摘　要

随着全球化进程的不断推进, 金融市场的发展推动了金融产品的创新, 期权产品的问世为市场参与者提供了更多的投资机会. 由于标准期权缺乏灵活性, 金融机构开发了种类繁多的奇异期权. 彩虹期权, 锁定期权, 幂交换期权是三类交易活跃的奇异期权, 深受投资者喜爱, 对它们合理定价具有重要意义. 已有的文献都是假设标的资产的波动率为常数或时间的确定函数, 为了更好地模拟实际金融市场, 本文假设波动率服从Heston随机模型, 研究这三类期权的定价问题, 主要内容如下:

第一, 研究彩虹期权的定价问题. 首先利用Itô-Doeblin公式推导出期权价格满足的偏微分方程. 其次通过变量替换将期权价格分解为三部分, 进而把求解期权价格的问题转化为求解特征函数的问题. 然后借助特征函数与分布函数的关系得到彩虹期权的价格公式. 最后通过数值模拟对比使用蒙特卡洛方法与使用本文得到的定价公式计算的期权价格所需时间, 并以最大彩虹看涨期权为例, 研究回归速率, 长期均值等参数对期权价格的影响.

第二, 研究锁定期权的定价问题. 首先通过测度变换构造出两个新的概率测度, 从而将定价公式中计算到期收益贴现的期望的问题转化成在新测度下计算对数收益率的特征函数的问题. 然后利用条件期望的性质, 得到特征函数的表达式, 由此得到锁定期权的价格. 最后通过数值实验说明公式解的优越性, 以及模型中的参数对期权价格的影响.

第三, 研究幂交换期权的定价问题. 首先利用Itô-Doeblin公式求得期权价格满足的偏微分方程. 其次通过变量替换减少变量个数, 并引入调整变量解决边界函数的Fourier变换不存在的问题. 然后利用格林函数和Fourier变换求解偏微分方程, 得到幂交换期权的定价公式. 数值实验显示用公式计算期权价格比用蒙特卡洛方法计算期权价格要快得多. 另外, 分析模型中的参数对期权价格的影响.

关键词： 随机波动率; Heston模型; 彩虹期权; 锁定期权; 幂交换期权; 测度变换; 特征函数; Fourier变换

目　录

引　言

0.1　期权及其定价理论的发展

在经济全球化的二十一世纪, 金融衍生品已经渗透到国民生活的各个方面. 期权作为全球最活跃的衍生品之一, 因其可以有效对冲市场风险, 同时其本身也可作为一种风险投资产品而丰富了金融市场, 受到越来越多投资者的关注.

期权赋予其持有者在事先规定的特定日期以特定的价格购买或出售预定数量的标的资产的权利. 期权的品种众多, 按照其赋予的权利类型可分为看涨期权和看跌期权. 看涨期权赋予持有人以固定价格买入标的资产的权利; 看跌期权赋予持有人以固定价格卖出标的资产的权利. 根据行权时间的不同, 期权可分为美式期权和欧式期权. 美式期权允许其持有人在到期日或到期日前任意交易日行使其权利; 欧式期权仅允许其持有人在到期日当天行使其权利. 基于标的资产的类型, 期权可分为股票期权, 股指期权, 利率期权, 商品期权及外汇期权等等.

自1900年法国金融学专家Louis Bachelier[3]对巴黎股市进行研究, 将布朗运动原理运用于金融市场, 伴随着期权市场的逐渐壮大, 期权定价理论研究也获得了显著的进展. 首个完整的期权定价模型由Black, Scholes[4]和Merton[36]创立, 这就是著名的Black-Scholes-Merton期权定价模型(简称BSM模型). BSM模型不仅为期权定价开创了新时代, 同时也推动了期权交易迅猛发展. 时至今日, BSM模型作为目前应用最广泛, 影响最深刻的期权定价模型, 其光芒在金融工程领域持续辉映近数十年时间, 为该领域的发展提供了指引.

BSM模型的建立基于以下假设:

(1)标的资产价格服从几何布朗运动:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t),$$

其中μ, σ为常数;

(2)无风险利率为常数, 并对所有期限都是相同的;

(3)交易成本和税收为0, 所有证券均可无限分割;

(4)所有证券交易均连续发生;

(5)投资者可以卖空证券, 且完全使用所得收入;

(6)在期权期限内, 股票不发放股利;

(7)不存在无风险套利机会.

然而金融市场并非想象中那样完美, BSM模型中的一些假设无法反映真实市场中的各

种现象, 例如: 隐含波动率呈现出的"波动率微笑", "波动率倾斜", 资产收益率的"偏态", "尖峰", " 厚尾"等. 尽管BSM模型简洁优美, 其也无可避免地影响着期权定价模型的精确性. 因此, 为了使期权定价模型能够更好地反映市场规律, 国内外许多学者对BSM模型进行了改进, 主要分为以下两方面:

第一, 对标的资产价格过程进行改进. 当市场突然出现一些重大事件时, 如金融危机, 自然灾害等, 会导致资产价格出现不连续变动, 即跳跃. 1976年, Merton[37]在标的资产的价格模型中加入复合泊松过程来描述跳跃现象, 并在跳跃幅度服从对数正态分布的假设下得到了欧式期权的定价公式. 2002年, Kou[23]将跳跃幅度用双指数分布刻画, 提出了双指数跳扩散模型, 并给出了该模型下欧式期权的定价公式. 随后众多学者在Merton和Kou的跳扩散模型的基础上展开了进一步的研究. 文献[6, 25, 29, 30, 38]在Merton的对数正态跳扩散模型下分别研究了彩虹期权, 脆弱期权, 双币种期权, 交换期权和远期开始期权的定价问题. 文献[8, 19, 32]在Kou的双指数跳扩散模型下对障碍期权, 脆弱期权和复合期权进行定价.

除了跳扩散过程, Lévy过程也可以很好地拟合实际金融数据. Lévy过程是一种具有无限可分, 独立平稳增量特性的随机过程, 能够将持续扩散与无限小幅跳跃过程中随机形成的"尖峰厚尾"特性刻画出来, 所以一些学者们使用Lévy过程来描述标的资产价格过程. 常见的Lévy过程包括泊松过程, 复合泊松过程, 方差伽马(VG)过程, 正态逆高斯(NIG)过程, CGMY过程, 以及梅克斯纳(Meixner)过程等[44]. 文献[2]探究了资产价格服从正态逆高斯(NIG)过程时亚式期权的定价问题; 文献[13]假设资产价格服从CGMY过程, 研究了美式期权的定价问题; 文献[26]基于资产价格服从方差伽马(VG)过程, 对复合期权进行了定价.

第二, 对利率, 波动率是常数这个假设进行改进. 在实际的市场中, 利率往往以随机变化的形式出现. 为了更好地刻画利率的演化过程, 很多学者考虑用随机利率来代替常数利率. 在随机利率模型中, 常见的模型包括Hull-White利率模型[20], Vasicek利率模型[52]和CIR利率模型[9]等. 文献[16, 58]研究了当利率服从Hull-White模型时外汇期权和一篮子期权的定价问题; 文献[34, 61]假设利率服从Vasicek模型, 讨论了计时期权和欧式缺口期权的定价问题; 文献[43]使用CIR模型描述利率的变化过程, 给出了远期开始期权的定价公式. 还有学者把跳跃因素与利率随机变化结合起来考虑期权的定价问题, 例如文献[7, 27, 39, 55].

同时, 人们在长期的实践中还发现波动率会受到诸如利率变动, 突发事件, 经济政策变化等多种随机事件的影响. 为了更有效地描述现实金融市场, 学者们用随机过程来描述波动率. 最常见的两种随机波动率模型是通过O-U过程得到的Stein-Stein模型[49]和通过CIR过程得到的Heston模型[17], 这两种模型均可以反映真实市场波动率变化的"均值回归"现象. 相比而言, Heston模型的优势在于可以保证波动率非负, 在欧式期权定价中可以求得闭式解等, Heston模型已经成为在实际应用中最受欢迎的模型之一. 越来越多

的学者在Heston随机波动率模型下研究期权的定价问题, 例如: 文献[14, 22, 24, 31, 48]在该模型下分别考虑了障碍期权, 幂期权, 脆弱期权, 远期开始期权和外汇期权的定价问题, 并得到了相应的期权价格解析式.

0.2 研究现状及研究内容

针对不同的风险需求, 金融机构在标准期权的基础上进行了相应的创新和拓展, 形成了各种各样的奇异期权[60]. 相对于标准期权, 奇异期权的交易市场更为多样化. 常见的奇异期权包括回望期权, 复合期权, 障碍期权, 亚式期权, 幂期权, 交换期权, 彩虹期权, 锁定期权等等. 本文研究彩虹期权, 锁定期权和幂交换期权的定价问题.

0.2.1 彩虹期权

彩虹期权是一种多资产期权, 其到期收益依赖于多个标的资产价格的最值. 学者们把每个标的资产看成一种颜色, 由此给出了彩虹期权的概念. 彩虹期权在期权市场上日渐活跃, 备受投资者们的关注, 也激发了广大学者的研究热情. 1982年, Stulze[50]研究了BSM模型下含有两个资产的欧式彩虹期权的定价问题, 得到了期权价格的解析解. 1987年, Johnson[21]将Stulze的结论推广到含有多个资产的彩虹期权的情况. 1999年, Wu Xueping和Zhang Jine[56]通过求解偏微分方程(PDE)得到了BSM模型下含有两个资产的亚式彩虹期权的定价公式. 2017年, 石方圆等[46]假设标的资产价格服从带跳的O-U过程, 无风险利率为时间的确定函数, 并使用保险精算方法给出了含有两个资产的彩虹期权的定价公式. 2020 年, Ahmadian和Ballestra[1]研究了资产价格服从混合分数布朗运动时含有多个资产的几何亚式彩虹期权的定价问题, 通过变量替换和求解期权价格满足的PDE得到了封闭解; 同年, Boen[6]假设资产价格服从Metron跳扩散模型, 利用Girsanov定理和测度变换给出了含有两个资产的彩虹期权的定价公式. 2022年, Gao Rong和Wu Xiaoli[12]在不确定理论框架下研究了美式彩虹期权的定价.

以上关于彩虹期权的研究均假设波动率为常数或者是关于时间的确定函数, 为了丰富期权定价理论, 本文的第二章研究随机波动率模型下含有两个资产的彩虹期权的定价问题. 假设资产价格的波动率服从Heston随机模型, 两个资产均支付连续红利, 并且涉及到的布朗运动具有相关性. 首先利用多维过程的Itô-Doeblin公式及期权到期收益的贴现过程是鞅建立期权价格满足的PDE. 其次借鉴BSM模型下彩虹期权的价格公式, 通过巧妙的变量替换将期权价格分解为三项, 把边界条件转化为示性函数, 进而把计算期权价格的问题转换成在某些新测度下计算特征函数的问题. 然后通过求解PDE得到特征函数的表达式, 利用特征函数与分布函数的关系给出彩虹期权的定价公式. 在数值分析方面, 通过蒙特卡洛方法分别求出最大彩虹看涨, 看跌和最小彩虹看涨, 看跌期权价格的近似值, 对比使用蒙特卡洛方法和定价公式计算期权价格的速度, 由此说明公式解在计算方面的优越性. 另外, 研究模型中的一些参数对期权价格的影响.

0.2.2 锁定期权

锁定期权是一种路径依赖型的奇异期权, 它的到期收益不仅与资产到期价格有关, 同时也取决于某一约定好的时刻的价格. 锁定期权能够满足不同投资者规避各自风险的需求, 使得锁定期权日益成为投资者关注的焦点, 因此对锁定期权进行合理定价十分重要. 1994年, Yu[59]研究了BSM模型下欧式和美式锁定期权的定价问题. 2018年, 孙慧和李翠香[51]假设资产价格服从具有多个扩散源的随机微分方程(SDE), 并借助测度变换得到了带有信用风险的锁定期权的价格表达式; 同年, 吕桂稳和刘丽霞[33]在不确定理论框架下利用Yao - Chen公式给出锁定期权的定价公式. 2019年, 邱梓轩[42]得到了在Klein模型下具有违约风险的锁定期权的价格表达式. 2021年, 何二倩和李翠香[15]假设标的资产价格过程服从二维指数广义双曲Lévy过程, 利用特征函数和分布函数的关系给出了锁定期权的解析表达式.

本文的第三章研究Heston随机波动率模型下锁定期权的定价问题. 首先借助测度变换构造出合适的概率测度, 将求解期望问题转化成在新测度下求对数收益率的特征函数的问题, 极大简化了计算过程. 其次利用累次条件期望的性质, 通过求解两次PDE得到特征函数的表达式, 由此给出锁定期权的定价公式. 最后通过数值分析将使用蒙特卡洛方法和公式计算期权价格的速度进行对比, 结果显示用公式计算的速度要快于蒙特卡洛方法. 此外, 还讨论了模型中的参数对期权价格的影响.

0.2.3 幂交换期权

交换期权是一种奇异期权, 其在到期日T的收益为$\max(X_T-Y_T,0)$, 即持有者有权在到期日将资产Y转化为另外一种资产X. 交换期权为金融机构与企业进行资产负债治理提供了很大的灵活性, 是最受公司企业欢迎的期权之一. 1978年, Margrabe[35]在BSM模型下通过求解PDE得到了交换期权的定价公式. 2018年, Li Wenhan等[30]借助Esscher变换的方法得出跳扩散模型下交换期权的价格公式. 2022年, Puneet和Anubha[41]利用特征函数和分布函数的关系得到了双Heston随机波动率模型下欧式交换期权的定价公式. 幂期权是由普通欧式期权演变而来的具有非线性收益的奇异期权, 执行价格为K的幂看涨期权和看跌期权在到期日T的收益分别为$\max(X_T^\alpha-K,0)$和$\max(K-X_T^\alpha,0)$. 在幂期权的交易中, 通过调整幂参数α的设定值, 使得该期权具备更高的杠杆性和更好的灵活性, 以满足不同投资者的风险偏好和需求特点. 1996年, Heynen和Kat[18]在BSM模型下研究了幂期权的定价问题. 2012年, Peng Bin和Peng Fei[40]推导出当标的资产价格服从跳扩散过程时幂期权的定价公式. 2021年, 丁毅和郭精军[11]用混合高斯和带跳模型描述标的资产价格过程, 研究了亚式幂期权的定价问题. 2005年, Blenman和Clark[5]提出了应用广泛的幂交换期权, 在普通欧式交换期权的基础上将资产价格变为资产价格的指数幂, 其在到期日T的收益为$\max(\lambda_1 X_T^{\alpha_1}-\lambda_2 Y_T^{\alpha_2},0)$, $\alpha_i,\lambda_i>0$. 显然, 交换期权和幂期权是特殊的幂交换期权. 关于幂交换期权的定价问题, 已有一些学者进行研究, 例如: 2016年, Wang

Xinchun[53]得到了跳扩散模型下幂交换期权的定价公式. 2018年, Xu Guangli等[57]通过测度变换, 研究了具有违约风险的幂交换期权的定价问题.

本文的第四章研究Heston随机波动率模型下幂交换期权的定价问题. 首先通过多维Itô-Doeblin公式求得期权价格过程满足的PDE, 并根据幂交换期权的两个资产的线性性质进行变量替换以减少变量个数. 其次利用Fourie变换求解PDE, 由于幂交换期权的终值条件的Fourier变换不存在, 因此引入调整变量使其Fourier变换存在. 然后利用格林函数和Fourier变换得到了幂交换期权的定价公式. 最后通过数值实验分析模型中各参数对期权价格的影响. 另外, 比较了用蒙特卡洛方法计算期权价格和用公式计算期权价格所需时间, 结果显示用公式计算期权价格要快得多.

0.3 本文的结构安排

本文分为如下六个部分:

引言, 介绍了期权及其定价理论的发展, 研究现状及研究内容, 以及本文的结构安排.

第一章, 介绍了Itô积分的性质, Itô公式, 特征函数与分布函数的关系, 建立了标的资产价格模型, 并给出了一类特殊的PDE的解.

第二章, 研究了彩虹期权的定价问题, 利用Itô-Doeblin公式, 变量替换, 特征函数与分布函数的关系得到了彩虹期权的价格公式, 并进行了数值分析.

第三章, 研究了锁定期权的定价问题, 利用测度变换, 条件期望的性质, 特征函数与分布函数的关系推出了锁定期权的定价公式, 并进行了数值分析.

第四章, 研究了幂交换期权的定价问题, 利用Itô-Doeblin公式, 变量替换, 格林函数与Fourier变换求得了幂交换期权价格的解析表达式, 并进行了数值分析.

第五章, 总结了本文的主要结论及进一步研究的内容.

第一章　预备知识

1.1　Itô过程及Itô公式

定义 1.1.1[47] (布朗运动) 如果随机过程$\{W(t)\}_{t\geq 0}$满足以下条件:

(i) $W(0)=0$;

(ii) (独立增量)对所有的$0=t_0<t_1<\cdots<t_m$, 增量

$$W(t_1)-W(t_0),\, W(t_2)-W(t_1),\, \cdots,\, W(t_m)-W(t_{m-1})$$

相互独立;

(iii) (正态增量)对任意的$t>s$, $W(t)-W(s)\sim N(0,t-s)$;

(iv) (连续路径)$W(t)$是关于时间t的连续函数,

则称$\{W(t)\}_{t\geq 0}$是一个标准布朗运动.

定义 1.1.2[47] 设$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},Q)$是概率空间, $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ 是随机过程. 如果对任意的$t\geq 0$, 随机变量$X(t)$是关于$\mathcal{F}_t$可测的, 则称$\{X(t)\}_{t\geq 0}$是关于域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$适应的随机过程.

定义 1.1.3[47] (鞅) 设$\{M(t)\}_{t\geq 0}$是关于域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$适应的随机过程, $E_Q[|M(t)|]<\infty$. 如果对任意的$0\leq s\leq t\leq T$, 满足

$$E_Q[M(t)|\mathcal{F}_s]=M(s),$$

则称$\{M(t)\}_{t\geq 0}$是鞅, 其中$E_Q[\cdot]$表示测度Q下的期望, $E_Q[\cdot|\mathcal{F}_t]$表示条件期望.

引理 1.1.1[28] 设X为任一随机变量, 且满足$E_Q[|X|]<\infty$. 令$Z(t)=E_Q[X|\mathcal{F}_t]$, 则$\{Z(t)\}_{t\geq 0}$是鞅.

引理 1.1.2[47] 设T是正数, $\{W(t)\}_{t\geq 0}$是布朗运动, $\{\Delta(t)\}_{t\geq 0}$是适应的随机过程, 并且满足$E_Q\left[\int_0^T\Delta^2(t)\mathrm{d}t\right]<\infty$, 则Itô 积分$I(t)=\int_0^t\Delta(u)\mathrm{d}W(u)$具有以下性质:

(i) (连续性)$I(t)$具有连续的路径;

(ii) (适应性)$I(t)$关于$\mathcal{F}_t$可测;

(iii) (鞅性)$\{I(t)\}_{t\geq 0}$是鞅;

(iv) (线性性)设$I(t)=\int_0^t\Delta(u)\mathrm{d}W(u)$, $J(t)=\int_0^t\Gamma(u)\mathrm{d}W(u)$, 则对于任意的常数$a$, b,

$$aI(t)\pm bJ(t)=\int_0^t[a\Delta(u)\pm b\Gamma(u)]\mathrm{d}W(u);$$