　　B．4　　C．4.5　　D．5

11．已知$A(2,0)$，点P为直线$x-y+5=0$上的一点，点Q为圆$x^2+y^2=1$上的一点，则$|PQ|+\frac{1}{2}|AQ|$的最小值为（　　）

A．$\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$　　B．$\frac{5\sqrt{2}+2}{2}$　　C．$\frac{11\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{11\sqrt{2}}{4}$

12．在三棱锥$A-BCD$中，$AB=BC=CD=DA=2\sqrt{2}$，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，平面$ABC\perp$平面$ACD$，三棱锥$A-BCD$的所有顶点都在球$O$的球面上，$E$，$F$分别在线段$OB$，$CD$上运动（端点除外），$BE=\sqrt{2}CF$．当三棱锥$E-ACF$的体积最大时，过点$F$作球$O$的截面，则截面面积的最小值为（　　）

A．π　　B．$\sqrt{3}\pi$　　C．$\frac{3}{2}\pi$　　D．2π

第Ⅱ卷

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．若x，y满足约束条件$\begin{cases}2x-y-2\le 0\\ x-y\ge 0\\ x+y-3\le 0\end{cases}$，则$z=2x+y$的最大值为_________．

14．已知函数$f(x)$的定义域为R,其导函数为$g(x)$,若函数$f(2x+2)$为偶函数,函数$g(x+1)$为偶函数,则下列说法正确的序号有__________.

①函数$f(x)$关于$x=2$轴对称;

②函数$f(x)$关于$(1,0)$中心对称;

③若$f(2)=1$，$f(5)=-1$,则$g(26)+f(16)=$　;

④若当$0<x<2$时,$f(x)=e^{x-1}+1$,则当$14<x<17$时,$f(x)=e^{17-x}+1$.

15．已知O为坐标原点，点$A(1,1)$在抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上，过点$B(0,-1)$的直线交抛物线C于P，Q两点，则$\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|BP|\cdot|BQ|}$的取值范围是__________.

16．若函数$y=f(x)$的图象上存在不同的两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称函数$y=f(x)$具有T性质.若函数$g(x)=ax+\frac{c}{2}+b\sin x\cos x+c\cos^2 x$具有$T$性质，其中$a$，$b$，$c$为实数，且满足$b^2+c^2=1$，则实数$a+b+c$的取值范围是______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=0$，$a_n+(-1)^n S_n=2^n$.

(1) 求 a_2，a_3；

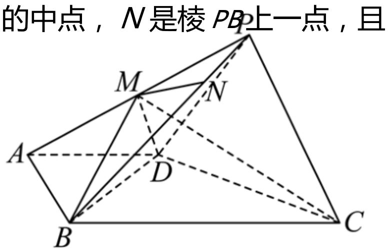
(2) 令 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，求 $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n}$．

18．甲、乙两人各有一只箱子.甲的箱子里放有大小形状完全相同的 3 个红球、2 个黄球和 1 个蓝球.乙的箱子里放有大小形状完全相同的 x 个红球、y 个黄球和 z 个蓝球 $(x+y+z=6, x, y, z\in N^*)$.现两人各从自己的箱子里任取一球，规定同色时乙胜，异色时甲胜.

(1) 当 $x=1$，$y=2$，$z=3$ 时，求乙胜的概率；

(2)若规定：当乙取红球、黄球和蓝球获胜的得分分别是 1 分、2 分和 3 分，否则得零分.求乙得分均值的最大值，并求此时 x，y，z 的值.

19．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $AD\parallel BC$，$BC=2AD$，$AB\perp BC$，M 为棱 AP 的中点，N 是棱 PB 上一点，且 $3PN=NB$．



(1) 证明：$MN\parallel$ 平面 PDC；

(2) 若 $BC=CP=PD=DC$，直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°，求平面 BMD 与平面 MCD 夹角的余弦值．

20．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 F_2 到 C 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$．

(1) 求 C 的方程；

(2) 过 C 的左顶点且不与 x 轴重合的直线交 C 的右支于点 B，交直线 $x=\frac{1}{2}$ 于点 P，过 F_1 作 PF_2 的平行线，交直线 BF_2 于点 Q，证明：Q 在定圆上．

21．设函数 $f(x)=x\sin x$，$x\in R$．

(1)求 $f(x)$ 在区间 $\left(2k\pi, 2k\pi+\pi\right)$，$k\in N$ 上的极值点个数；

(2)若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $\left|f(x_0)\right| \square \lambda\ln(1+x_0)$，求整数 λ 的最大值.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，直线 l 的普通方程为 $x\square\square 0$．

(1)将 C 的极坐标方程化为参数方程；

(2)设点 A 的直角坐标为 $(1,2)$，M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}$，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程并判断 C_1 与 l 的位置关系．

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 a、b、c 均为正实数，且 $a^2+4b^2+4c^2=1$.

(1)证明：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4c^2}\geq 9$；

(2)比较 $\frac{1}{2}\square\frac{\square^2}{a}$ 与 $\square\frac{1}{128b}$ 的大小．

答案解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x|\log_2 x<1\}$，集合 $N=\{x|-1<x<1\}$，则 $M\cap(\complement_{R}N)=$（　　）

A．$(-\infty,-1]\cup[1,2)$　　B．$[1,2)$　　C．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

【答案】B

【分析】先解出 M，根据补集的运算求出 $\complement_{R}N$，然后根据交集的运算，即可得出答案.

【详解】解 $\log_2 x<1$ 可得，$0<x<2$，所以 $M=(0,2)$．

又 $N=(-1,1)$，所以 $\complement_{R}N=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$．

所以 $M\cap(\complement_{R}N)=[1,2)$．

故选：B.

2．已知复数 z 满足 $(1-2i)z=|2\sqrt{2}-i|-i$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】D

【分析】先运用复数的除法规则求出 z，再根据复数的几何意义求解.

【详解】$|2\sqrt{2}-i|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}=3$，$z=\dfrac{|2\sqrt{2}-i|-i}{1-2i}=\dfrac{3-i}{1-2i}=\dfrac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+i$，

$\bar{z}=1-i$，实部为 1，虚部为-1，所以 $\bar{z}$ 在第四象限；

故选：D.

3《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作，书中称轴截面为等腰直角三角形的圆锥为直角圆锥，则直角圆锥侧面展开图的圆心角的弧度数为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　C．$\sqrt{2}\pi$　　D．$2\sqrt{2}\pi$

【答案】C

【分析】根据题意，结合圆锥的母线长和弧长以及圆心角之间的关系即可求解

【详解】设直角圆锥侧面展开图的圆心角的弧度数为 α，底面圆的半径为 r，母线长为 l，因为直角圆锥的轴截面为等腰直角三角形，所以 $l=\sqrt{2}r$，则 $\alpha l=2\pi r$，解得 $\alpha=\sqrt{2}\pi$．

故选：C．

4．已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{3\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{[illegible]}$ 对称，当 $f(x)$ 的最小正周期取得最大值时，距离原点最近的对称中心为（　　）

A．$\left(-\dfrac{\pi}{[illegible]},0\right)$　　B．$\left(-\dfrac{\pi}{[illegible]},0\right)$　　C．$\left(\dfrac{\pi}{[illegible]},0\right)$　　D．$\left(\dfrac{\pi}{[illegible]},0\right)$

【答案】D

【分析】根据余弦型函数的对称轴、最小正周期公式可得到函数 $f(x)$ 的解析式，再根据余弦型函数的对称中心即可求解．

【详解】由已知得 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{3}{4}\pi=k\pi\ (k\in Z)$，即 $\omega=6k-\frac{9}{2}\ (k\in Z)$，

当 $k=1$ 时，ω 最小，且为 $\frac{3}{2}$，则 T 最大，

此时 $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\pi\right)$，其对称中心的横坐标为 $x=\frac{2}{3}k\pi-\frac{\pi}{6}\ (k\in Z)$，

当 $k=0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象上距离原点最近的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$．

故选：D．

5．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(4,0)$，过点 F 且斜率为 1 的直线交椭圆于 A，B 两点.若 AB 的中点坐标为 $(3,-1)$，则 E 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{29}=1$　　　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

C．$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$　　　　D．$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$

【答案】D

【分析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，利用点差法可得 a，b 的关系，从而可求得 a，b，即可的解.

【详解】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=6,\ y_1+y_2=-2$，

由已知有，$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

作差得 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{a^2}=\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$，

则 $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{1}{3}=-\frac{b^2}{a^2}$，

所以 $a^2=3b^2,\ c=4,\ a^2-b^2=c^2=16$，解得 $b^2=8,\ a^2=24$，

则 E 的方程为 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$.

故选：D．

6．已知 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=3\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B．-1　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【分析】应用诱导公式、商数关系可得 $\tan\alpha=3\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，再由和角正切公式展开求得 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，最后由

$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1-\tan^2(\alpha-\frac{\pi}{6})}{1+\tan^2(\alpha-\frac{\pi}{6})}$求值即可.

【详解】由 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\alpha\sin[\frac{\pi}{2}+(\alpha-\frac{\pi}{6})]=\sin\alpha\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=3\cos\alpha\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $\tan\alpha=3\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\tan\alpha=\frac{3\left(\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{3\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha}$，

所以 $\tan^2\alpha-2\sqrt{3}\tan\alpha+3=0$，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，故 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{6})-\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})}{\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})}=\frac{1-\tan^2(\alpha-\frac{\pi}{6})}{1+\tan^2(\alpha-\frac{\pi}{6})}=\frac{1}{2}$.

故选：C

7．若曲线 $f(x)=\frac{x}{e^x}$ 有三条过点 $(0,a)$ 的切线，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,$ [illegible] B．$(0,$ [illegible] C．$(0,$ [illegible] D．$(0,$ [illegible]

【答案】B

【分析】根据导数的几何意义求出过点 $(0,a)$ 的切线方程为 $a=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$，利用方程的解个数与函数图象交点个数的关系将问题转化为 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 图象与直线 $y=a$ 在 R 上有 3 个交点，结合导数求出函数 $g(x)$ 的极值，根据数形结合的思想即可求解.

【详解】设该切线的切点为 $(x_0,\frac{x_0}{e^{x_0}})$，则切线的斜率为 $k=f'(x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$，

所以切线方程为 $y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$，

又切线过点 $(0,a)$，则 $a-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(0-x_0)$，整理得 $a=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$.

要使过点 $(0,a)$ 的切线有 3 条，需方程 $a=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$ 有 3 个不同的解，

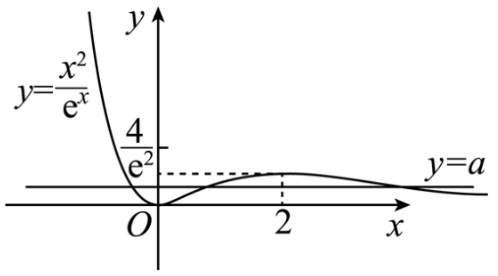
即函数 $y=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$ 图象与直线 $y=a$ 在 R 上有 3 个交点，

设 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$，

令 $g'(x)>0\Rightarrow 0<x<2$，令 $g'(x)<0\Rightarrow x<0$ 或 $x>2$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

且极小值、极大值分别为 $g(0)=0, g(2)=\frac{4}{e^2}$，如图，



由图可知，当 $0<a<\frac{4}{e^2}$ 时，函数 $y=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$ 图象与直线 $y=a$ 在 R 上有 3 个交点，

即过点(0,)的切线有 3 条.

所以实数 a 的取值范围为 $0<a<\frac{4}{e^2}$.

故选：B.

8．“省刻度尺”问题由英国数学游戏大师杜登尼提出： 23c 长的尺子，要能够量出长度为 1c 到 23c 且边长为整数的物体，至少需要 6 个刻度（尺子头尾不用刻）现有一根 8c 的尺子，要在至多测量两次的情况下量出长度 1c 到 8c 且边长为整数的物体，尺子上至少需要有（　　）个刻度

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】B

【分析】将问题转化为组合抽样思维，设 x 为长度， a 为刻度， b 为刻度对应的数量，则当尺子有 4 个刻度时满足条件，$x\in[1,8]$ $x\in N$，$x=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+b_4a_4$ 其中 $b_1,b_2,b_3,b_4\in\{0,1\}$ 证明验证求解.

【详解】若有一根 8c 的尺子，量出长度为 1c 到 8c 且为整数的物体，

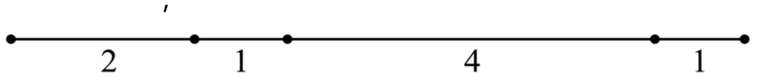
则当尺子有 4 个刻度时满足条件

设 x 为长度， a 为刻度， b 为刻度对应的数量，则有 $x\in[1,8]$ 且 $x\in N$，$x=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+b_4a_4$，其中

$b_1,b_2,b_3,b_4\in\{0,1\}$，

当 $a_1=2, a_2=1, a_3=4, a_4=1$ 时， $a_2=1, a_1=2, a_1+a_2=3, a_3=4, a_2+a_3=5, a_2+a_3+a_4=6$,

$a_1+a_2+a_3=7, a_1+a_2+a_3+a_4=8$



下证，当尺子有 3 个刻度时不能量出 1c ~ 8c 的物体长度

设 $x\in[1,8]$ 且 $x\in N$，$x=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3$，其中 $b_1,b_2,b_3\in\{0,1\}$，

所以当 b_1,b_2,b_3 中有 1 个 0，x 的取值至多有 3 个

当 b_1,b_2,b_3 中有 2 个 0 时，$b_1=b_2=0$ 或 $b_2=b_3=0$，x 的取值至多有 2 个

当 b_1,b_2,b_3 中没有 0 时，x 的取值有 1 个

所以 x 取值至多有 6 个，即当尺子有 3 个刻度时不能量 1c ~ 8c 的物体长度．

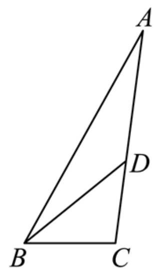
故选:B

9．在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，$AC=3BC$，$\sin\angle BDC=3\sin\angle BAC$，当$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-|\overrightarrow{AB}|$取得最小值时，$\triangle ABC$的面积为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{16}$

【答案】D

【分析】设$BC=n$，$BD=m$，在$\triangle BDC$和$\triangle ABC$中应用正弦定理可得到$BD=\frac{1}{3}AB$，然后利用$\cos\angle BDC=-\cos\angle BDA$结合余弦定理可得$m^2=\frac{2}{3}n^2$，化简$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-|\overrightarrow{AB}|$可得当$m=\frac{1}{2}$时，取得最小值，最后利用面积公式即可

【详解】

设$BC=n$，$\because AC=3BC$，$\therefore AC=3n$，$\because \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，$\therefore AD=2DC=\frac{2}{3}AC=2n$，

在$\triangle BDC$中，$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin C}$，在$\triangle ABC$中，$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin C}$，

$\therefore\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{AB}$，$\because\sin\angle BDC=3\sin\angle BAC$，$\therefore BD=\frac{1}{3}AB$，

设$BD=m$，$\therefore AB=3m$，

$\because\angle BDC+\angle BDA=\pi$，$\therefore\cos\angle BDC=\cos(\pi-\angle BDA)=-\cos\angle BDA$，

$\therefore\frac{m^2+n^2-n^2}{2mn}=-\frac{m^2+(2n)^2-(3m)^2}{2m\cdot 2n}$

$\therefore 2n^2=3m^2$，$\therefore n^2=\frac{3}{2}m^2$，$\therefore m^2=\frac{2}{3}n^2$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-|\overrightarrow{AB}|=3n\cdot n\cos C-3m=3n^2\cdot\frac{n^2+(3n)^2-(3m)^2}{2n\cdot 3n}-3m=3m^2-3m=3\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

当$m=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-|\overrightarrow{AB}|$取得最小值，$\therefore n^2=\frac{3}{8}$，$\therefore\cos C=\frac{n^2+9n^2-9m^2}{6n^2}=\frac{2}{3}$，

又$\because\sin^2C+\cos^2C=1$，$\therefore\sin^2C=1-\cos^2C=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\therefore$在$\triangle ABC$中$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}n\cdot 3n\cdot\sin C=\frac{3}{2}n^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{8}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{3\sqrt{5}}{16}$

故选：D.

10．现有甲、乙两组数据，每组数据均由六个数组成，其中甲组数据的平均数为　，方差为　，乙组数据的平均数为　，方差为　．若将这两组数据混合成一组，则新的一组数据的方差为（　　）

A．3.5　　　　B．4　　　　C．4.5　　　　D．5

【答案】D

【分析】利用平均数和方差公式可求得新数据的方差.

【详解】设甲组数据分别为 x_1、x_2、…、x_6，乙组数据分别为 x_7、x_8、…、x_{12}，

甲组数据的平均数为 $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=3$，可得 $\sum_{i=1}^{6}x_i=18$，方差为 $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-3)^2=5$，可得 $\sum_{i=1}^{6}(x_i-3)^2=30$，

乙组数据的平均数为 $\frac{1}{6}\sum_{i=7}^{12}x_i=5$，可得 $\sum_{i=7}^{12}x_i=30$，方差为 $\frac{1}{6}\sum_{i=7}^{12}(x_i-5)^2=3$，可得 $\sum_{i=7}^{12}(x_i-5)^2=18$，

混合后，新数据的平均数为 $\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}x_i=\frac{18+30}{12}=4$，

方差为 $\frac{1}{12}\left[\sum_{i=1}^{6}(x_i-4)^2+\sum_{i=7}^{12}(x_i-4)^2\right]=\frac{1}{12}\left\{\sum_{i=1}^{6}[(x_i-3)-1]^2+\sum_{i=7}^{12}[(x_i-5)+1]^2\right\}$

$=\frac{1}{12}\left[\sum_{i=1}^{6}(x_i-3)^2+\sum_{i=7}^{12}(x_i-5)^2-2\sum_{i=1}^{6}(x_i-3)+2\sum_{i=7}^{12}(x_i-5)+12\right]$

$=\frac{1}{12}\left[30+18-2(18-3\times6)+2(30-5\times6)+12\right]=5$.

故选：D.

11．已知 $A(2,0)$，点 P 为直线 $x-y+5=0$ 上的一点，点 Q 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的一点，则 $|PQ|+\frac{1}{2}|AQ|$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$　　　　B．$\frac{5\sqrt{2}+2}{2}$　　　　C．$\frac{11\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$\frac{11\sqrt{2}}{4}$

【答案】D

【分析】令 $\frac{1}{2}|AQ|=|MQ|$，可得 M 点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，则 $|PQ|+\frac{1}{2}|AQ|=|PQ|+|MQ|$，即可得答案.

【详解】设 $M(x_0,0)$，$Q(x_1,y_1)$，令 $\frac{1}{2}|AQ|=|MQ|$，

则 $\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+y_1^2}\Rightarrow x_1^2+\frac{4-8x_0}{3}x_1+y_1^2=\frac{4-4x_0^2}{3}$

$\Rightarrow x_1^2+y_1^2=1\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$，则 $M\left(\frac{1}{2},0\right)$，$|PQ|+\frac{1}{2}|AQ|=|PQ|+|MQ|$.

如图，当 P、Q、M 三点共线时，且 PM 垂直于直线 $x-y+5=0$ 时，$|PQ|+|MQ|$ 有最小值，为 $|PM|$，即直线 $x-y+5=0$ 到点 M 距离，为 $\frac{\left|\frac{1}{2}+5\right|}{\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{4}$.

故选：D